

# Rappresentazione doppi bipoli

**Connessioni doppi bipoli**

# Connessioni doppi bipoli

**Generalità**

# Connessioni Generalità

- I bipoli hanno solo due possibilità di connessione:
  - serie
  - parallelo
- Avendo due porte i doppi bipoli hanno una maggiore possibilità di connessioni.
  - Tuttavia, se le porte non sono intrinseche, è importante verificare che le eventuali connessioni mantengano la proprietà di porta

# Connessioni: Generalità

- Le possibili connessioni di doppi bipoli
  - connessioni serie su entrambe le porte (serie-serie)
  - connessioni parallelo su entrambe le porte (parallelo-parallelo)
  - connessioni ibride:
    - serie sulle porte 1 e parallelo sulle porte 2 (serie-parallelo)
    - parallelo sulle porte 1 e serie sulle porte 2 (parallelo-serie)

# Connessioni serie-serie

- La porta 11' del doppio bipolo A e la porta 11' del doppio bipolo B sono percorse dalla stessa corrente
- La porta 22' del doppio bipolo A e la porta 22' del doppio bipolo B sono percorse dalla stessa corrente
- Se entrambi i doppi bipoli sono rappresentabili con impedenze  $Z_A$  e  $Z_b$  , anche il doppio bipolo ottenuto dalla connessione serie-serie è rappresentabile con impedenze  $Z$  e si ha:

$$Z = Z_A + Z_b$$

# Connessioni parallelo-parallelo

- Sulla porta 11' del doppio bipolo A e sulla porta 11' del doppio bipolo B è applicata la stessa tensione
- Sulla porta 22' del doppio bipolo A e sulla porta 22' del doppio bipolo B è applicata la stessa tensione
- Se entrambi i doppi bipoli sono rappresentabili con ammettenze  $Y_A$  e  $Y_b$  , anche il doppio bipolo ottenuto dalla connessione parallelo-parallelo è rappresentabile con ammettenze  $Y$  e si ha:

$$Y = Y_A + Y_b$$

# Connessioni serie-parallelo

- Sulla porta 11' del doppio bipolo A e sulla porta 11' del doppio bipolo B è applicata la stessa tensione
- Sulla porta 22' del doppio bipolo A e sulla porta 22' del doppio bipolo B è applicata la stessa tensione
- Se entrambi i doppi bipoli sono rappresentabili con parametri ibridi diretti  $h_A$  e  $h_b$ , anche il doppio bipolo ottenuto dalla connessione serie-parallelo è rappresentabile con parametri  $h$  e si ha:

$$h = h_A + h_b$$

# Connessioni parallelo-serie

- Sulla porta 11' del doppio bipolo A e sulla porta 11' del doppio bipolo B è applicata la stessa tensione
- La porta 22' del doppio bipolo A e la porta 22' del doppio bipolo B sono percorse dalla stessa corrente
- Se entrambi i doppi bipoli sono rappresentabili con parametri ibridi inversi  $g_A$  e  $g_b$  , anche il doppio bipolo ottenuto dalla connessione serie-parallelo è rappresentabile con parametri  $g$  e si ha:

$$g = g_A + g_b$$



# Connessione in cascata 1/2

- La porta 22' del doppio bipolo A e connessa alla porta 11' del doppio bipolo B
- La porta 11' del doppio bipolo A e la porta 22' del doppio bipolo B sono le due porte accessibili del doppio bipolo ottenuto dalla cascata del doppio bipolo A con il doppio bipolo B

# Connessione in cascata 2/2

- Se entrambi i doppi bipoli sono rappresentabili con matrici di trasmissione  $T_A$  e  $T_b$  , anche il doppio bipolo ottenuto dalla connessione a cascata è rappresentabile con matrice di trasmissione  $T$  e si ha:

$$T = T_A T_b$$

- La connessione a cascata tra doppi bipoli costituisce la più importante ed utilizzata connessione di doppi bipoli

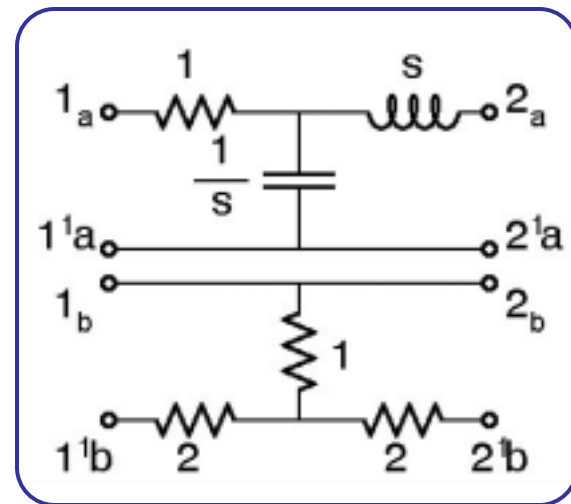
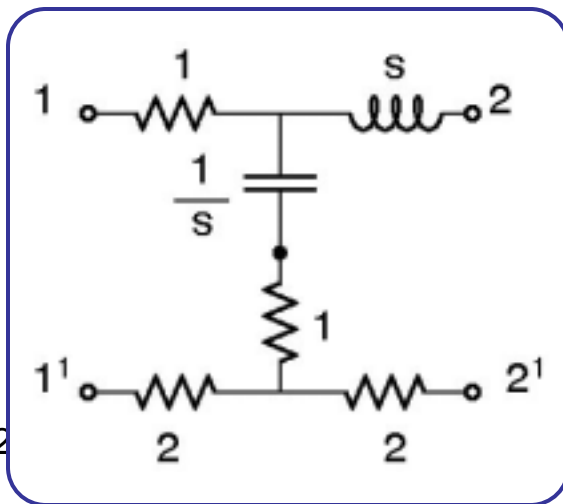
# Connessioni doppi bipoli

**Esempi**

# Connessioni serie-serie

## Esempio 1

- Determinare i parametri  $Z$  del doppio bipolo indicato in figura
- Determinare i parametri  $h$  dello stesso doppio bipolo
  - Il doppio bipolo equivale alla connessione serie-serie dei due doppi bipoli indicati in figura

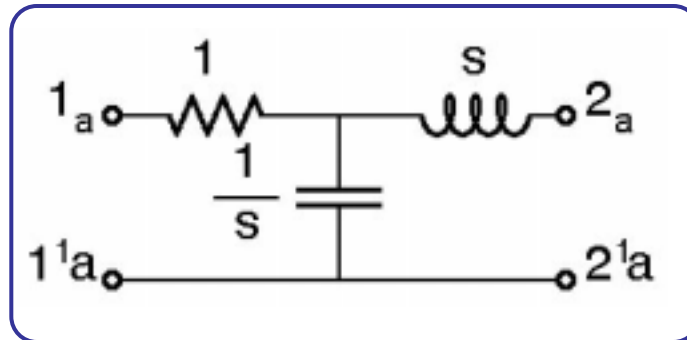


# Connessioni serie-serie

## Esempio 2

- Per il doppio bipolo in alto si ha :

$$\begin{aligned} Z_{11}^a &= 1 + \frac{1}{s} & Z_{21}^a &= \frac{1}{s} \\ Z_{12}^a &= \frac{1}{s} & Z_{22}^a &= s + \frac{1}{s} \end{aligned} \quad Z^a = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & s + \frac{1}{s} \end{vmatrix}$$



# Connessioni serie-serie

## Esempio 3

- Per il doppio bipolo in basso si ha :

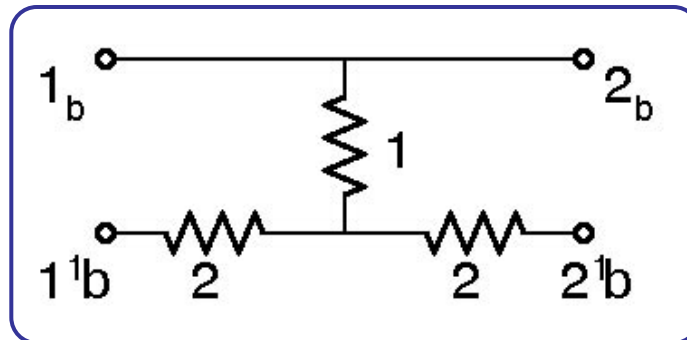
$$Z_{11}^b = 1 + 2 = 3$$

$$Z_{21}^b = 1$$

$$Z_{12}^b = 1$$

$$Z_{22}^b = 2 + 1 = 3$$

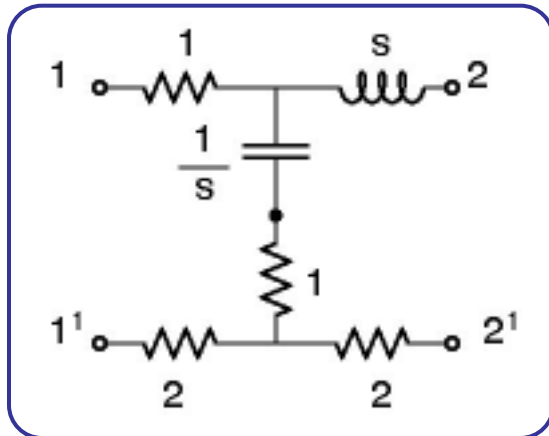
$$Z^b = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$



# Connessioni serie-serie

## Esempio 4

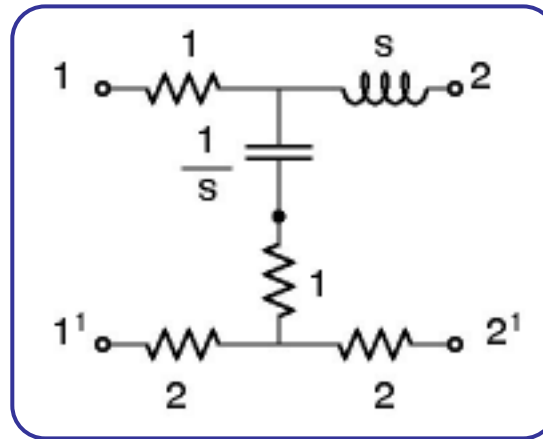
- Il doppio bipolo ottenuto dalla connessione serie-serie presenta una matrice di impedenza che è somma delle matrici di impedenza



$$Z = Z^a + Z^b = \begin{vmatrix} 4 + \frac{1}{s} & 1 + \frac{1}{s} \\ 1 + \frac{1}{s} & 3 + s + \frac{1}{s} \end{vmatrix}$$

# Connessioni serie-serie

## Esempio 4



- Il gruppo misto  $h$  si ottiene con le formule di trasformazione.

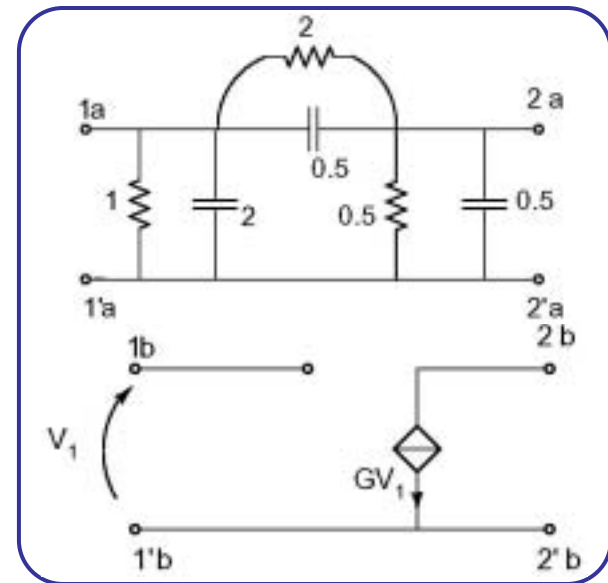
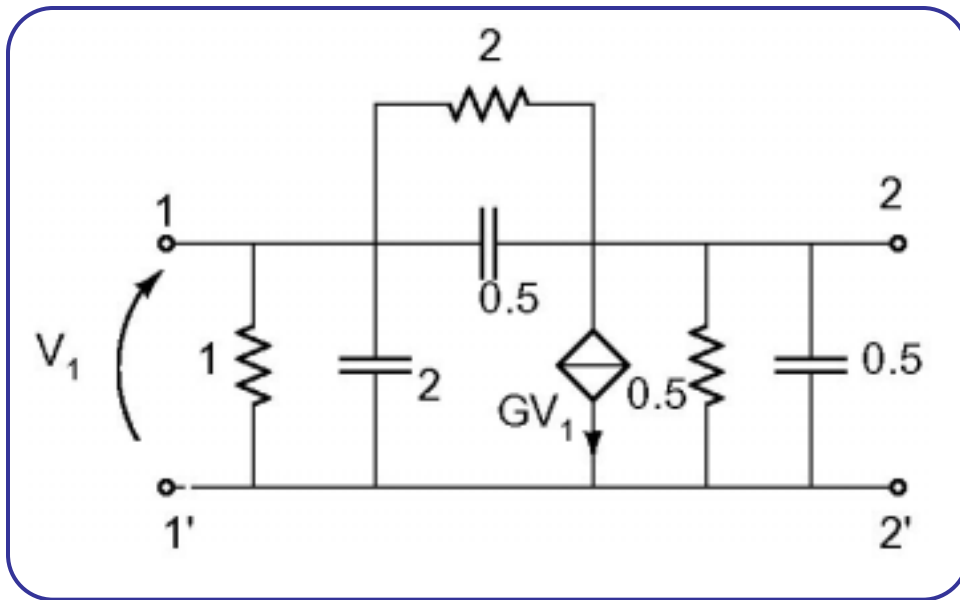
$$h = \begin{vmatrix} \frac{\det[Z]}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4s^2 + 12s + 5}{s^2 + 3s + 1} & \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 1} \\ -\frac{s + 1}{s^2 + 3s + 1} & \frac{s}{s^2 + 3s + 1} \end{vmatrix}$$



# Connessioni parallelo-parallelo

## Esempio 1

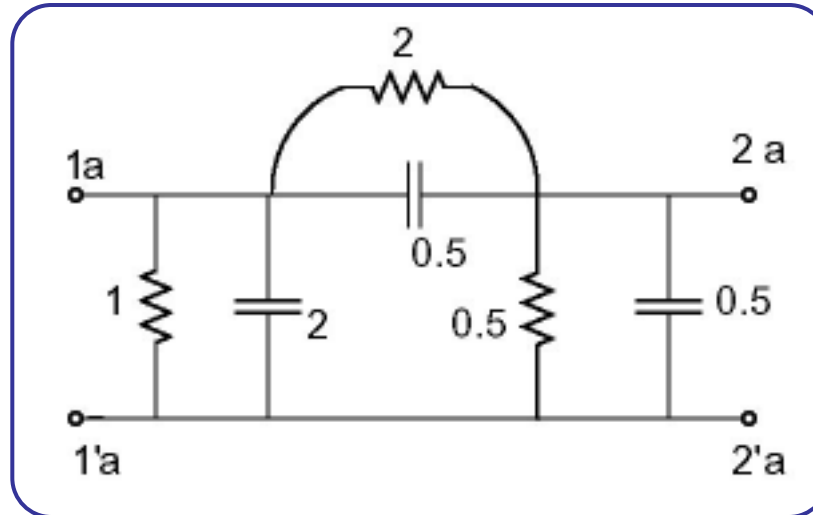
- Determinare i parametri Y del doppio bipolo indicato in figura
- Determinare la matrice di trasmissione dello stesso doppio bipolo
  - Il doppio bipolo equivale alla connessione parallelo-parallelo dei due doppi bipoli indicati a destra



# Connessioni parallelo-parallelo

## Esempio 2

- Per il doppio bipolo in alto si ha:

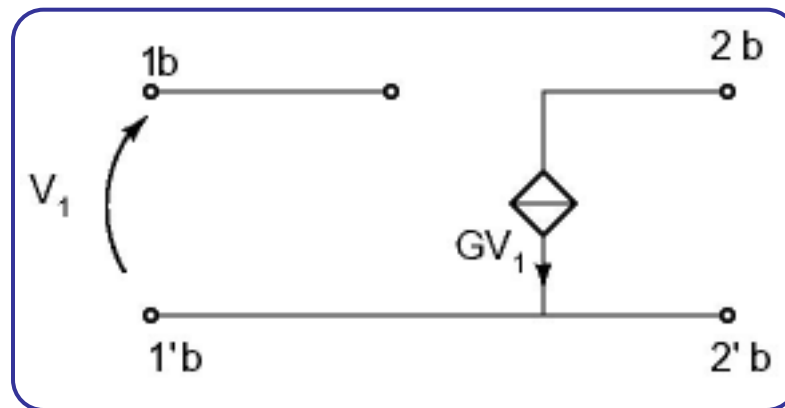


$$Y^a = \begin{vmatrix} 1.5 + 2.5s & -(0.5 + 0.5s) \\ -(0.5 + 0.5s) & 2.5 + s \end{vmatrix}$$

# Connessioni parallelo-parallelo

## Esempio 3

- Per il doppio bipolo in basso si ha:



$$Y^b = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{vmatrix}$$

# Connessioni parallelo-parallelo

## Esempio 4

- Il doppio bipolo ottenuto dalla connessione parallelo-parallelo presenta una matrice di ammettenze che è la somma delle matrici di ammettenze

$$Y = Y^a + Y^b = \begin{vmatrix} 1.5 + 2.5s & -(0.5 + 0.5s) \\ G - (0.5 + 0.5s) & 2.5 + s \end{vmatrix}$$

# Connessioni parallelo-parallelo

## Esempio 4

- La matrice di trasmissione si ottiene utilizzando le formule di trasformazione:

$$T = \begin{vmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ -\frac{\det[Y]}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-5-2s}{1+2G+s} & -\frac{2}{1+2G+s} \\ -\frac{16+2G(1+s)+11s(3+s)}{2(1+2G+s)} & \frac{-3-5s}{1+2G+s} \end{vmatrix}$$

# Connessione in cascata

## Esempio 1

- I doppi bipoli A e B sono connessi in cascata.
- Il doppio bipolo B ha i seguenti parametri di impedenza:  $Z^b = \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$
- Il doppio bipolo complessivo ha i seguenti parametri di impedenza:  $Z = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$

Determinare i parametri di ammettenza e di impedenza del doppio bipolo A.

# Connessione in cascata

## Esempio 2

- Matrice di trasmissione  $T^b$  del doppio bipolo B:

$$T^b = \begin{vmatrix} \frac{Z_{11}^b}{Z_{21}^b} & \frac{\det[Z]}{Z_{21}^b} \\ 1 & \frac{Z_{22}^b}{Z_{21}^b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{20}{5} & \frac{20 \times 10 - 5 \times 5}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{10}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 35 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{vmatrix}$$

- Matrice di trasmissione  $T$  del doppio bipolo complessivo

$$T = T^a \cdot T^b = \begin{vmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det[Z]}{Z_{21}} \\ 1 & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{25}{5} & \frac{25 \times 10 - 5 \times 5}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{10}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 45 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{vmatrix}$$

# Connessione in cascata

## Esempio 3

- Matrice di trasmissione  $T^a$  del doppio bipolo A:

$$T^a = T \cdot (T^b)^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & 45 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 35 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



# Connessione in cascata

## Esempio 4

- Parametri  $Y^a$  del doppio bipolo A

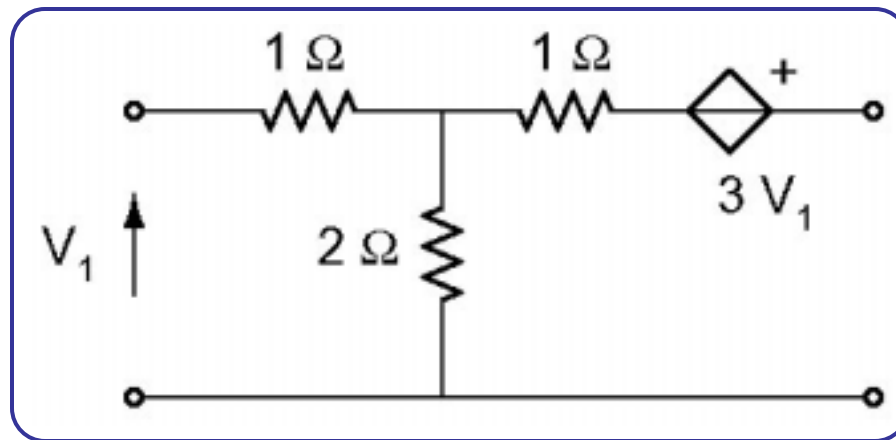
$$Y^a = \begin{vmatrix} \frac{D^a}{B^a} & -\frac{\det[T^a]}{B^a} \\ -\frac{1}{B^a} & \frac{A^a}{B^a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \quad T^a = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Parametri  $Z^a$  del doppio bipolo A

$$Z^a = \begin{vmatrix} \frac{A^a}{C^a} & \frac{\det[T^a]}{C^a} \\ \frac{1}{C^a} & \frac{D^a}{C^a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{vmatrix} \quad \text{non esistono !}$$

# Esercizi proposti 1

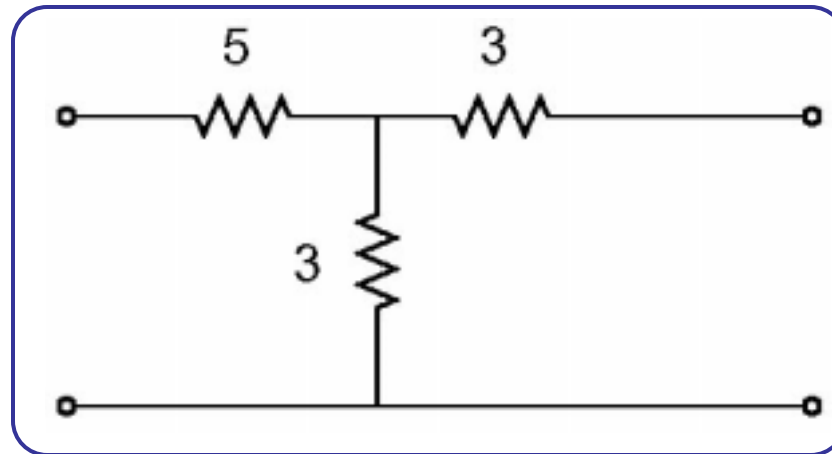
- Determinare i parametri Z del doppio bipolo indicato



- Risposta  $Z = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} [\Omega]$

# Esercizi proposti 2

- Determinare i parametri Y del doppio bipolo indicato

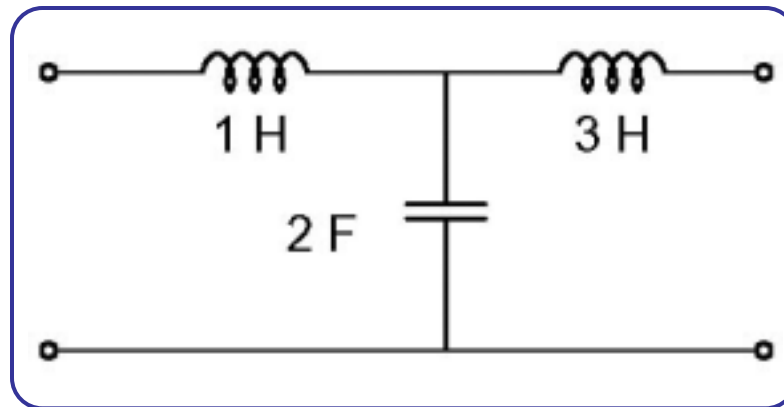


- Risposta

$$Y = \begin{vmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{8}{39} \end{vmatrix} [S]$$

# Esercizi proposti 3

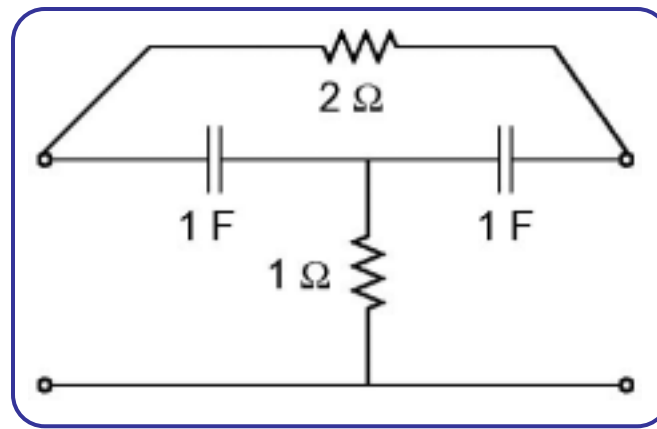
- Determinare i parametri di impedenza  $Z(s)$  del doppio bipolo indicato



- Risposta 
$$Z(s) = \begin{vmatrix} \frac{2s^2 + 1}{2s} & \frac{1}{2s} \\ \frac{1}{2s} & \frac{6s^2 + 1}{2s} \end{vmatrix} [\Omega]$$

# Esercizi proposti 4

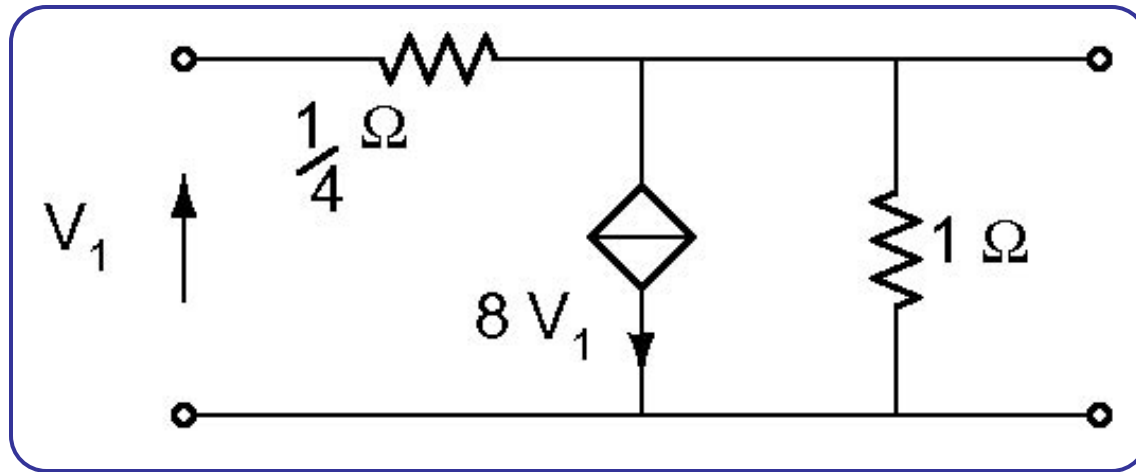
- Determinare i parametri di ammettenza  $Y(s)$  del doppio bipolo indicato



- Risposta 
$$Y(s) = \begin{vmatrix} \frac{2s^2 + 4s + 1}{2(2s + 1)} & -\frac{2s^2 + 4s + 1}{2(2s + 1)} \\ -\frac{2s^2 + 4s + 1}{2(2s + 1)} & \frac{2s^2 + 4s + 1}{2(2s + 1)} \end{vmatrix} [\Omega]$$

# Esercizi proposti 5

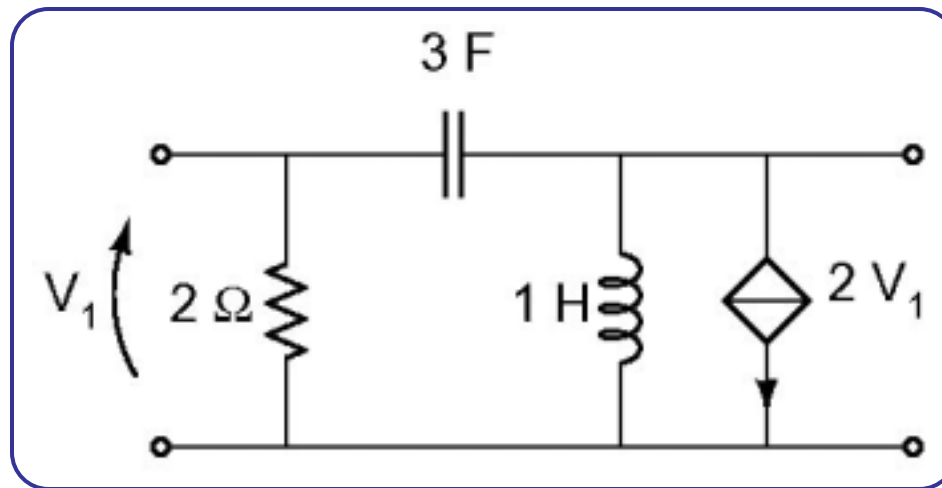
- Determinare i parametri Y di ammettenza del doppio bipolo indicato



- Risposta  $Y = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} [S]$

# Esercizi proposti 6

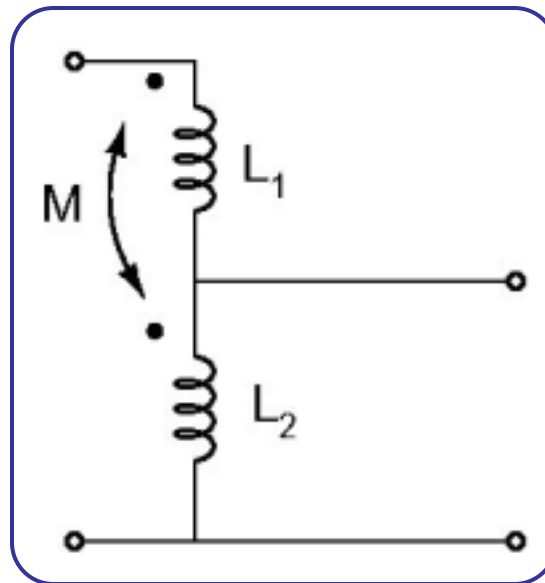
- Determinare i parametri Y di ammettenza del doppio bipolo indicato



- Risposta 
$$Y(s) = \begin{vmatrix} \frac{1+6s}{2} & -3s \\ 2-3s & \frac{3s^2+1}{s} \end{vmatrix} [S]$$

# Esercizi proposti 7

- Determinare i parametri di impedenza  $Z(s)$  del doppio bipolo indicato

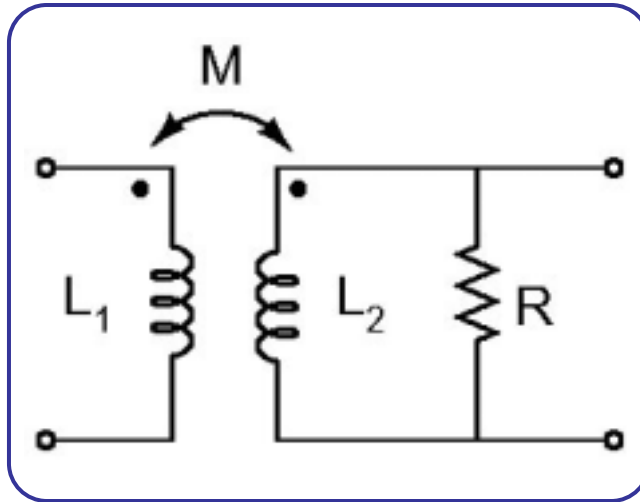


- **Risposta**  $Z(s) = \begin{vmatrix} (L_1 + L_2 + 2M)s & (L_2 + M)s \\ (L_2 + M)s & sL_2 \end{vmatrix}$



# Esercizi proposti 8

- Determinare i parametri di impedenza  $Z$  del doppio bipolo indicato funzionante in regime sinusoidale



$$\omega L_1 = \omega L_2 = 20 \Omega$$

$$\omega M = 10 \Omega$$

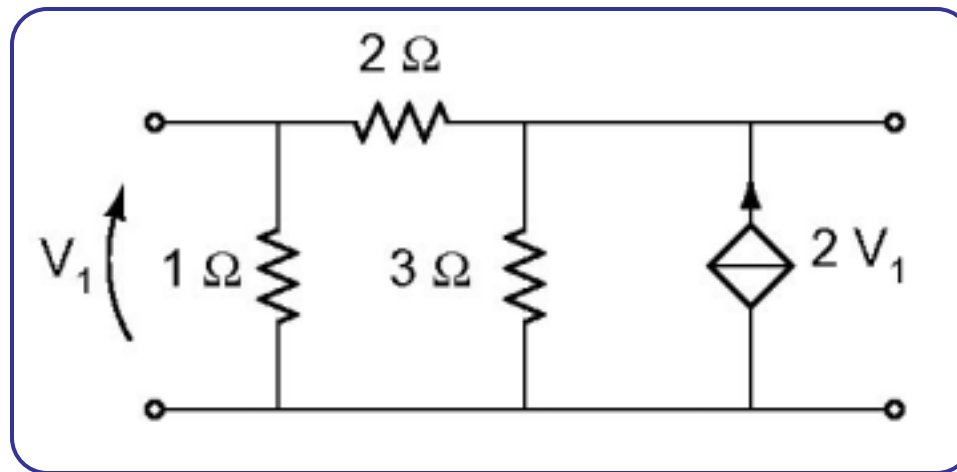
$$R = 20 \Omega$$

- Risposta

$$Z = \begin{vmatrix} 2.5 + j17.5 & 5 + 5j \\ 5 + 5j & 10 + j10 \end{vmatrix} [\Omega]$$

# Esercizi proposti 9

- Determinare i parametri ibridi  $h$  del doppio bipolo indicato

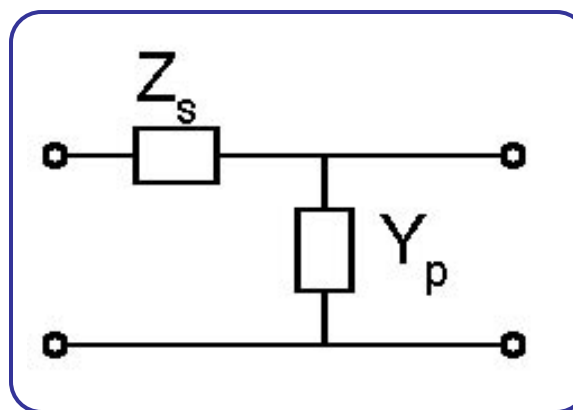


- Risposta

$$h = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix}$$

# Esercizi proposti 10

- Un doppio bipolo è costituito dalla cascata di tre doppi bipoli (celle) uguali a quello indicato in figura

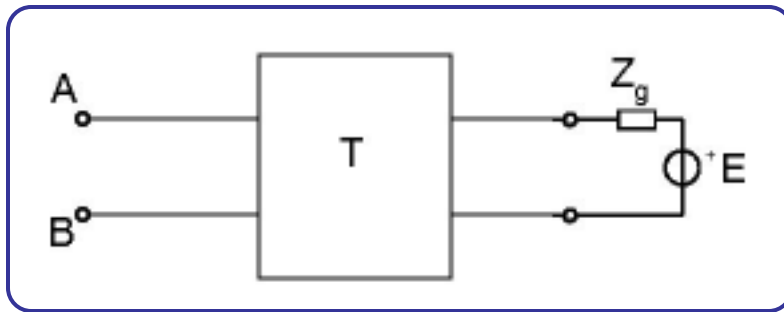


- Determinare la matrice di trasmissione della cascata

- Risposta 
$$\begin{vmatrix} 1 + Y_p Z_s (2 + Y_p Z_s)(3 + Y_p Z_s) & Z_s (1 + Y_p Z_s)(3 + Y_p Z_s) \\ Y_p (1 + Y_p Z_s)(3 + Y_p Z_s) & 1 + Y_p Z_s (3 + Y_p Z_s) \end{vmatrix}$$

# Esercizi proposti 11

- Rappresentare con thevenin il bipolo indicato in figura. Il doppio bipolo è caratterizzato dalla matrice di trasmissione T



$$T = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

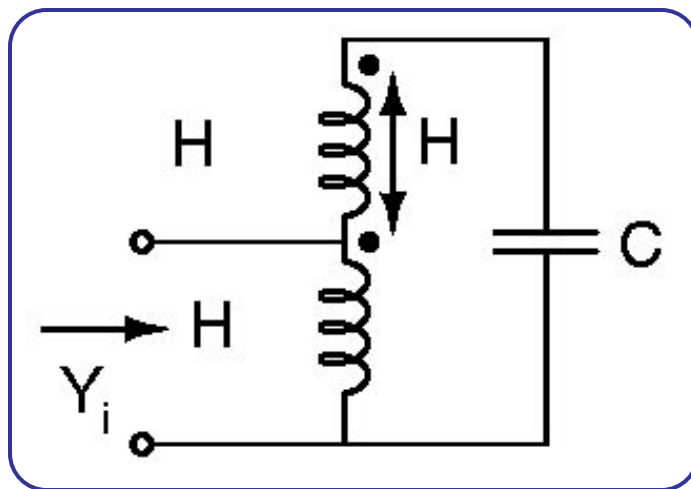
- Risposte

– Tensione a vuoto con il più verso A:  $V_o = \frac{AD - BC}{D + CZ_g}$

Lezione 21 Impedenza equivalente:  $Z_e = \frac{AZ_g + B}{CZ_g + D}$

# Esercizi proposti 12

- Determinare la capacità  $C$  in modo che l'ammettenza di ingresso  $Y_i$  del bipolo funzionante in regime sinusoidale con  $f=20\text{MHz}$  sia nulla



- Risposta  $C=7.916 \text{ pF}$