

Bozze di Esercizi

Indice

1	Sistemi di unità di misura	1
2	Analisi dell'incertezza	11
3	Impedenze meccaniche	25
4	Prestazioni statiche degli strumenti	39
5	Prestazioni dinamiche degli strumenti	53
6	Analisi dei segnali tempovarianti	109
7	Elaborazione delle immagini	117
8	Estensimetri elettrici a resistenza metallici	127
	Appendici	139
A	Esempi di domande di teoria	141
B	Realizzazione dei diagrammi di Bode con Matlab	143
	Indice degli esercizi	147

Capitolo 1

Sistemi di unità di misura

Nel corso della storia i sistemi di unità di misura utilizzati dall'uomo nel mondo sono innumerevoli e di conseguenza in passato la necessità di operare conversioni un'operazione irrinunciabile praticamente in ogni attività.

In tale contesto l'importanza dell'adozione di un sistema di unità di misura universalmente accettato – il Sistema Internazionale (SI¹) – è più che evidente. In Italia l'uso del SI è stato adottato ufficialmente per legge e il suo utilizzo è obbligatorio nella stesura di atti e documenti con valore legale. Pertanto il mancato rispetto delle norme di scrittura potrebbe comportare l'invalidazione di tali atti.

Attualmente a livello mondiale si è tuttora in fase di passaggio, poiché il Sistema imperiale britannico² ma soprattutto il Sistema consuetudinario USA³ sono ancora abbastanza utilizzati (si tratta indubbiamente di una rivoluzione culturale di un certo peso per la popolazione di tali paesi, ben superiore all'unificazione monetaria avvenuta con la circolazione fisica dell'Euro il 1 gennaio 2002).

Ne segue che la capacità di passare da certe unità di misura ad altre è ancor'oggi, nonostante tutto, una conoscenza che deve far parte del bagaglio di competenze di un ingegnere, al pari della corretta scrittura delle unità di misura.

Considerando questa seconda questione giova ricordare che, a seguito dell'adozione del SI, alcune unità si trovano a essere fuori sistemi legali, ammesse a titolo transitorio o non più ammesse. E' importante operare le dovute correzioni in fase di aggiornamento di relazioni e/o documenti tecnici ed evitarne l'uso nella stesura dei nuovi elaborati.

¹La dizione completa è Sistema internazionale di unità di misura (in lingua francese *Système international d'unités*); è abbreviata in SI che si pronuncia “esse i”. Il SI viene spesso indicato come “sistema metrico”, soprattutto nei paesi anglosassoni.

²Tale sistema è stato utilizzato ufficialmente in Inghilterra fino al 1995.

³Con l'*Omnibus Trade and Competitiveness Act* del 1988, il Governo degli Stati Uniti ha definito il Sistema Internazionale “the preferred system of weights and measures for U.S. trade and commerce” (il sistema preferibile di pesi e misure per il commercio e gli scambi americani). Preferibile chiaramente non vuol dire obbligatorio per legge. Oltre agli Stati Uniti d'America le altre due nazioni in cui il SI non è stato adottato come principale o unico sistema di misurazione sono attualmente la Liberia e la Birmania.

A titolo d'esempio, la tonnellata, il quintale, il chilogrammo-forza, l'atmosfera, l'atmosfera tecnica, il millimetro di mercurio, il millimetro d'acqua, sono unità che non fanno parte del SI, ma alcune sono ancora d'uso frequente.

Tra le unità non SI accettate per essere usate con il Sistema Internazionale (in quanto il loro uso è tutt'oggi molto diffuso nell'intera popolazione e pertanto l'uso ne è tollerato per agevolare la comprensione di ricerche al vasto pubblico) si hanno certe unità di tempo (minuto, ora, giorno, anno) e le unità di angoli (grado, minuto primo e minuto secondo), il litro e la tonnellata.

Tra le unità non SI il cui uso è scoraggiato si citano l'ara, l'ettaro e il bar.

Esercizio 1. Verificare se le frasi che seguono sono corrette e in caso contrario correggere gli errori.

1. La rete ferroviaria italiana è alimentata in corrente continua con tensione nominale di 3000 Volts. In una locomotiva elettrica l'intensità di corrente in gioco può anche essere di alcune centinaia di ampère.
2. Si è potuto constatare che il termometro a termocoppia con costante di tempo di 6.3 ± 1.3 sec. è più adatto a misurare fenomeni dinamici con periodo dell'ordine di 200 s., ma che il termometro a resistenza compie un errore massimo di 2.3 °C in corrispondenza dell'accensione della termoresistenza.
3. Mediante un multimetro si è misurata la resistenza di carico R_0 a interruttore aperto ottenendo $R_0 = 1010 \pm 10 \Omega$.
4. Valori comuni per la resistenza degli estensimetri elettrici a resistenza metallici vanno da 100Ω a $1 K\Omega$, ma molto frequentemente si usano estensimetri aventi una resistenza di 120Ω .
5. La potenza elettrica dichiarata dal Gestore della centrale con tutti e 4 i gruppi in piena efficienza è di 1.1 kW.
6. "Attenzione: portata massima Kg 500."
7. Il generatore utilizzato è in grado di generare potenza sonora a 50, 60, 70, 80 e 90 DB alle frequenze di 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000 e 8000 Hz.
8. Alla pressione di 101325 Pa (14.7 psi) la temperatura di ebollizione dell'ossigeno puro è di 90,19 °K.
9. L'aria secca ha massa molecolare equivalente M_a pari a $28.97 \text{ kg kmol}^{-1}$ e viene spesso trattata come gas ideale con costante caratteristica $R_a = R/M_a = 287.0 \text{ J/kgK}$ essendo R la costante universale dei gas.
10. Si assume in questa sede l'incertezza si misura, relativa al calibro millesimale Microcal della Sylvac, fornita dal costruttore che vale $\pm 3.5 \mu\text{m}$ per temperature di lavoro comprese tra +5 e +40 °C.

Soluzione

1. Scrivere "Volts" e "ampère" è errato.

I nomi delle unità di misura non hanno plurale, sono privi di accenti e vanno scritti in minuscolo. Pertanto la scrittura corretta del nome dell'unità SI associata alla differenza di potenziale elettrico è volt. In alternativa si può usare il simbolo V, da cui 3000 V o, meglio, 3 kV. Per l'intensità di corrente il nome dell'unità S.I. è ampere con simbolo A.

2. Elementi errati: “sec.”, “s.” e “C”.

Il simbolo S.I. del secondo è s, dei gradi celsius °C. Si osservi che C è il simbolo del coulomb, ossia della carica elettrica, cosicché omettere il simbolo ° in questo caso fa associare al valore numerico un’unità di misura diversa! I simboli poi non devono essere seguiti dal punto, salvo che si trovino alla fine del periodo.

3. Corretta.

4. “1KΩ” è errato.

Il prefisso chilo ha per simbolo k, non K (che è il simbolo dei gradi kelvin). *Si tratta di un errore piuttosto frequente che deve essere evitato!* La scrittura corretta è 1kΩ.

5. “kMW” è errato.

Un solo prefisso moltiplicativo può precedere l’unità di misura. Per indicare correttamente le migliaia di milioni dell’unità di potenza watt si usa il multiplo successivo al mega, che è il giga con simbolo G. Quindi la scrittura corretta è 1.1 GW.

6. “Kg 500” non è corretto.

I simboli seguono i valori numerici e i prefissi vanno scritti correttamente. Quindi 500 kg.

7. Elementi errati: “DB” e “hz”.

I simboli corretti sono dB e Hz.

8. La scrittura “°K” è sbagliata.

Il “°” non deve essere scritto per i gradi kelvin. Si noti invece la scrittura corretta “101325 Pa (14.7 psi)”. Infatti eventuali valori equivalenti espressi in altre unità di misura devono essere scritti tra parentesi dopo il valore espresso in unità S.I. laddove sia importante ai fini della comprensione dei dati.

9. “J/kg K” è scrittura ambigua (K è a denominatore o a numeratore?).

In casi del genere, che vanno evitati, anche se qui la corretta collocazione di K può essere facilmente dedotta, o si adottano le parentesi, J/(kg K), oppure si usano gli esponenti negativi, $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

10. Corretta

Esercizio 2. *Correggere la seguente frase giustificando le correzioni.*

“Vengono eseguite le seguenti misure:

temperatura ambiente 295 °K,

massa di Kgm 12,45 applicata al sistema per un tempo di 12 sec,

forza risultante nel potenziometro di 21,1 n.

Risulta quindi che la pressione esercitata sulla trave vale 12,44 n/mm².

(Si ricorda che la temperatura di 295 gradi Kelvin corrisponde a 21,84 gradi Celsius)”

Soluzione

Nel testo ci sono gli errori di seguito evidenziati:

“Vengono eseguite le seguenti misure:

temperatura ambiente 295 \square K,

massa di $\square Kgm$ 12,45 applicata al sistema per un tempo di 12 $\square sec$,

forza risultante nel potenziometro di 21,1 $\square n$.

Risulta quindi che la pressione esercitata sulla trave vale 12,44 $\square n/mm^2$.

(Si ricorda che la temperatura di 295 gradi $\square Kelvin$ corrisponde a 21,84 gradi $\square Celsius$)”

- Il simbolo dei gradi kelvin è senza “°”;
- L’unità di misura segue il valore numerico e va scritta con i simboli corretti. Nel caso specifico l’unità grammi ha per simbolo “g” e non “gm” e il prefisso chilo va con la k minuscola;
- Il simbolo SI del secondo è “s”, non sec;
- Il simbolo SI del newton è “N”, non n;
- E’ presente l’errore sulla scrittura del simbolo del newton. La pressione ha per unità SI il pascal, simbolo Pa. Nei calcoli ingegneristici è molto frequente l’utilizzo dell’unità N/mm^2 per esprimere le tensioni (che sono omogenee a una pressione). Si può facilmente dimostrare che $1 N/mm^2 = 1 MPa$. Sarebbe allora opportuno utilizzare il MPa, eventualmente riportando tra parentesi la notazione N/mm^2 al solo scopo di dare maggiore chiarezza al valore scritto, come fatto.
- I nomi delle unità di misura vanno scritti senza iniziale maiuscola (e senza accenti).

Il testo corretto è dunque il seguente:

“Vengono eseguite le seguenti misure:

temperatura ambiente 295 K,

massa di 12,45 kg applicata al sistema per un tempo di 12 s,

forza risultante nel potenziometro di 21,1 N.

Risulta quindi che la pressione esercitata sulla trave vale 12,44 MPa (N/mm^2).

(Si ricorda che la temperatura di 295 gradi kelvin corrisponde a 21,84 gradi celsius)”

Esercizio 3. Indicare il numero di cifre significative (c.s.) nei seguenti valori numerici

1) 1.345; 2) 0.0872; 3) 1.450; 4) 0.0650; 5) 23400.0; 6) 23400; 7) $2.3400 \cdot 10^4$

Soluzione

1. Le c.s. sono 4, infatti tutti i numeri sono differenti da zero;
2. Le c.s. sono 3, dal momento che i primi due zeri non sono significativi;
3. Le c.s. sono 4, visto che anche lo zero è significativo essendo alla fine del numero;
4. Le c.s. sono 3, infatti l'ultimo zero è significativo, mentre i primi due no;
5. Le c.s. sono 6, poiché tutti gli zeri lo sono;
6. Le c.s. sono almeno 3, tuttavia non è possibile sapere se gli zeri che seguono sono significativi oppure no. E' preferibile evitare questa indeterminatezza usando la notazione scientifica;
7. Le c.s. sono 5. Si noti come questa notazione elimini l'indeterminatezza sul numero delle c.s. del valore numerico precedente.

Esercizio 4. *Riportare il risultato delle seguenti operazioni con un numero corretto di cifre significative (c.s.)*

1) $4.3821 + 0.5 + 4.31 + 0.8491 = 10.04$

2) $2.873 + 14.28 + 0.17859 = 17.33159$

3) $174.8 - 91.08 + 14.175 = 97.895$

4) $24.862 \times 8.72 = 216.79664$

5) $643.85 \times 0.872 \times 1.2 = 673.72464$

6) $7.255 : 81.334 = 0.089200088$

7) $8.325 : (14.82 \times 1.2) = 0.468117408$

8) $3,450 \cdot 10^{-3} : 0.20 \cdot 10^{-4} = 1.725 \cdot 10^2$

9) $\sqrt{(0.01 \cdot 0.324)^2 + (0.05 \cdot 0.2233)^2 + (0.001 \cdot 0.0078)^2} = 0.011625613$

Soluzione

1. 10.0. Questo perché il valore meno accurato ha una sola cifra dopo la virgola;
2. 17.33. I decimali da conservare sono 2, infatti 14,28 è il valore meno accurato;
3. 97.9. I decimali da conservare sono solamente 1, poiché 174,8 ha un solo decimale;
4. 217. Le c.s. sono 3;
5. $6.7 \cdot 10^2$. Per il fattore 1,2 le c.s. sono 2;
6. $8.920 \cdot 10^{-2}$. Infatti le cifre significative del fattore meno accurato sono 4;
7. 0.47. Le c.s. da considerare nel risultato sono 2.

8. 1.7×10^2

9. 0.01.

D'ora in poi negli esercizi proposti si dà per scontata l'effettuazione di volta in volta della verifica di coerenza dei risultati in relazione al numero delle cifre significative con cui sono caratterizzati i dati di partenza. Questa continua verifica è parte integrante del percorso risolutivo di un problema applicativo e della elaborazione di relazioni, documenti, presentazioni, ecc.

Esercizio 5. Convertire i seguenti dati nel SI

$m = 0.0100 \text{ lb}$; $M = 1.00 \text{ oz}$; $l = 5.45 \text{ ft}$; $D = 2.80 \text{ inch}$; $A = 15.6 \text{ inch}^2$;
 $P = 55.6 \text{ BTU}$; $X = 2.75 \text{ HP}$; $Y = 2.75 \text{ CV}$;
 $T = 122^\circ \text{F}$

Soluzione

Tenendo conto dei seguenti valori di conversione nel SI

$1 \text{ lb} = 0.453 \text{ kg}$; $1 \text{ oz} = \frac{1}{16} \text{ lb}$
 $1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$; $1 \text{ inch} = 25.4 \text{ mm} = \frac{1}{12} \text{ ft}$
 $1 \text{ BTU} = 1055.06 \text{ J}$
 $1 \text{ HP} = 745.7 \text{ W}$; $1 \text{ CV} = 735.499 \text{ W}$

e delle cifre significative, si ha

$m = 0.0100 \text{ lb} \times 0.453 \frac{\text{kg}}{\text{lb}} = 4.53 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 4.53 \text{ g}$
 $M = 1.00 \text{ oz} \times \frac{1}{16} \frac{\text{lb}}{\text{oz}} \times 0.453 \frac{\text{kg}}{\text{lb}} = 2.831 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 28.3 \text{ g}$
 $l = 5.45 \text{ ft} \times 0.3048 \frac{\text{m}}{\text{ft}} = 1.66 \text{ m}$
 $D = 2.80 \text{ inch} \times 25.4 \frac{\text{mm}}{\text{inch}} = 71.12 \text{ mm} = 71.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 $A = 15.6 \text{ inch}^2 \times 25.4^2 \left(\frac{\text{mm}}{\text{inch}}\right)^2 = 1.01 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$
 $P = 55.6 \text{ BTU} \times 1055.06 \text{ J/BTU} = 58661.1 \text{ J} = 58.7 \text{ kJ}$
 $X = 2.75 \text{ HP} \times 745.7 \text{ W/HP} = 2050.675 \text{ W} = 2.05 \text{ kW}$
 $Y = 2.75 \text{ CV} \times 735.499 \text{ W/CV} = 2022.62225 = 2.02 \text{ kW}$

Si presti attenzione a non confondere tra di loro i valori dei fattori di conversione a watt per HP e CV.

In passato sono state concepite parecchie scale termometriche. Quelle che ebbero maggiore diffusione furono 3: Fahrenheit (1714), Réaumur (1720), Celsius (1742), cui si aggiunsero le scale assolute Kelvin (1847) e Rankine (1860). Si ricorda che l'intervallo $0^\circ \text{C} - 100^\circ \text{C}$ viene diviso in 180 gradi nella scala Fahrenheit e che lo zero in gradi celsius corrisponde a 32°F ⁴. Da ciò si ricava la relazione

⁴Si osservi che questo valore non influenza il numero di cifre significative con cui alla fine viene espresso il risultato. Si tratta infatti di un valore esatto, ossia di un valore numerico che in realtà va considerato con un numero di c.s. grande quanto si vuole. In altre parole questo valore deve intendersi scritto come 32.000... °F con un numero di zeri significativi pari alle cifre significative del dato, il che equivale per l'appunto a dire che esso non dà alcuna influenza sul numero di cifre dopo la virgola con cui alla fine sarà espresso il risultato.

$T(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} \times T(^{\circ}\text{C}) + 32$
 e da questa quella inversa
 $T(^{\circ}\text{C}) = \frac{5}{9} \times (T(^{\circ}\text{F}) - 32)$.
 Di conseguenza
 $\frac{5}{9} \times (122-32) = 50.0^{\circ}\text{C}$

Esercizio 6. Convertire i seguenti dati nel SI

$$K = 1000.00 \text{ lbf/ft}; \quad g = 32.17 \text{ ft/s}^2; \quad p = 14.696 \text{ lbf/in}^2$$

Soluzione

Convienne per prima cosa scrivere i fattori di conversione tra le varie unità. Essi sono:

$$1 \text{ lbf} = 4.448 \text{ N}$$

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}; \quad 1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$$

Dopodiché il modo di procedere è il seguente (il controllo dimensionale è essenziale per evitare di utilizzare erroneamente il reciproco del fattore di conversione corretto):

$$K = 1000.00 \text{ lbf/ft} = 1000.00 \times \frac{4.448 \text{ N/lbf}}{0.3048 \text{ m/ft}} = 14600 \text{ N/m}$$

$$g = 32.17 \text{ ft/s}^2 \times 0.3048 \text{ m/ft} = 9.805 \text{ m/s}^2$$

$$p = 14.7 \text{ lb/in}^2 \times \frac{4.448 \text{ kg/lb}}{0.0254^2 \text{ (m/in)}^2} = 101 \text{ N/m}^2 = 101 \text{ Pa}$$

Esercizio 7. La costante di tempo τ di un termometro ha l'espressione seguente:

$$\tau = \frac{\rho c V}{\alpha A}$$

Siano dati $\alpha = 100.0 \text{ BTU/(h ft}^2 \text{ }^{\circ}\text{F)}^{-1}$ $A = 0.250 \text{ inch}^2$ $\rho = 8100 \text{ kg/m}^3$
 $V = 0.010 \text{ inch}^3$ $c = 400 \text{ J/(kg K)}$. Determinare il valore di τ in secondi.

Soluzione

Con i fattori di conversione

$$1 \text{ BTU} = 1055.06 \text{ J}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}; \quad 1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1^{\circ}\text{F} = \frac{5}{9} \text{ K}$$

si ottiene (nei calcoli intermedi giova tenere una cifra significativa in più)

$$\alpha = 100.0 \frac{\text{BTU}}{\text{h ft}^2 \text{ }^{\circ}\text{F}} \times \frac{1055.06 \text{ J/BTU}}{3600 \text{ s/h} \cdot 0.3048^2 \text{ m}^2/\text{ft}^2 \cdot 5/9 \text{ K/}^{\circ}\text{F}} = 567.83 \frac{\text{J}}{\text{s m}^2 \text{ K}}$$

$$A = 0.250 \text{ in}^2 \times 0.0254^2 \text{ m}^2/\text{in}^2 = 1.6129 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$V = 0.010 \text{ in}^3 \times 0.0254^3 \text{ m}^3/\text{in}^3 = 1.639 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$$

e quindi

$$\tau = \frac{8100 \cdot 400 \cdot 1.639 \cdot 10^{-7}}{567.83 \cdot 1.6129 \cdot 10^{-4}} = 5.8 \text{ s}$$

Esercizio 8. La frequenza fondamentale di oscillazione ν_{01} di una membrana circolare uniformemente tesa è data dalla relazione

$$\nu_{01} = \frac{2.40}{\pi D} \sqrt{\frac{T}{M}}$$

Siano $D = 23.64 \text{ in}$; $T = 19.2 \text{ lbf/ft}$; $M = 2,138 \cdot 10^{-4} \text{ lb/in}^2$. Determinare il valore di ν_{01} nel SI.

Soluzione

Nel Sistema Internazionale la frequenza ha per unità $s^{-1} = \text{Hz}$. Per determinare il valore di ν_{01} i dati vanno evidentemente espressi in unità SI e per far ciò conviene per prima cosa scrivere i fattori di conversione tra le varie unità. Essi sono:

$$1 \text{ lb} = 0.453 \text{ kg}$$

$$1 \text{ lbf} = 4.448 \text{ N}$$

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}; \quad 1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$$

Da questi seguono i valori dei dati nel SI (tenendo nei calcoli intermedi una cifra significativa in più)

$$D = 23.64 \text{ in} \times 0.0254 \text{ m/in} = 0.6004 \text{ m}$$

$$T = 19.2 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}} \times \frac{4.448 \text{ N/lbf}}{0.3048 \text{ ft/m}} = 280.2 \text{ N/m}$$

$$M = 2.138 \cdot 10^{-4} \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \times \frac{0.453 \text{ lb/kg}}{0.0254^2 \text{ m}^2/\text{in}^2} = 0.1501 \text{ kg/m}^2$$

Non resta che sostituire i valori calcolati nella formula. Si ottiene

$$\nu_{01} = \frac{2.40}{\pi \cdot 0.6004} \sqrt{\frac{280.2}{0.1501}} = 55.0 \text{ Hz}$$

Esercizio 9. La costante di tempo τ di un termometro ha l'espressione seguente:

$$\tau = \frac{l \rho c V}{\lambda A}$$

$$\text{Siano dati } \lambda = 400.0 \text{ W/(m K)} \quad A = 0.250 \text{ in}^2 \quad \rho = 8100 \text{ kg/m}^3$$

$$V = 0.00100 \text{ in}^3 \quad c = 0.30 \text{ BTU/}({}^\circ\text{F lb}) \quad l = 1.0 \text{ inch. Determinare il valore di } \tau \text{ in secondi.}$$

Soluzione

Con i fattori di conversione

$$1 \text{ BTU} = 1055.06 \text{ J}$$

$$1 \text{ lb} = 0.453 \text{ kg}$$

$$1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}; \quad 1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ }^{\circ}\text{F} = \frac{5}{9} \text{ K}$$

si ottiene (nei calcoli intermedi giova tenere una cifra significativa in più)

$$c = 0.30 \frac{\text{BTU}}{\text{lb } ^{\circ}\text{F}} \times \frac{1055.06 \text{ J/BTU}}{0.453 \text{ kg/lb} \times \frac{5}{9} \text{ K/}^{\circ}\text{F}} = 1257.687 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$l = 1.0 \text{ in} \times 0.0254 \text{ m/in} = 0.0254 \text{ m}$$

$$A = 0.0100 \text{ in}^2 \times 0.0254^2 \text{ m}^2/\text{in}^2 = 6.4516 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$V = 0.00100 \text{ in}^3 \times 0.0254^3 \text{ m}^3/\text{in}^3 = 1.639 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$$

e quindi

$$\tau = \frac{8100 \cdot 0.0254 \cdot 1257.687 \cdot 1.639 \cdot 10^{-8}}{400 \cdot 6.4516 \cdot 10^{-6}} = 1.6 \text{ s}$$

Esercizio 10. La frequenza di vibrazione fondamentale ν_{01} di una campana tubolare in acciaio (densità $\rho = 489.4 \text{ lb/ft}^3$) lunga $L = 3.281 \text{ ft}$ è data dalla relazione:

$$\nu = \frac{3.56 \text{ K}}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Siano $K = 0.850 \text{ inch}$ ed $E = 30.5 \cdot 10^6 \text{ psi}$. Determinare il valore di ν nel SI.

Soluzione

Per calcolare il valore di ν in Hz i dati vanno espressi in unità SI. Convienne per prima cosa scrivere i fattori di conversione tra le varie unità, ricordando che psi = pound-force per square inch. Essi sono:

$$1 \text{ lb} = 0.453 \text{ kg}$$

$$1 \text{ lbf} = 4.448 \text{ N}$$

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} \quad 1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m};$$

Da questi seguono i valori dei dati nel SI (tenendo nei calcoli intermedi una cifra significativa in più)

$$L = 3.281 \text{ ft} \times 0.3048 \text{ m/ft} = 1.0000 \text{ m} \quad K = 0.850 \text{ in} \times 0.0254 \text{ m/in} = 2.159 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\rho = 489.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \times \frac{0.453 \text{ lb/kg}}{0.3048^3 \text{ m}^3/\text{ft}^3} = 7829 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 30.5 \cdot 10^6 \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} \times \frac{4.448 \text{ N/lbf}}{0.0254^2 \text{ m}^2/\text{in}^2} = 2.103 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Non resta che sostituire i valori calcolati nella formula. Si ottiene

$$\nu = \frac{3.56 \cdot 2.159 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1.0000^2 \text{ m}^2} \sqrt{\frac{2.103 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2}{7829 \text{ kg/m}^3}} = 398 \text{ Hz}$$

Capitolo 2

Analisi dell'incertezza

Nelle applicazioni numeriche sull'incertezza è anche richiesto l'utilizzo di valori del t di Student¹. In corrispondenza di una probabilità del 95% i valori assunti dal t di Student possono essere approssimati rispetto a quelli effettivi come riassunto in Tabella 2.1.

ν	t (P=95%)
1	12.7
2	4.3
3	3.2
4	2.8
5	2.6
6÷7	2.5
8÷9	2.3
10÷13	2.2
14÷27	2.1
28÷60	2.0

Tabella 2.1

La massima differenza tra un t (P%) di Student approssimato a una sola cifra decimale e il corrispondente t^* “vero” è in valore assoluto pari a 0,05 (cioè pari all'errore di approssimazione) e si può osservare che l'errore relativo nel peggiore dei casi rimane comunque inferiore al 2.5%, valore del tutto irrilevante ai fini del calcolo dell'incertezza nel contesto delle più comuni problematiche di tipo ingegneristico.

¹In genere i libri che trattano questa materia offrono al lettore una tavola dei valori del t di Student per varie probabilità. Laddove tale tavola mancasse, è sufficiente effettuare in rete una semplice ricerca per procurarsela. Tuttavia è importante abituarsi a stimare l'incertezza assumendo per t (in corrispondenza di una probabilità del 95%) un valore “ragionevole”, seppur approssimato, visto che non sempre la tabella del t di Student è a portata di mano. E' per tale motivo che qui non si farà alcun riferimento ai valori esatti di t tabulati.

A titolo d'esempio, si immagini che, effettuate $n=15$ misurazioni del diametro di una barra retta circolare d'acciaio bonificato, si abbia uno scarto tipo $s=0.1$ mm. Dalla tabella con i dati della distribuzione di Student per $P=95\%$ e $\nu=14$ si legge $t^*=2.145$ (da cui $t=2.1$). Le incertezze di ripetibilità i_d associate al diametro d della barra d'acciaio utilizzando t^* e t risultano rispettivamente

$$i_d = \frac{st^*}{\sqrt{n}} = \frac{0.1 \cdot 2.145}{\sqrt{15}} = 0.055 \text{ mm} \quad i_d = \frac{st}{\sqrt{n}} = \frac{0.1 \cdot 2.2}{\sqrt{15}} = 0.057 \text{ mm}$$

ossia pressoché identiche dal punto di vista pratico.

Per quanto riguarda la problematica di formulare un giudizio di accettazione dei dati acquisiti in base a considerazioni statistiche (criterio di Chauvenet), può tornar utile tenere a mente le seguenti considerazioni per una scrematura di massima dei dati a volte già sufficiente, laddove non si abbiano a portata di mano i valori precisi degli scarti ridotti limite:

- per $n \leq 8$ se il valore assoluto di qualche scarto ridotto supera il valore 1.9, i relativi dati sono sicuramente da scartare;
- per $n \leq 10$ se il valore assoluto di qualche scarto ridotto supera il valore 2.0, i relativi dati sono sicuramente da scartare;
- per $n \leq 20$ se il valore assoluto di qualche scarto ridotto supera il valore 2.25, i relativi dati sono sicuramente da scartare;

n	p	F(z)	Z_{lim}
5	0.9000	0.950	1.65
6	0.9167	0.958	1.73
8	0.9375	0.969	1.86
10	0.9500	0.975	1.96
20	0.9750	0.9872	2.24
50	0.9900	0.9950	2.58
100	0.9950	0.9972	3.02
500	0.9990	0.9995	3.28
1000	0.9995	0.99972	3.46

Tabella 2.2

Quanto appena osservato deriva dalla Tabella 2.2 che contiene alcuni valori dello scarto ridotto limite.

Esercizio 11. Nella misura di velocità in una serie di 20 misure, che si è verificato avere distribuzione normale, con media 6.3 m/s e deviazione standard 1.2 m/s, sono contenuti i seguenti dati in m/s:

7.5; 6.8; 8.0; 6.5; 5.3; 7.4; 8.6;

Applicando il criterio di Chauvenet, determinare quali valori eventualmente si devono escludere.

Soluzione

Si ricorda che per poter applicare il criterio di Chauvenet condizione necessaria è che sia verificata l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei dati, ipotesi che in questo caso è espressamente garantita dal testo del problema. In questo modo è possibile formulare un giudizio di accettabilità o meno dei dati acquisiti in base a considerazioni di tipo statistico, ossia secondo un criterio oggettivo e non soggettivo.

La Tabella 2.3 riassume i calcoli che si devono svolgere sui dati al fine di applicare il suddetto criterio. In essa

$$z_i^* = \frac{v_i - \bar{v}}{s}$$

dove \bar{v} è la media del campione e s la deviazione standard.

Dal momento che i 7 valori forniti sono solo una parte della serie di 20 valori misurati, media e deviazione standard del campione sono qui dichiarate, tuttavia esse sono generalmente caratteristiche da calcolare.

v_i [m/s]	z_i^*
7.5	1.00
6.8	0.42
8.0	1.42
6.5	0.17
5.3	-0.83
7.4	0.92
8.6	1.92

La probabilità di Chauvenet è

Tabella 2.3

$$p_c = 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{20} = 0.975 \quad \Rightarrow \quad F(z_{lim}) = \frac{p_c + 1}{2} = 0.9875$$

e $z_{lim} = 2.24$.

In assenza della tabella con i valori precisi di z_{lim} , si può ricordare (vedi la Tabella 2.2 a pagina 12) che per $n=20$ $z_{lim} \approx 2.25$.

Poiché nessuno dei 7 $|z_i^*|$ è in questo caso superiore al valore limite z_{lim} calcolato, i dati esaminati sono di conseguenza tutti da tenere.

Esercizio 12. La temperatura di un ambiente, che si vuole rappresentare come a temperatura costante nel tempo e nello spazio, viene misurata ripetutamente (20 volte) in 6 punti fornendo i seguenti valori e scarti tipo (indicati entro parentesi) in °C.

30 (2); 35 (5); 28 (2); 29 (1); 34 (6); 32 (4);

Assegnare la temperatura all'ambiente con relativa incertezza.

Soluzione

Per assegnare la temperatura all'ambiente si può utilizzare semplicemente la media aritmetica tra i valori corrispondenti ai 6 punti di rilevazione. Per il calcolo della media aritmetica di una serie di N dati (temperature T_i) la formula è

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^N T_i$$

che in questo caso dà $\bar{T} = 31 \text{ }^\circ\text{C}$.

Per assegnare l'incertezza sul valore della temperatura dell'ambiente i_T si deve prima procedere al calcolo dell'incertezza associata a ciascuna delle 6 serie di valori frutto ciascuna di 20 misurazioni. La formula generale da utilizzare è

$$i = \frac{t \ s}{\sqrt{n}}$$

Nel caso specifico, essendo $n=20$ e assunto un livello di confidenza del 95%, si ha dalla Tabella 2.1 a pagina 11 $t=2.1$. Infatti i gradi di libertà sono $20-1=19$.

Poiché le deviazioni standard associate alle 6 serie di 20 misurazioni non sono tutte uguali, è necessario calcolare l'incertezza per ogni serie, applicando la relazione appena richiamata qui sopra. Si ha (tenendo nei calcoli intermedi una cifra significativa in più):

$$i_{T1} = \frac{2.1 \cdot 2}{\sqrt{20}} = 0.9 \text{ }^\circ\text{C} \quad i_{T2} = \frac{2.1 \cdot 5}{\sqrt{20}} = 2.3 \text{ }^\circ\text{C} \quad i_{T3} = \frac{2.1 \cdot 2}{\sqrt{20}} = 0.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$i_{T4} = \frac{2.1 \cdot 1}{\sqrt{20}} = 0.5 \text{ }^\circ\text{C} \quad i_{T5} = \frac{2.1 \cdot 6}{\sqrt{20}} = 2.8 \text{ }^\circ\text{C} \quad i_{T6} = \frac{2.1 \cdot 4}{\sqrt{20}} = 1.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

L'incertezza è ricavabile attraverso la legge di propagazione dell'incertezza o legge di Kline-McKlintock nel caso di grandezze in ingresso non correlate, ossia tramite la formula

$$i = \sqrt{\sum_{k=1}^N \theta_k^2 i_k^2} \quad (2.1)$$

nella quale si è indicato con θ_k il k -esimo coefficiente di sensibilità.

Nel caso in cui il misurando sia ottenuto come media aritmetica tra N valori in ingresso, la (2.1) assume la forma

$$i = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{k=1}^N i_k^2}$$

in quanto ogni $\theta_k=1$. E' quest'ultima la relazione che dev'essere qui utilizza per calcolare l'incertezza i_T associata alla temperatura dell'ambiente. Si ha

$$i_T = \frac{1}{6} \sqrt{\sum_{i=k}^6 i_{Tk}^2} = 1 \text{ }^\circ\text{C}$$

Tenendo quindi conto delle cifre significative, si ottiene $T = 31 \pm 1 \text{ } ^\circ\text{C}$ (95%)

Esercizio 13. *La relazione ingresso-uscita di una termocoppia viene espressa tramite la relazione seguente:*

$$V = K_1(T_1 - T_0) - K_2(T_1 - T_0)^2$$

$$K_1 = 3.993 \cdot 10^{-2} \pm 0.1\% \text{ mV/K}$$

$$K_2 = 0.5667 \cdot 10^{-5} \pm 0.1\% \text{ mV/}^\circ\text{F}^2$$

$$T_0 = 273.15 \pm 0.08 \text{ K}$$

$$T_1 = 122 \pm 1 \text{ } ^\circ\text{F}$$

Noto che l'incertezza di modello è dell'1%, determinare la tensione V e la relativa incertezza tramite la relazione di propagazione.

Soluzione

Si devono utilizzare il fattore di conversione $1 \text{ } ^\circ\text{F} = 5/9 \text{ K}$ e la relazione

$$\text{K} = \frac{5}{9}(\text{ } ^\circ\text{F} - 32) + 273.15.$$

Tenendo ovviamente conto delle cifre significative, si ha:

$$K_1 = (3.993 \pm 0.004) \cdot 10^{-2} \text{ mV/K}$$

$$K_2 = 0.5667 \cdot 10^{-5} \pm 0.5667 \cdot 10^{-9} \text{ mV/}^\circ\text{F}^2 \frac{1}{(\frac{5}{9})^2 (\frac{\text{K}}{^\circ\text{F}})^2} = (1.836 \pm 0.002) \cdot 10^{-5} \text{ mV/K}^2$$

$$T_1 = 122 \pm 1 \text{ } ^\circ\text{F} = \frac{5}{9}(122 - 32) + 273.15 \pm 5/9 \text{ K} = 323.15 \pm 0.56 \text{ K}$$

$$V = 3.993 \cdot 10^{-2} \times (323.15 - 273.15) + 1.836 \cdot 10^{-5} \times (323.15 - 273.15)^2 = 2.04 \text{ mV}$$

da cui segue un'incertezza di modello $i_m = 0.01 \times 2.04 = 0.02 \text{ mV}$.

L'incertezza i_V viene calcolata con la (2.1) a pagina 14 ossia con la legge di propagazione dell'incertezza o legge di Kline-McKlintock nel caso di grandezze in ingresso non correlate.

Nel caso qui in esame si ha

$$i_V = \sqrt{(\theta_{K1} i_{K1})^2 + (\theta_{K2} i_{K2})^2 + (\theta_{T1} i_{T1})^2 + (\theta_{T2} i_{T2})^2 + (i_m)^2}$$

in cui le espressioni dei coefficienti di sensibilità sono:

$$\theta_{K1} = \frac{\partial V}{\partial K1} = T_1 - T_0 \quad \theta_{T1} = \frac{\partial V}{\partial T1} = K_1 + 2K_2(T_1 - T_0)$$

$$\theta_{K2} = \frac{\partial V}{\partial K} = (T_1 - T_0)^2 \quad \theta_{T0} = \frac{\partial V}{\partial T0} = -K_1 - 2K_2(T_1 - T_0)$$

Sostituendo i valori, si ottiene $i_V = 0.031 \text{ mV}$ e quindi $V = 2.04 \pm 0.03 \text{ mV}$.

Esercizio 14. *Si determini la forza F nel Sistema Internazionale SI, con relativa incertezza e livello di confidenza, applicata ad un corpo di cui si misura la massa m e l'accelerazione a sapendo che:*

- l'incertezza di modello per la misura indiretta è dello 0,6%;

- la massa m viene misurata con uno strumento che ha un effetto sistematico di $+0.55 \pm 0.01$ kg_f ; il risultato dell'analisi statistica di 80 misurazioni, aventi distribuzione gaussiana e scarto quadratico pari a 0.03 kg_f , è 4.87 kg_f ;
 - l'accelerazione a viene misurata (in m/s^2) 7 volte con uno strumento che ha un'incertezza dichiarata dal costruttore ± 0.1 ; i valori misurati sono:

785.1; 785.5; 785.9; 785.2; 785.9; 788.2; 785.4

Le incertezze sono assegnate con un livello di confidenza del 95%.

Soluzione

Massa Per prima cosa si procede a correggere il valore medio della massa. Il valore della massa m corretto dall'effetto sistematico risulta $m = 4.87 - 0.55 = 4.32$ kg_f .

Poiché viene detto che le 80 misurazioni hanno distribuzione gaussiana, lo scarto quadratico deve essere moltiplicato per 2 se si fa riferimento, come espressamente richiesto, a un livello di confidenza del 95%. Ne segue che l'incertezza di ripetibilità i_{rm} associata alla massa è

$$i_{rm} = \frac{2 \cdot 0.03}{\sqrt{80}} = 0.0067 \text{ kg}_f$$

Questa incertezza dev'essere combinata quadraticamente con quella propria dell'effetto sistematico i_{sm} al fine di ottenere l'incertezza associata alla massa i_m . Si ha

$$i_m = \sqrt{i_{rm}^2 + i_{sm}^2} = \sqrt{0.0067^2 + 0.01^2} = 0.01 \text{ kg}_f$$

Accelerazione I 7 valori misurati sembrano contenere un dato (788.2) non attendibile.

Essendo pochi, non è facile controllare se la distribuzione sia gaussiana e quindi applicare il criterio di Chauvenet. Se tuttavia si ipotizzasse gaussiana la distribuzione, si avrebbe un valore di $Z_{lim} < 2$ (cfr. la Tabella 2.2 a pagina 12).

Scartando il valore 788.2 m/s^2 , la media dei 6 dati rimanenti è 785.5 m/s^2 e si ottengono i valori riportati in Tabella 2.4, cui corrisponde

$$s = \sqrt{\frac{0.58}{6-1}} = 0.34 \text{ m/s}^2$$

Si ottiene $788.2 - 785.5 = 2.7 > 0.7 = 0.34 \cdot 2$ che dimostra la fondatezza dell'esclusione del valore 788.2 m/s^2 .

a_i [m/s^2]	z_i [m/s^2]	z_i^2 [m^2/s^4]
785.1	-0.4	0.16
785.5	0.0	0.00
785.9	0.4	0.16
785.2	-0.3	0.09
785.9	0.4	0.16
785.4	-0.1	0.01
$\Sigma =$		0.58

Tabella 2.4

²Per la precisione si avrebbe $p_c = 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{14} = 0.92857$, cui corrisponde $F(Z) = 0.964286$ e $Z_{lim} = 1.8$.

A questo punto si procede al calcolo dell'incertezza i_a associata all'accelerazione, assumendo un livello di confidenza del 95%. Nel caso specifico si ha $\nu=5$ per i gradi di libertà e $t=2.6$ dalla Tabella 2.1. Quindi

$$i_a = \frac{2.6 \cdot 0.34}{\sqrt{6}} = 0.4 \text{ m/s}^2$$

Forza E' noto dalla Fisica che $F=ma$. Essendo però la massa espressa in chilogrammi-forza, bisogna operare una conversione per avere la forza F espressa in newton. Poiché $1 \text{ kg}_f = 9.80665 \text{ N}$, la relazione da utilizzare è $F=9.80665ma$, che fornisce

$$\overline{F} = 9.80665 \overline{m} \overline{a} = 9.80665 \cdot 4.32 \cdot 785.5 = 33277.5 \text{ N} = 33.3 \text{ kN}.$$

D'ora in poi per semplicità di scrittura i valori medi associati alle varie grandezze verranno indicati utilizzando semplicemente la lettera che li contraddistingue senza il simbolo di sopra segnato che di solito viene adottato appunto per indicare valori frutto di una media.

Per quanto riguarda la valutazione dell'incertezza sulla forza i_F si può utilizzare la (2.1), valida per grandezze in ingresso non correlate, cui viene aggiunto anche il termine relativo all'incertezza di modello $i_m=0.006$. A tale proposito vanno chiaramente prima determinate le espressioni dei coefficienti di sensibilità. Si ha

$$\theta_m = \frac{\partial F}{\partial m} = 9.80665a \quad \theta_a = \frac{\partial F}{\partial a} = 9.80665m$$

e quindi

$$i_F = \sqrt{(\theta_m i_m)^2 + (\theta_a i_a)^2 + (F i_m)^2} = 214.7 \text{ N} = 0.2 \text{ kN}$$

Allora $F=33.3 \pm 0.2 \text{ kN}$ (95%).

Si aggiunge che, a causa del ridotto numero di dati sull'accelerazione, sarebbe stato più corretto applicare la formula di Welch-Sattelwhite.

Esercizio 15. Qual è il volume di un parallelepipedo di lati A , B , C se si conosce quanto segue?

-a) si misura A 7 volte con uno strumento di misura avente incertezza di 0.05 u.m. (unità di misura) ottenendo i valori in unità u.m. :

125.35; 125.45; 125.20; 127.30; 125.30; 125.25; 125.55;

-b) $B = 425.26 \text{ u.m.}$ è il risultato di 100 misurazioni aventi varianza $0.65 (\text{u.m.})^2$;

-c) C viene misurato 5 volte con uno strumento di misura avente incertezza di 0.05 u.m. ottenendo:

475.75; 475.45; 475.20; 475.30; 475.25; (u.m.)

e viene misurato 3 volte con uno strumento di misura avente incertezza di 0,8 u.m. ottenendo:

$$476.25; \quad 476.45; \quad 476.20; \text{ (u.m.)}$$

-d) l'incertezza di modello parallelepipedo è pari al 5%.

Soluzione

A I 7 valori misurati sembrano contenere un dato (127,30) non attendibile.

Con soli 7 dati non è facile controllare se la distribuzione sia gaussiana e quindi applicare il criterio di Chauvenet. Se tuttavia si ipotizzasse gaussiana la distribuzione, applicando il criterio si calcolerebbe una probabilità $p_c=0.92857$, cui corrisponderebbe $Z_{lim}=1.8$ (vedi la Tabella 2.2), ossia un valore di poco inferiore a 2.

Scartando il valore 127.30 u.m., la media dei 6 dati rimanenti è 125.35 u.m. e si ottengono i valori riportati in Tabella 2.5, cui corrisponde

a_i [u.m.]	z_i [u.m.]	z_i^2 [u.m.] ²
125.35	0.0	0.0
125.45	0.1	0.01
125.20	-0.15	0.0225
125.30	-0.05	0.0025
125.25	-0.1	0.01
125.55	0.2	0.04
$\Sigma=$		0.085

Tabella 2.5

$$s_A = \sqrt{\frac{0.085}{6-1}} = 0.13 \text{ u.m.}$$

Si ottiene $127.30-125.35=1.95>0.26=0.13 \times 2$ che dimostra la fondatezza dell'esclusione del valore 127.30 u.m. Pertanto si assume $A=125.35$ u.m. e $s_A=0.13$ u.m.

A questo punto si procede al calcolo dell'incertezza i_A associata al lato A. Assumendo un livello di confidenza del 95%, nel caso specifico si ha $\nu=5$ per i gradi di libertà e $t=2.6$ dalla Tabella 2.1=2.571). Quindi

$$i_A = \frac{2.6 \cdot 0.13}{\sqrt{6}} = 0.14 \text{ u.m.}$$

B A una varianza di 0.65 (u.m.)^2 corrisponde uno scarto quadratico pari a 0.81 u.m. Dato il numero rilevante di misurazioni, l'incertezza i_B associata al lato B per un livello di confidenza del 95% è

$$i_B = \frac{2 \cdot 0.81}{\sqrt{100}} = 0.16 \text{ u.m.}$$

C La scelta di quale serie di dati sulla lunghezza C assumere deve basarsi ovviamente su un criterio oggettivo e questo prevede di confrontare fra loro le incertezze e di utilizzare la serie con minore incertezza.

A tale scopo per entrambe le serie vanno calcolate la media aritmetica, lo scarto quadratico medio e infine l'incertezza con livello di confidenza del 95% utilizzando il t della

media			C ₁	475,39 u.m.			
c _{1i} [u.m.]	z _{1i} [u.m.]	z _{1i} ² [u.m.] ²			media	C ₂	476.30 u.m.
475.75	0.36	0.1296			c _{2i} [u.m.]	z _{2i} [u.m.]	z _{2i} ² [u.m.] ²
475.45	0.06	0.0036			476.25	-0.05	0.0025
475.20	-0.19	0.0361			476.45	0.15	0.0225
475.30	-0.09	0.0081			476.20	-0.1	0.01
475.25	-0.14	0.0196			Σ=		0.035
			Σ=	0.197			

Tabella 2.6

distribuzione di Student in Tabella 2.1. Dai dati riassunti in Tabella 2.6, si ottengono i corrispondenti scarti quadratici e le incertezze.

$$s_{C1} = \sqrt{\frac{0.197}{5-1}} = 0.22 \text{ u.m.} \quad s_{C2} = \sqrt{\frac{0.035}{3-1}} = 0.13 \text{ u.m.}$$

$$i_{C1} = \frac{2.8 \cdot 0.22}{\sqrt{5}} = 0.28 \text{ u.m.} \quad i_{C2} = \frac{4.3 \cdot 0.13}{\sqrt{3}} = 0.32 \text{ u.m.}$$

Poiché $i_{C1} < i_{C2}$, si considerano più attendibili le misure della prima serie e quindi $C=475.39$ u.m.

Volume E' noto che il volume V di un parallelepipedo di lati A, B, C è dato dalla relazione $V=A \cdot B \cdot C$.

Questa relazione viene usata anche per determinare il volume del corpo in esame, dando per accettata l'incertezza di modello specificata. In altre parole, il corpo può anche non presentarsi rigorosamente come un parallelepipedo: le superfici delle sue facce potrebbero essere non perfettamente parallele e/o leggermente bombate, corrugate o con una piccola solcatura. Tali difetti o, se si vuole, discrepanze dalla "perfezione", magari ben visibili, in questo caso sono del tutto ignorate, poiché è stato considerato accettabile un'incertezza di modello del 5% per i fini secondo i quali si vuole sapere e utilizzare il volume così stimato del pezzo con l'incertezza che lo accompagna.

E' evidente che per altri scopi, un'incertezza di modello parallelepipedo del 5% può essere del tutto inaccettabile. Sarà allora necessario trovare un altro modello o anche più modelli di solido in grado di descrivere con maggior precisione il solido di interesse.

Sostituendo dunque nella relazione $V=A \cdot B \cdot C$ i valori medi di A, B e C, si ha $V=125.35 \times 425.26 \times 475.39 = 25,341 \cdot 10^6$ u.m. = $25.341 \cdot 10^6$ (u.m.)³.

Per quanto riguarda la valutazione dell'incertezza sulla volume i_V si può utilizzare la relazione (2.1), dato che le grandezze in ingresso non sono correlate, cui viene aggiunto anche il termine relativo all'incertezza di modello $i_m=0.05$.

A tale proposito vanno chiaramente prima determinate le espressioni dei coefficienti di sensibilità. Si ha

$$\theta_A = \frac{\partial V}{\partial A} = BC; \quad \theta_B = \frac{\partial V}{\partial B} = AC; \quad \theta_C = \frac{\partial V}{\partial C} = AB$$

e quindi

$$i_V = \sqrt{(\theta_A i_A)^2 + (\theta_B i_B)^2 + (\theta_C i_C)^2 + (V i_m)^2} = 1.3 \cdot 10^6 \text{ (u.m.)}^3$$

Allora $V = (25.3 \pm 1.3) \cdot 10^6 \text{ (u.m.)}^3 \text{ (95\%)}$.

Si aggiunge che, a causa del ridotto numero di dati per A e C, sarebbe stato più corretto applicare la formula di Welch-Sattelwhite.

Esercizio 16. Si determini la velocità v , con relativa incertezza e livello di confidenza, di un corpo di cui si misura lo spazio s percorso nell'intervallo di tempo t sapendo che:

- l'incertezza di modello per la misura dimensionale e quella di tempo, è dello 0.8%;
- lo spazio s viene misurato con uno strumento che ha un effetto sistematico di $+10.5 \pm 0.1 \text{ mm}$; il risultato dell'analisi statistica di 100 misurazioni, aventi distribuzione gaussiana e scarto quadratico pari a 0.3 mm , è 64.8 mm ;
- l'intervallo di tempo t , in secondi, viene misurato 6 volte con uno strumento che ha un'incertezza dichiarata dal costruttore $\pm 0.1 \text{ s}$; i valori misurati sono:

$$325.1; \quad 325.5; \quad 325.9; \quad 328.2; \quad 325.2; \quad 325.9;$$

Le incertezze sono assegnate con un livello di confidenza del 95%.

Soluzione

SPAZIO Il valore medio di 64.8 mm corretto dell'effetto sistematico che connota lo strumento risulta $64.8 - 10.5 = 54.3 \text{ mm}$. La distribuzione è gaussiana, di conseguenza l'incertezza di ripetibilità sullo spazio i_{sr} è data dalla relazione

$$i_{sr} = \frac{2 \cdot 0.3}{\sqrt{100}} = 0.06 \text{ mm}$$

Infatti, se si fa riferimento ad un livello di confidenza del 95%, lo scarto deve essere moltiplicato per 2. Tale incertezza deve essere combinata quadraticamente con l'effetto sistematico i_{es} ottenendo l'incertezza i_s sullo spazio

$$i_s = \sqrt{i_{sr}^2 + i_{es}^2} = \sqrt{0.06^2 + 0.1^2} = 0.1 \text{ mm}$$

TEMPO I 6 valori misurati sembrano contenere un dato non attendibile.

Con soli 6 dati non è facile controllare se la distribuzione sia gaussiana ed applicare il criterio di Chauvenet, ma se si ipotizzasse gaussiana la distribuzione, applicando il criterio, si calcolerebbe una probabilità $P_c = 1 - 1/2n$, con $n=6$ corrispondente a 91.7% a cui corrisponde uno scarto ridotto limite di 1.73 (circa 2).

Se si scartasse il valore 328.2 s risulterebbe il valore medio di 325.52 s e uno scarto di 0.38 s. Se quindi si applicasse il criterio, si dovrebbero scartare tutti i valori che si discostano circa $0.4 \times 2 = 0.8$ s (per la precisione $0.38 - 1.73 = 0.65$ s).

Dato che il valore 238.2 si discosta di 2.68 s > 0.8 s questo viene scartato e si considerano media e scarto calcolati in precedenza.

L'incertezza, poiché con una probabilità del 95% e per un numero di gradi di libertà pari a $5 - 1 = 4$ dalla Tabella 2.1 risulta $t = 2.8$, è

$$i_t = \frac{2.8 \cdot 0.4}{\sqrt{5}} = 0.5 \text{ s}$$

VELOCITA' La velocità v si ottiene chiaramente come rapporto tra spazio e intervallo di tempo. Quindi $v = 54.3/325.52 = 167 \text{ } \mu\text{m/s}$.

L'incertezza, in prima approssimazione può essere calcolata con la (2.1) ossia come

$$i_v = \sqrt{(\theta_s i_s)^2 + (\theta_t i_t)^2}$$

in cui

$$\theta_s = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t}; \quad \theta_t = \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}$$

Si ottiene $i_v = 1.4 \text{ } \mu\text{m/s}$ e quindi: $v = 167 \pm 1 \text{ } \mu\text{m/s}$ (95%)

Esercizio 17. *Scopo: misurazione del volume di un cilindro.*

Informazioni storiche: rapporto lunghezza/diametro = 1/6, incertezza 20%; lunghezza = 10 cm, incertezza 20%; incertezza di modello = 20%.

Scegliere gli strumenti di misura più idonei e descrivere nel dettaglio la procedura di misurazione proposta, motivandola in dettaglio, al fine di avere un'incertezza sul volume del cilindro inferiore all'1%.

Soluzione

Poiché la risposta al problema posto è evidentemente di tipo discorsivo, non numerico, se ne dà una possibile traccia.

Le informazioni storiche mettono in evidenza che le misure sono state fatte in modo del tutto grossolano. Ecco la procedura di misurazione che si propone.

ISPEZIONE VISIVA Un'incertezza del 20% sul modello richiede gioco forza di partire dall'analisi visiva del pezzo, per accertare se il modello "cilindro" è sufficiente a descrivere in modo esauriente l'oggetto al fine di avere un'incertezza sulla misura del suo

volume inferiore all'1%, come richiesto. In altre parole con incertezza del 20% sul modello, anche una penna dal ricercato design è praticamente un cilindro!!

L'ispezione visiva dell'oggetto consente anche di notare particolari salienti precedentemente non considerati (tipo un foro che attraversa assialmente tutto o in parte il corpo rendendolo quindi un cilindro cavo) e di farsi un'idea del tipo di materiale o dei materiali di cui è fatto. Ciò può essere assai rilevante per la scelta delle modalità con cui effettuare le misurazioni. Infatti, per esempio, un conto è stringere tra i becchi di un calibro un pezzo d'acciaio, un altro un oggetto di gomma. Anche in relazione alle superfici si possono avere delle informazioni interessanti, quali ondulazioni, solcature, incisioni, ammanchi di materiale, ecc.

SCELTA DEL MODELLO Il modello cilindro può ancora essere sufficiente a descrivere l'oggetto oppure no. In quest'ultimo caso, potrebbe essere sufficiente dividere l'oggetto in più porzioni cui meglio si adatta ancora un modello a cilindro (si pensi a un albero meccanico), oppure per certe parti cambiare decisamente modello. Nel caso, per esempio, l'oggetto fosse una penna, al corpo centrale potrebbe ancora andar bene il modello cilindrico, ma per la punta il modello tronco di cono meglio risponde all'effettiva geometria reale del particolare, così come l'eventuale ferma-penna all'altra estremità potrebbe essere descritto con il modello parallelepipedo.

Dalla scelta del modello (o dei modelli) segue il numero di grandezze da misurare: diametro e altezza per il modello cilindro pieno, tre lati per il modello parallelepipedo, ecc. In questo caso si consideri più che soddisfacente il modello cilindrico, immaginando che si tratti di spezzoni di barre d'acciaio appena tagliate al tornio manuale. Dall'esecuzione di quanto detto è anche possibile associare un'incertezza di modello.

SCELTA DEGLI STRUMENTI DI MISURA La questione non è affatto semplice, poiché ogni scelta ha vantaggi e svantaggi che vanno valutati su varie voci, quali, per esempio, costo della strumentazione, tempo di esecuzione delle misure, possibilità o meno di impiego dei dati misurati per un controllo automatico in linea della qualità, possibilità effettiva d'esecuzione delle misure con lo strumento scelto, costi di manutenzione dell'attrezzatura, costi per l'eventuale formazione del personale che la impiegherà. A titolo d'esempio, se l'oggetto da misurare dimensionalmente è rovente, appare ovvio che non si possa pretendere di prendere le misure con un calibro, ma ci si debba giocoforza orientare verso un sistema di visione, che ha il vantaggio di non toccare il pezzo, ma ha anche un costo superiore a un semplice calibro.

Si immagini allora che, a conclusione dell'analisi, la scelta sia caduta sul semplice calibro ventesimale analogico (portata 180 mm, risoluzione 1/20 mm).

PROCEDURA DI MISURAZIONE Incertezza di modello non nulla porta con sé che il corpo in esame sia sì cilindrico, ma non perfettamente un cilindro. Ad esempio, le sue basi potrebbero non essere perfettamente piane, né parallele tra di loro, la sezione essere leggermente ellittica, la superficie laterale debolmente ondulata, l'asse non perfettamente ortogonale alle basi. Si hanno dunque varie tolleranze associate all'oggetto. Ne segue che, per meglio connotare il pezzo, anziché una sola misura di diametro e una sola misura d'altezza (sufficienti ovviamente per il calcolo del volume di un cilindro retto perfetto), ne

vengono fatte di più e il conto eseguito su un diametro medio e su un'altezza media. Si propone:

§ *diametro* – 6 misure così realizzate:

- per ognuna delle 2 basi si effettuano 2 misure formalmente ortogonali tra loro;
- 2 misure indicativamente a metà dell'altezza del pezzo anche qui in modo che siano formalmente ortogonali;
- tra una serie di misure e la successiva il pezzo sia ruotato di circa 120° ;

§ *altezza* – 3 misure così realizzate:

- 3 misure eseguite in modo tale che i becchi del calibro passino per l'asse del cilindro e che tra i 3 segmenti ideali che ne segnano il loro profilo a livello di ciascuna base vi siano angoli formalmente di 120° ;

ELABORAZIONE DEI DATI Della serie di 6 misure di diametro D viene calcolata la media aritmetica e lo scarto quadratico medio. Ciò fornisce il valore del diametro medio del cilindro. Per il calcolo dell'incertezza i_D si usa la relazione $i_D = \frac{t \cdot s_D}{\sqrt{n}}$ con $n=6$ e t in corrispondenza a 5 gradi di libertà e $p=95\%$, ossia si utilizza $t=2.6$ (vedi la Tabella 2.1 a pagina 11).

Analogamente per le 3 misure di altezza h viene calcolata la media aritmetica e lo scarto quadratico medio. Ciò fornisce il valore del diametro medio del cilindro. Per il calcolo dell'incertezza i_h si usa la relazione $i_h = \frac{t \cdot s_h}{\sqrt{n}}$ con $n=3$ e t in corrispondenza a 2 gradi di libertà e $p=95\%$, ovvero si utilizza $t=4.3$ (vedi ancora la Tabella 2.1 a pagina 11).

Il volume V del solido è chiaramente $V = \frac{D^2}{4}h$. Quanto all'incertezza i_V essa si determina con la formula di propagazione per grandezze non correlate tenendo conto anche dell'incertezza di modello valutata a seguito dell'esecuzione dalle operazioni precedenti.

Laddove l'incertezza sul volume risultasse maggiore dell'1%, si dovranno rivedere criticamente alcuni punti della procedura proposta, valutando anche chiaramente la possibilità di cambiare lo strumento di misura.

Esercizio 18. Si vuole misurare la tensione σ di un corpo, $\sigma = F/A$, ipotizzata costante con incertezza del 2%:

a) la superficie A è misurata 7 volte con uno strumento avente incertezza di $0.01[m^2]$ al livello di confidenza del 95%, ottenendo:

124.35; 124.45; 124.20; 121.30; 124.30; 124.25; 124.55 $[m^2]$

b) per quanto riguarda lo sforzo normale F esso viene misurato 12 volte, ottenendo un valore medio di 49,124891235478321 $[mN]$.

Per non peggiorare sensibilmente la misura della tensione, che caratteristiche metrologiche deve avere lo strumento che misura la forza?

Soluzione

SUPERFICIE I 7 valori misurati sembrano contenere un dato non attendibile.

Se la distribuzione fosse gaussiana, applicando il criterio di Chauvenet, si calcolerebbe una probabilità $P_c = 1 - 1/2n$ ($n=7$), cui corrisponde uno scarto ridotto limite certamente minore di 1.86 (si veda la Tabella 2.2 a pagina 12). Se si scartasse il dato 121.30 m^2 , risulterebbero un valore medio di 124.35 m^2 e uno scarto quadratico medio di 0.13 m^2 .

Ora, poiché si ottiene $124.35 - 121.30 = 3.05 > 0.26 = 0.13 \times 2$ (per la precisione 0.13×1.9 , stando alle considerazioni che emergono dalla citata tabella), il dato in esame viene scartato, assumendo quindi la media e lo scarto appena calcolati.

A questo punto si procede al calcolo dell'incertezza i_A associata alla superficie, assumendo un livello di confidenza del 95%. Nel caso specifico si ha $\nu=5$ per i gradi di libertà e $t=2.6$ dalla Tabella 2.1 a pagina 11. Quindi $i_A = \frac{2.6 \cdot 0.13}{\sqrt{6}} = 0.14 \text{ m}^2$.

$[F]$ Con le informazioni fornite non è possibile calcolare lo scarto quadratico e l'incertezza su F , i_F .

Si mette in evidenza che il valore medio fornito per F (espresso in millesimi di newton!) ha un numero di cifre decimali troppo elevato.³ Avendo i valori della superficie 5 cifre significative, è ragionevole assumerne un numero pari anche per il valore medio di F , che verrà eventualmente ridotto sulla base di quanto emergerà dall'elaborazione dei dati che segue.

$[\sigma]$ Il valore medio della tensione risulta $\sigma = 3.9501 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^2$ e l'incertezza (2%) associata $i_\sigma = \pm 8.0 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$. In altre parole si ha $\sigma = (3.95 \pm 0.08) \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^2$.

L'incertezza i_σ in prima approssimazione può essere calcolata con la (2.1) ossia come

$$i_\sigma = \sqrt{(\theta_F i_F)^2 + (\theta_A i_A)^2}$$

in cui

$$\theta_F = \frac{\partial \sigma}{\partial F} = \frac{1}{A}; \quad \theta_A = \frac{\partial \sigma}{\partial A} = -\frac{F}{A^2}$$

nella quale, in questo caso, l'incognita è i_F . Inserendo i valori numerici e risolvendo l'equazione, si ottiene $i_F = 0.001 \text{ N}$.

Dato che

$$i_F = \frac{t s}{\sqrt{n}}$$

con $n=12$ e $t=2.2$ per 11 gradi di libertà (confronta la Tabella 2.1 a pagina 11), si ricava un valore per lo scarto quadratico medio delle misure di F pari a 0.0016 N (1.6 mN).

Il significato del dato ottenuto è che i valori misurati di F , che non si hanno a disposizione, si discostano mediamente dalla media (49.12 mN) di 1.6 mN , ossia del 3.25%. Giova che il dinamometro sia per lo meno capace di apprezzare una variazione di 0.1 mN in un campo operativo di utilizzo $0-100 \text{ mN}$.

³Si tratta molto probabilmente della semplice trascrizione dal display di un calcolatore del valore ottenuto dalla divisione della somma dei valori di F misurati per il numero stesso dei dati, cioè 12, senza procedere a verifica del numero di cifre significative. Che si tratti di un computer, lo suggerisce il numero di cifre decimali.

Impedenze meccaniche

Un qualsiasi sistema meccanico lineare a parametri concentrati può essere formalmente messo in relazione con un particolare circuito elettrico equivalente, ovvero può essere studiato ricorrendo a un'analogia elettrica. In generale la teoria dei sistemi mostra come sia possibile instaurare analogie tra diversi sistemi fisici (elettrici, meccanici traslatori, meccanici rotatori, idraulici o fluidodinamici, termici, ecc.). In essi si individuano grandezze particolari caratterizzate dalla proprietà che il loro prodotto è dimensionalmente omogeneo a una potenza.

Nel caso dei sistemi meccanici tali grandezze sono la forza F e la velocità v oppure la coppia M e la velocità angolare $\dot{\theta}$. Tuttavia non è univoca la scelta di quale di queste due grandezze, il cui prodotto rappresenta una potenza, considerare come grandezza di variabile di sforzo e quale come grandezza di variabile di portata. Si hanno quindi due analogie:

- *analogia di Maxwell* - nota anche come analogia elettromeccanica, si fonda sul concetto di impedenza meccanica, definita come rapporto tra una grandezza variabile di portata (Forza o Coppia) e una grandezza variabile di sforzo (velocità di traslazione o velocità di rotazione). Il motivo che giustifica la scelta dei rapporti

$$Z_{meccanica} = \frac{F}{v} \text{ oppure } Z_{meccanica} = \frac{M}{\dot{\theta}}$$

dipende probabilmente dall'abitudine di considerare la forza come causa e la velocità come effetto allo stesso modo in cui in elettrodinamica si tende a considerare la tensione come causa e la corrente come effetto;

- *analogia di Firestone* - si fonda sul concetto di impedenza generalizzata, definita come rapporto tra una grandezza variabile di sforzo e una grandezza variabile di portata. Per i sistemi meccanici si hanno quindi i rapporti

$$Z_{generalizzata} = \frac{v}{F} \text{ oppure } Z_{generalizzata} = \frac{\dot{\theta}}{M}$$

Operando la sostituzione di ogni singolo componente meccanico con un equivalente bipolo elettrico si ottiene un circuito elettrico con una certa topologia (ossia con certi collegamenti in serie e parallelo). Nei circuiti elettrici per i bipoli in serie (quindi attraversati dalla stessa corrente) le impedenze si sommano, mentre per i bipoli in parallelo (ovvero sottoposti ai loro morsetti alla medesima differenza di potenziale) si opera sommando i reciproci delle impedenze ottenendo così il reciproco dell'impedenza equivalente.

Ora, seguendo l'analogia di Firestone, le successive semplificazioni basate sulla topologia del circuito elettrico equivalente seguono perfettamente le regole delle impedenze elettriche in termini di serie e parallelo, cioè la topologia degli schemi nel passaggio da sistema meccanico a sistema elettrico equivalente è perfettamente conservata.

Secondo l'analogia di Maxwell:

- sono da considerarsi in serie gli elementi meccanici ai quali compete la stessa velocità di vibrazione o di rotazione;
- devono essere considerati in parallelo gli elementi sottoposti alla stessa forza o coppia.

Così, volendo lavorare sulla base della sola topologia dei bipoli presenti nel corrispondente circuito elettrico, è necessario considerare le impedenze meccaniche come delle ammettenze generalizzate.

Tuttavia con i sistemi meccanici non è affatto necessario lavorare sempre sul circuito elettrico equivalente, cioè trasformare in ogni caso un problema meccanico in un problema elettrico a impedenze generalizzate, ma si può studiare lo schema meccanico a impedenze meccaniche cui si perviene per opportuna schematizzazione del sistema reale (si veda la Figura 3.1). Le impedenze meccaniche possono poi essere composte tra di loro secondo le due regole richiamate sopra. Nel caso in Figura 3.1 le impedenze sono da considerarsi tutte in serie tra di loro, in quanto è evidente che ad esse compete la stessa velocità di vibrazione.

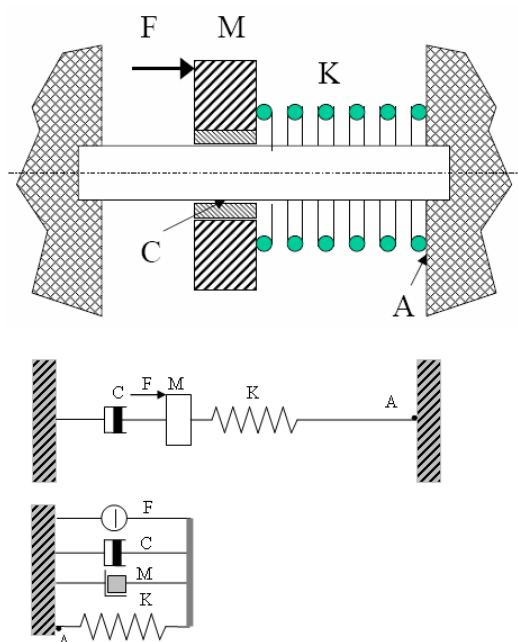


Figura 3.1: Esempio di passaggio dal sistema reale allo schema equivalente a impedenze

Si seguito le impedenze, indicate con il simbolo Z , sono esclusivamente impedenze meccaniche.

===== O ===== O ===== O =====

Da un punto di vista del tutto generale uno strumento di misurazione ideale non assorbe energia dal sistema cui viene accoppiato, il che significa che nulla cambia inserendo lo strumento di misura all'interno di un certo sistema grazie al quale si intende effettuare la misurazione di una certa grandezza d'interesse. Lo strumento è di fatto ininfluente.

Tuttavia così non è nella realtà. L'inserimento di uno strumento di misura reale comporta che il misuratore perturbi il sistema, poiché lo strumento assorbe dell'energia. Si pensi, ad esempio, alla corrente che circola nella bobina di un voltmetro a nucleo mobile; questa corrente, prelevata dal sistema, serve per far funzionare lo strumento, ma ciò comporta un certo assorbimento di energia che è nullo solo eliminando lo strumento di misura del circuito. Per connotare questo fenomeno si parla di errore di inserzione o di carico e si possono citare vari casi in cui questo importante aspetto dev'essere opportunamente considerato¹.

Per la verità il cosiddetto errore di carico o di inserzione non è un vero e proprio errore, ma un effetto che accompagna il processo di misurazione che deve essere considerato al fine di ottenere una misura corretta del misurando attraverso un certo strumento o una opportuna catena di misura. In altre parole si commette un errore nel non tenere conto di questo fenomeno. Si consideri che nel studiare una catena di misurazione sperimentale si cerca di fare in modo che tale assorbimento di energia sia contenuto, ridotto il più possibile (ben diverso è il caso in cui si voglia invece rendere massima la potenza trasferita).

Il tenere conto di ciò implica la scelta dello strumento giusto, intendendosi con tale dizione non solo possibilmente la scelta dello strumento, tra i tanti inventati, che è meglio capace di consentire la misura del misurando in funzione delle proprie esigenze, ma anche che esso abbia le migliori caratteristiche (in relazione alle caratteristiche interne, al costo, alla praticità, all'affidabilità, ecc.) tali da perturbare il meno possibile il sistema in cui si troverà accoppiato e in ogni caso procedere a quantificare l'effetto di carico con cui correggere opportunamente i dati ottenuti.

Si vuole sottolineare il fatto che non sempre si può avere a disposizione lo strumento ottimo, ma spesso ci si deve in un certo senso accontentare di quelli a disposizione per non affrontare nuove spese. Tra questi si opererà una scelta e in base a essa si quantificherà la conseguente correzione dovuta all'errore di inserzione associato all'accoppiamento di quel certo dispositivo con determinate caratteristiche funzionali con il sistema oggetto di misurazione.

Dalle considerazioni generali sulla problematica della valutazione e quantificazione dell'effetto di carico nella misura di una generica grandezza (anche variabile nel tempo) accoppiando a un sistema uno strumento con determinate caratteristiche interne secondo l'analogia di Maxwell (ovvero utilizzando le impedenze meccaniche) si ricavano le formule per calcolare l'errore di inserzione ϵ che sono richiamate in Tabella 3.1, in cui si è indicato con Z_g l'impedenza equivalente del sistema di misura e con Z_u l'impedenza del misuratore.

¹Si richiama qui per esempio il fatto che la massa dell'accelerometro incollato su una trave a mensola induce una variazione della prima frequenza naturale di vibrazione di tale elemento meccanico

VARIABILE DI PORTATA

$$\epsilon_P = \left| \frac{1}{1 + \frac{Z_u}{Z_g}} \right| \quad (3.1)$$

VARIABILE DI SFORZO

$$\epsilon_S = \left| \frac{1}{1 + \frac{Z_g}{Z_u}} \right| \quad (3.2)$$

CASO STATICO

VARIABILE DI PORTATA

$$\epsilon_P = \left| -\frac{1}{1 + \frac{K_u}{K_g}} \right| \quad (3.3)$$

VARIABILE DI SFORZO

$$\epsilon_S = \left| -\frac{1}{1 + \frac{K_g}{K_u}} \right| \quad (3.4)$$

Tabella 3.1: Espressioni degli errori d'inserzione con impedenze meccaniche

Per contenere l'errore di inserzione²:

- nelle misure di variabile di sforzo dev'essere $Z_u \ll Z_g$. Per esempio, considerando l'impedenza interna di un accelerometro (massa), la massa m dev'essere minima;
- nelle misure di variabile di portata dev'essere $Z_u \gg Z_g$. Per esempio, considerando l'impedenza interna di un dinamometro a molla, la rigidità K dev'essere massima;

Quanto detto può essere generalizzato nel caso di collegamento a cascata tra quadripoli in modo che per ciascun accoppiamento il quadripolo a valle non induca effetto di carico quando il segnale è una variabile di portata oppure di sforzo.

²Si richiama il fatto che $\epsilon_P \approx -\frac{Z_g}{Z_u}$ e $\epsilon_S \approx -\frac{Z_u}{Z_g}$. Infatti, considerando l'espressione dell'errore di inserzione nel caso di variabile di portata, posso scrivere

$$\epsilon_P = -\frac{Z_g}{Z_u} \frac{1}{1 + \frac{Z_g}{Z_u}} \text{ e posto } x = \frac{Z_g}{Z_u} \implies \epsilon_P = -x \frac{1}{1+x}$$

Sviluppando il secondo fattore in serie e trascurando dopo il prodotto i termini di ordine superiore, si ottiene quanto scritto. Giova anche tenere presente la seguente proprietà del valore assoluto ($Z_2 \neq 0$): $\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ che è particolarmente utile per la risoluzione degli esercizi.

Esercizio 19. Ricavare l'espressione dell'impedenza meccanica dei seguenti elementi meccanici:

a) elemento elastico lineare, smorzatore viscoso lineare, massa;

b) elemento elastico torsionale, smorzatore viscoso lineare torsionale, massa rotazionale (momento d'inerzia);

Soluzione

L'ipotesi di base nell'utilizzo delle impedenze (meccaniche o generalizzate che siano) è che le grandezze abbiano andamento sinusoidale (condizione a cui è possibile ricondursi anche nel caso più generale di grandezze periodiche). Si può allora scrivere le seguenti relazioni generali riguardanti la grandezza X , la sua derivata prima \dot{X} e derivata seconda \ddot{X} rispetto al tempo:

$$X = X_0 e^{i\omega t}; \quad \dot{X} = X_0 i\omega e^{i\omega t} = i\omega X; \quad \ddot{X} = -X_0 \omega^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 X = i\omega \dot{X}$$

Dopodiché ciascun componente elementare viene rappresentato secondo una schematizzazione a parametri concentrati in cui è nota la relazione tra le due grandezze da cui dipende il flusso di energia o di potenza.

[a] L'impedenza meccanica nel caso traslazionale è definita come rapporto tra forza F (variabile di portata) e velocità relativa degli estremi dell'elemento (variabile di sforzo), ossia

$$Z = \frac{F}{v} = \frac{F}{\dot{X}}$$

Elemento elastico tipo molla lineare

La relazione tra le due grandezze da cui dipende il flusso di energia o di potenza è

$$F = KX = \frac{\dot{X}}{i\omega}$$

e di conseguenza l'espressione dell'impedenza meccanica associata all'elemento molla di rigidità K è

$$Z_K = \frac{F}{v} = \frac{K\dot{X}}{\dot{X}i\omega} = \frac{K}{i\omega} = -i\frac{K}{\omega}$$

Smorzatore viscoso lineare

La relazione tra le due grandezze da cui dipende il flusso di energia o di potenza è

$$F = C\dot{X}$$

e di conseguenza l'espressione dell'impedenza meccanica associata all'elemento smorzatore viscoso lineare di coefficiente di smorzamento C è

$$Z_C = \frac{F}{v} = \frac{C\dot{X}}{\dot{X}} = C$$

Massa

La relazione tra le due grandezze da cui dipende il flusso di energia o di potenza è

$$F = M\ddot{X} = Mi\omega\dot{X}$$

e di conseguenza l'espressione dell'impedenza meccanica associata all'elemento massa M in moto traslatorio è

$$Z_M = \frac{F}{v} = \frac{Mi\omega\dot{X}}{\dot{X}} = i\omega M$$

[b] L'impedenza meccanica nel caso rotazionale è definita come rapporto tra coppia M (variabile di portata) e velocità angolare relativa degli estremi dell'elemento (variabile di sforzo), ossia

$$Z = \frac{M}{\dot{\theta}} = \frac{M}{\dot{X}}$$

Elemento elastico torsionale

La relazione tra le due grandezze da cui dipende il flusso di energia o di potenza è

$$M = K_t\theta = \frac{\dot{\theta}}{i\omega}$$

e di conseguenza l'espressione dell'impedenza meccanica associata all'elemento elastico torsionale di rigidità torsionale K_t è

$$Z_K = \frac{F}{v} = \frac{K_t\dot{\theta}}{\dot{\theta}i\omega} = \frac{K_t}{i\omega} = -i\frac{K_t}{\omega}$$

Smorzatore viscoso lineare torsionale

La relazione tra le due grandezze da cui dipende il flusso di energia o di potenza è

$$M = C\dot{\theta}$$

e di conseguenza l'espressione dell'impedenza meccanica associata all'elemento smorzatore viscoso lineare torsionale di coefficiente di smorzamento C è

$$Z_C = \frac{F}{v} = \frac{C\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = C$$

Momento d'inerzia

La relazione tra le due grandezze da cui dipende il flusso di energia o di potenza è

$$M = I\ddot{\theta} = Ii\omega\dot{\theta}$$

e di conseguenza l'espressione dell'impedenza meccanica associata all'elemento massa in rotazione di momento d'inerzia I è

$$Z_I = \frac{F}{v} = \frac{Ii\omega\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = i\omega I$$

CASO TRASLAZIONALE

$$Z_K = \frac{K}{i\omega} = -i\frac{K}{\omega} \quad (3.5)$$

$$Z_C = C \quad (3.7)$$

$$Z_M = i\omega M \quad (3.9)$$

CASO ROTAZIONALE

$$Z_K = \frac{K_t}{i\omega} = -i\frac{K_t}{\omega} \quad (3.6)$$

$$Z_C = C \quad (3.8)$$

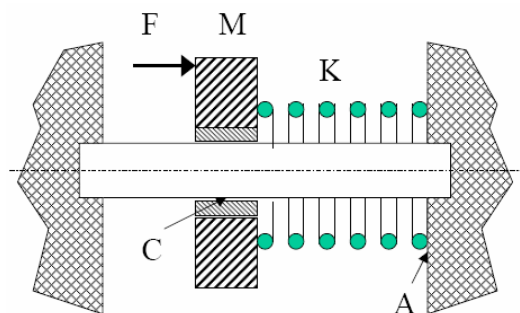
$$Z_I = i\omega I \quad (3.10)$$

Tabella 3.2: Espressioni delle impedenze meccaniche

La Tabella 3.2 riassume le espressioni delle impedenze meccaniche che sono state ricavate. Si noti la perfetta corrispondenza formale tra le impedenze meccaniche associate a fenomeni traslazionali e le equivalenti impedenze rotazionali.

Esercizio 20. Per il sistema meccanico in Figura:

- ricavare lo schema equivalente a impedenze;
- determinare l'espressione generale della forza F_A trasmessa al punto A in funzione della pulsazione ω della forza F e dei parametri caratteristici del sistema;
- calcolare F_A in modulo e fase quando $F=20.0$ N, $\omega = 0.5$ rad/s, $K=50$ N/m, $M=5.0$ kg e $C=0.05$ kg/s.

**Soluzione**

La riduzione di un sistema reale al suo schema equivalente a impedenze meccaniche è a livello generale cosa complessa e delicata, poiché funzione di ciò che si desidera studiare e delle semplificazioni che si vogliono o si possono accettare. In altre parole, se è vero che le caratteristiche spaziali dei componenti vengono operativamente ridotte a parametri concentrati, è importante notare che il loro numero non è unico, ma dipendente da ciò che si vuole indagare e considerare.

Per esempio, la schematizzazione di un semplice elemento elastico non è uguale per analizzarne il primo modo di vibrare oppure anche i modi di ordine superiore, la massa di una molla può essere trascurabile oppure no ai fini di un'indagine soddisfacente del sistema reale attraverso il suo schema equivalente a parametri concentrati, il contributo di un certo componente rispetto la fenomeno dissipativo (che può essere in generale funzione

dello spostamento, della velocità, dello stato di deformazione o di altro) non sempre è trascurabile.

Poiché tale materia è dunque piuttosto complessa, quanto qui semplicemente illustrato ha volutamente un taglio prettamente didattico. Si possono comunque individuare delle regole generali:

- il telaio funge da riferimento assoluto;
- l'elemento che deriva dalla schematizzazione di un'inerzia meccanica (massa in moto traslatorio M o rotatorio I) è sempre collegato con un estremo al telaio;
- gli elementi associati alla elasticità (rigidezza K e rigidezza torsionale K_t) possono avere un estremo vincolato al telaio oppure no;
- gli elementi smorzatori C (di tipo lineare) possono avere un estremo vincolato al telaio oppure no;

[a] Nel sistema reale si individuano con facilità una massa M , dotata di moto traslatorio e alla quale è applicata la forza F , e una molla con costante di rigidezza K . Si immagini che la massa della molla sia trascurabile rispetto a M .

A causa del contatto non ideale tra l'elemento massa e lo stelo fisso che funge da guida si ha dissipazione di energia: ciò viene considerato associando un elemento smorzatore viscoso lineare caratterizzato dal parametro C (si tratta chiaramente di una linearizzazione del fenomeno). Per la verità anche un molla potrebbe essere interessata da fenomeni di tipo dissipativo, che però potrebbero risultare trascurabili rispetto al fenomeno che coinvolge la massa, come si suppone in questo caso. Ma a volte questa semplificazione non è possibile.

Individuati tutti gli elementi meccanici semplici, dall'osservazione del sistema reale si ha:

- K è vincolato con un estremo al telaio perché così risulta nel sistema reale;
- essendo C in relazione con la variazione di posizione assoluta di M rispetto al telaio, risulta anche esso collegato con un estremo al telaio.

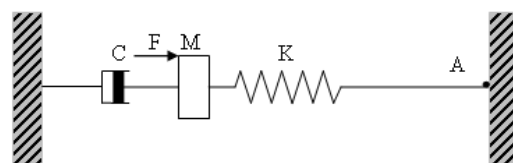


Figura 3.2

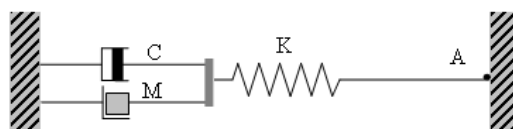


Figura 3.3

Si perviene così per semplice concentrazione delle caratteristiche del sistema alla Figura 3.2.

Per avere il sistema equivalente a impedenze meccaniche è per prima cosa necessario schematizzare la massa M , ricordando che ogni elemento M è sempre collegato con un estremo al telaio³. Il sistema con questa ulteriore schematizzazione è in Figura 3.3.

Ora, si nota che ciascun componente meccanico elementare ha un estremo collegato a telaio e l'altro che condivide lo stesso spostamento di traslazione con gli altri elementi. Ne segue che tutti gli elementi sono in parallelo tra di loro.

Lo schema equivalente a impedenze per il sistema meccanico assegnato risulta essere come in Figura 3.4, avendo rappresentato la forza F che sollecita la massa M con un generatore (ideale) di forza (che è una variabile di portata).

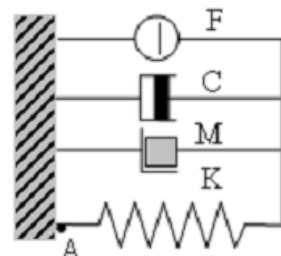


Figura 3.4

[b] Dalla definizione di impedenza meccanica Z discendono le relazioni

$$F = Zv; \quad v = \frac{F}{Z}$$

La forza trasmessa in A F_A può determinarsi come prodotto tra l'impedenza Z_K associata all'elemento elastico di rigidezza K e la velocità v del "punto comune" ossia

$$F_A = Z_K v$$

D'altro canto la velocità v si ottiene come rapporto della forza F del generatore con l'impedenza globale Z_g , cioè

$$v = \frac{F}{Z_g}$$

Essendo gli elementi tutti in parallelo tra di loro, si ha che

$$Z_g = Z_M + Z_C + Z_K = i\omega M + C + \frac{K}{i\omega}$$

Quindi

$$v = \frac{F}{Z_g} = \frac{F}{i\omega M + C + \frac{K}{i\omega}}$$

e infine

$$F_A = Z_K v = \frac{K}{i\omega} \frac{F}{i\omega M + C + \frac{K}{i\omega}}$$

Svolgendo i prodotti⁴, l'espressione della forza F_A in funzione della pulsazione ω della forza F è dunque

$$F_A = \frac{FK}{i\omega C + Ki\omega - \omega^2 M}$$

³Anche se il telaio è stato per semplicità grafica schematizzato con due elementi, uno a sinistra e l'altro a destra rispetto al sistema, esso in realtà è un oggetto unico, cosicché è del tutto indifferente il collegamento dell'estremo che va a telaio dell'elemento meccanico M con il blocco di destra o con quello di sinistra.

⁴Si ricorda che per le proprietà dell'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$, si ha che $i^2 = -1$.

□ Sostituendo i valori nell'espressione di F_A si ottiene

$$F_A = \frac{20 \cdot 50}{0.5 \cdot 0.05i + 50 \cdot 0.5i - 0.5^2 \cdot 5.0} = \frac{1000}{25.025i - 1.25}$$

Il modulo di F_A è

$$F_A = \frac{1000}{\sqrt{25.025^2 + 1.25^2}} = 39.9 \text{ N}$$

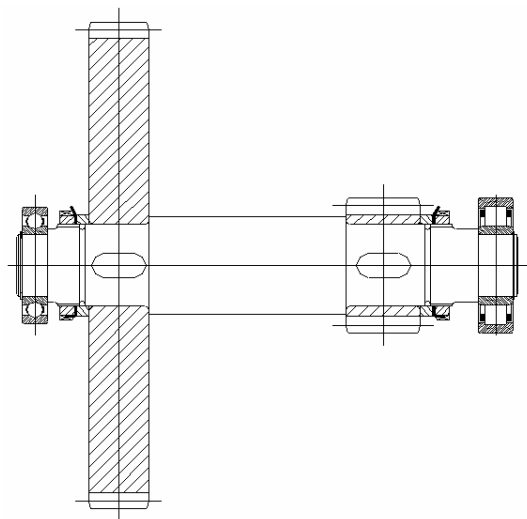
mentre la fase risulta

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\frac{1000(-25.025)}{(25.025i-1.25)(-25.025i-1.25)}}{\frac{1000(-1.25)}{(25.025i-1.25)(-25.025i-1.25)}} \right) = \arctg \left(\frac{25.025}{1.25} \right) = 1.52 \text{ rad } (87.1^\circ)$$

Esercizio 21. In Figura è riportato un disegno schematico dell'albero intermedio di un riduttore a ruote dentate a denti diritti. La ruota grande riceve il moto dall'albero veloce del riduttore, mentre la ruota piccola trasmette il moto all'albero lento.

Considerando la torsione e supponendo che la rotazione dell'albero segua una legge armonica, ricavare:

- il semplice schema equivalente a impedenze di questo sistema meccanico;
- l'espressione dell'impedenza globale Z_g .



Soluzione

□ Gli elementi funzionali del sistema sono i seguenti. Le ruote dentate in rotazione vengono caratterizzate attraverso i loro momenti d'inerzia I_1 e I_2 , mentre per l'elasticità dell'albero si considera la rigidezza torsionale K_t .

Per quanto riguarda i cuscinetti, sede di dissipazione di energia, li si schematizza

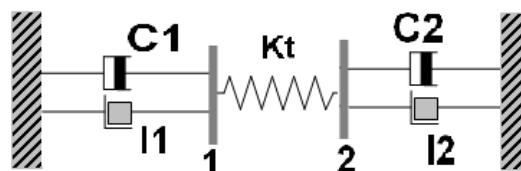


Figura 3.5

sotto questo punto di vista attraverso un'elemento smorzatore viscoso di tipo torsionale con caratteristica lineare; si hanno quindi i parametri C_1 e C_2 .

Dal momento che i cuscinetti sono collegati con il telaio, un estremo dei rispettivi elementi a parametri concentrati C_1 e C_2 è evidentemente connesso con il telaio. Gli elementi inerziali I_1 e I_2 hanno sempre un estremo collegato con il riferimento assoluto.

Considerando le rotazioni θ_1 e θ_2 , gli elementi I_1 e C_1 condividono la stessa rotazione θ_1 e parimenti gli elementi I_2 e C_2 condividono la stessa rotazione θ_2 .

La deformazione torsionale dell'albero, descritta dal parametro K_t , è invece legata alla rotazione relativa $\theta_1 - \theta_2$ tra le due ruote dentate attraverso le quali "passano" le coppie M_1 e M_2 . Ne segue che nessuno dei due estremi dell'elemento funzionale K_t risulta collegato al telaio, ma ai punti $1 = \theta_1$ e $2 = \theta_2$.

Dalle precedenti considerazioni il sistema si trasforma come in Figura 3.5 e quindi si perviene allo schema equivalente a impedenze in Figura 3.6.

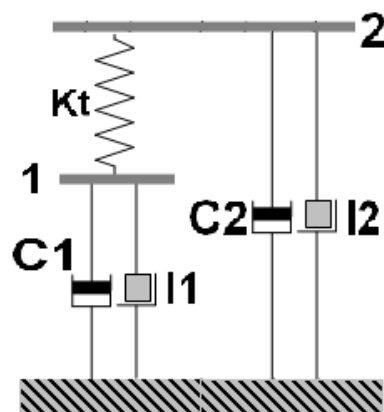


Figura 3.6

[b] Dallo schema equivalente a impedenze Z_{I1} e Z_{C1} risultano in parallelo così come Z_{I2} e Z_{C2} .

L'impedenza Z_{Kt} è in serie con il blocco formato dalle impedenze Z_{I2} e Z_{C2} .

Ne segue che, usando le espressioni delle impedenze dei sistemi rotazionali in Tabella 3.2 a pagina 31, l'impedenza globale risulta⁵

$$Z_g = C_1 + i\omega I_1 + \frac{\frac{K_t}{i\omega}(C_2 + i\omega I_2)}{\frac{K_t}{i\omega} + C_2 + i\omega I_2}$$

Si noti che il sistema meccanico studiato è un quadripolo⁶. Le grandezze caratteristiche di questo quadripolo meccanico il cui prodotto è dimensionalmente omogeneo a una potenza sono, com'è facilmente intuibile, la velocità angolare $\dot{\theta}$ e la coppia M , in particolare $\dot{\theta}_1$ e M_1 all'ingresso e $\dot{\theta}_2$ e M_2 all'uscita.

⁵Si ricorda che, date n impedenze meccaniche Z_1, Z_2, \dots, Z_n collegate in serie, la resistenza equivalente Z_{eq} è definita come

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{Z_j}$$

Ma nel caso di due sole impedenze, Z_1 e Z_2 , è più utile usare direttamente la relazione

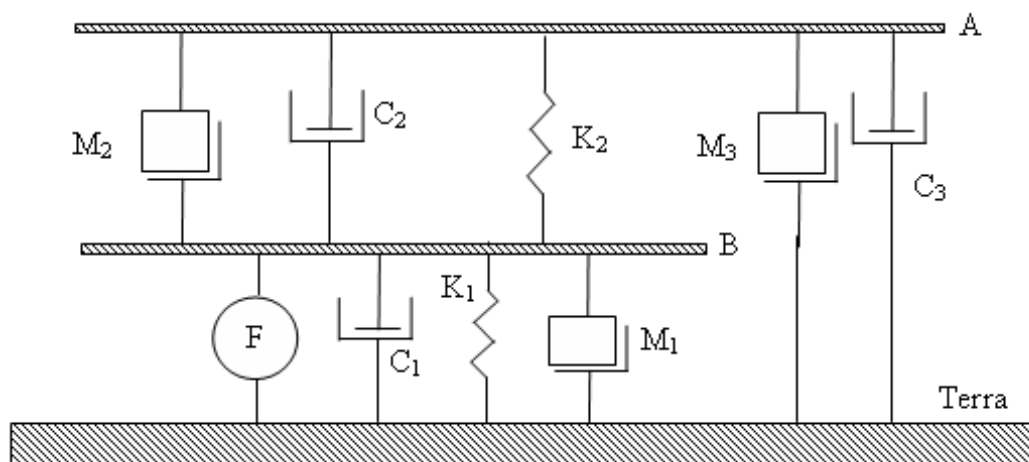
$$Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

che deriva direttamente dalla precedente con semplici passaggi.

⁶Si considera tale quell'elemento costituito da un insieme di bipoli passivi collegati da una rete di interconnessioni, comunque complessa, e accessibile all'esterno mediante due terminali d'ingresso e due di uscita.

La rappresentazione più usata è quella in cui gli elementi sono caratterizzati dalla loro impedenza e il quadripolo è descritto da una matrice a valori complessi detta matrice delle impedenze meccaniche.

Esercizio 22. *Determinare le caratteristiche del trasduttore capace di misurare la forza trasmessa al punto A del sistema meccanico rappresentato in figura, con un effetto di inserzione inferiore allo 0.1%*



Soluzione

Dallo schema del sistema meccanico si perviene facilmente allo schema equivalente in Figura 3.7, in cui è anche stata aggiunta l'impedenza meccanica del trasduttore (un dinamometro a molla di rigidezza K_u) per misurare la forza trasmessa al punto A .

Usando le espressioni delle impedenze meccaniche per i sistemi traslazionali in Tabella 3.2 a pagina 31, le espressioni delle impedenze equivalenti Z_1 , Z_2 e Z_3 sono

$$Z_1 = C_1 + \frac{K_1}{i\omega} + M_1 i\omega$$

$$Z_2 = C_2 + \frac{K_2}{i\omega} + M_2 i\omega$$

$$Z_3 = C_3 + M_3 i\omega$$

mentre l'espressione dell'impedenza meccanica del dinamometro è

$$Z_u = \frac{K_u}{i\omega}$$

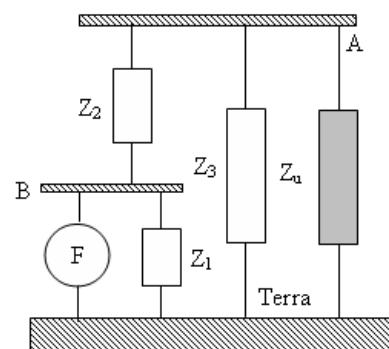


Figura 3.7

La determinazione dell'impedenza globale Z_g si ottiene facilmente osservando in Figura 3.7 che Z_1 e Z_2 sono topologicamente in serie, ma meccanicamente in parallelo, e che l'impedenza equivalente Z_{12} tra Z_1 e Z_2 è meccanicamente in serie con Z_3 . Pertanto si ha

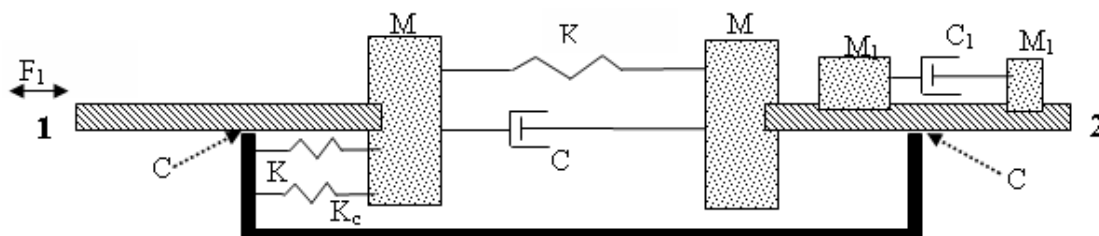
$$Z_g = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3$$

L'espressione da utilizzare per prendere in esame l'effetto di inserzione è la (3.1) a pagina 28, dalla quale discende la relazione

$$\frac{|Z_g|}{|Z_u|} < \epsilon_p = 0.001 \quad \text{ovvero} \quad Z_u > \frac{1}{\epsilon_p} Z_g = 1000 Z_g$$

Esercizio 23. La Figura rappresenta uno schema meccanico in cui l'ingresso è costituito dal generatore di forza nel punto 1. Il moto viene trasmesso al punto 2 tramite due aste rigide libere di scorrere orizzontalmente in riferimento alla scatola vincolata a terra (linea grossa).

- Si determini il sistema equivalente col metodo delle impedenze meccaniche.
- Si calcoli la matrice delle impedenze meccaniche del quadripolo considerato.
- Si determini il valore della rigidità K_c del comparatore tale che l'errore di inserzione nella misura dello spostamento del punto 1 sia, in modulo, inferiore all'1% quando il punto 2 è bloccato.



Soluzione

[a] Per prima cosa si osservi che le 2 masse M_1 , collegate dallo smorzatore lineare C_1 , sono rigidamente connesse all'asta 2. Ne consegue che non c'è moto relativo tra le masse e di conseguenza lo smorzatore, essendo un elemento meccanico sensibile alla velocità relativa tra due punti, non ha alcun ruolo attivo nel sistema in esame.

Le due masse M_1 contribuiscono invece dal punto di vista inerziale, dal momento che, muovendosi con l'asta 2, esse sono animate da moto traslatorio.

Fatte queste considerazioni preliminari, si hanno tutti gli elementi per passare facilmente dallo schema del sistema meccanico disegnato allo schema equivalente in Figura 3.8 e da questo allo schema in Figura 3.9a.

Prestazioni statiche degli strumenti

La conoscenza delle caratteristiche statiche di uno strumento di misura o di una catena di misura¹ ha molta importanza per ottenere misure affidabili e per poter analizzare criticamente i valori misurati.

Poiché è ovvio che nulla è invariante nel tempo, il termine statico va interpretato in questi termini: ossia che il comportamento di strumenti di misura e i parametri di ingresso degli strumenti stessi possano essere ritenuti con buon livello di approssimazione costanti entro un certo intervallo di tempo. Tale intervallo di tempo può essere per esempio il periodo di effettuazione delle misure oppure, in relazione all'invarianza delle prestazioni di uno strumento, il periodo di taratura, che può anche essere di alcuni mesi.

Per determinare le caratteristiche statiche di uno strumento giocano un ruolo essenziale la modellizzazione del comportamento dello strumento o della catena di misura (per determinare i fenomeni fisici che intervengono e quindi identificare le grandezze fisiche verso le quali si può avere sensibilità) e la taratura statica. In questo contesto giova ricordare che i coefficienti di sensibilità², invece di essere calcolati, sono talvolta determinati sperimentalmente proprio attraverso l'operazione di taratura statica.

Infatti scopo della taratura statica è quello di determinare la sensibilità dello strumento all'ingresso principale g_i e agli ingressi di disturbo interferenti g_{di} e modificanti g_{dm} e di determinare tutte le caratteristiche metrologiche³ significative per lo strumento che sono state messe in evidenza nella precedente fase di modellizzazione teorica. Ciò si ottiene ponendo lo strumento, "isolato del resto del mondo", in un ambiente controllato e variando uno alla volta tutti gli ingressi, mantenendo costanti gli altri, e registrando le uscite⁴.

¹Per catena di misura s'intende l'insieme degli strumenti collegati tra loro mediante i quali il parametro d'ingresso viene via via elaborato fino a ottenere in uscita il valore di lettura. In generale una catena di misura può essere composta dai seguenti elementi: *sensore*, *sistema di trasmissione*, *sistema di conversione* (attivo o passivo), *sistema di elaborazione* (amplificatore, filtri, convertitore analogico-digitale, ecc.), *sistema di memorizzazione* (memorie elettroniche, nastri magnetici, fotocamere, ecc.), *sistema di presentazione* (display, scale graduate, uscite sonore, ecc.).

²Come esempio di loro utilizzo si veda la (2.1) a pagina 14.

³Risoluzione, linearità, ripetibilità, riproducibilità, isteresi, deriva.

⁴La misura delle grandezze d'ingresso e d'uscita deve essere eseguita con strumenti più accurati dello

Per quanto riguarda la determinazione della sensibilità statica di uno strumento all'ingresso principale S si ha la relazione

$$S_s = \frac{dg_u}{dg_i} \quad (4.1)$$

(è la pendenza della curva di taratura) che nel caso di strumenti lineari (la derivata è costante) diviene

$$S_s = \frac{g_u}{g_i} \quad (4.2)$$

===== O ===== O ===== O =====

In questo capitolo sono anche proposti alcuni esercizi (da 28 a 30 nelle pagine 47–50) relativi alla determinazione della sensibilità di sistemi di misura coinvolgenti gli estensimetri elettrici a resistenza metallici (e.r.m.). Per alcuni brevi richiami sugli estensimetri e.r.m. si rimanda al Capitolo 8 a pagina 127.

Si ricorda che il fattore di taratura o gage factor K per ciascun tipo di un estensimetro si determina per via statistica estraendo un campione significativo di estensimetri dall'intera produzione industriale, misurando le diverse risposte degli estensimetri dal campione incollati su opportuni elementi elastici ed elaborando i dati ottenuti secondo i metodi dell'analisi statistica.

Valori tipici del fattore di taratura K per gli estensimetri e.r.m. sono vicini a 2. Tali dispositivi trovano maggiore applicazione per la loro risposta lineare entro un campo sufficientemente ampio (portata fino a 3000 ppm), un costo relativamente contenuto, una buona affidabilità per durate dell'ordine di anni unita a una relativa semplicità di utilizzo.

strumento da tarare. L'ingresso deve essere noto con incertezza inferiore di almeno un ordine di grandezza rispetto all'incertezza del sistema sottoposto a taratura. Così, se per esempio si tara uno strumento in classe di precisione 1%, si deve applicare la grandezza d'ingresso con un'incertezza inferiore allo 0.1%.

Esercizio 24. Si determini la sensibilità statica di uno strumento riferito al seguente modello teorico:

$$g_u = k_1 g_i + k_2 \quad (g_u = \text{uscita}; g_i = \text{ingresso}; k_1 \text{ e } k_2 \text{ costanti})$$

sapendo che:

- in corrispondenza ad un ingresso nullo si misura, un'uscita di 2.44 ± 0.05 u.m. (unità di misura);
- in corrispondenza ad un ingresso di 22.38 ± 0.05 u.m. si misura 10 volte un'uscita che ha valore medio di 4520.384 u.m. e scarto quadratico di 0.24 u.m.

Soluzione

La sensibilità statica S_s è espressa dalla relazione (4.1) a pagina 40, poiché è evidente che il modello non è lineare. Nel caso qui in esame si ricava

$$S_s = \frac{dg_u}{dg_i} = 2k_1 g_i$$

Vista l'espressione che assume S_s , è necessario calcolare il valore numerico delle costanti e l'incertezza associata alla costante k_1 .

Per le costanti si ha:

$$\begin{cases} 2.44 = k_2 \\ 4520.384 = k_1(22.38)^2 + 2.44 \end{cases} \quad \begin{cases} 2.44 = k_2 \\ k_1 = \frac{4520.384 - 2.44}{22.38^2} = 9.020 \end{cases}$$

Per quanto riguarda le incertezze, assumendo un fattore di confidenza del 95% e $t=2.3$, essendo $\nu=9$ (cfr. la Tabella 2.1 a pagina 11), si ottiene:

$$i_{k_2} = 0.05 \text{ u.m.}; \quad i_{g_i} = 0.05 \text{ u.m.}; \quad i_{g_u} = 0.05 \text{ u.m.}; \quad i_{g_u} = \frac{2.3 \cdot 0.24}{\sqrt{10}} = 0.17 \text{ u.m.}$$

Dal modello teorico si ricava

$$k_1 = \frac{g_u - k_2}{g_i^2}$$

che è la relazione necessaria per il calcolo dell'incertezza associata alla costante k_1 tramite la (2.1) a pagina 14, cioè utilizzando la legge di propagazione dell'incertezza o legge di Kline-McKlintock nel caso di grandezze in ingresso non correlate. A tale proposito vanno chiaramente prima determinate le espressioni dei coefficienti di sensibilità. Si ha:

$$\theta_{g_u} = \frac{\partial k_1}{\partial g_u} = \frac{1}{g_i^2}; \quad \theta_{k_2} = \frac{\partial k_1}{\partial k_2} = -\frac{1}{g_i^2}; \quad \theta_{g_i} = \frac{\partial k_1}{\partial g_i} = -2 \frac{g_u - k_2}{g_i^3}$$

e quindi

$$i_{k_1} = \sqrt{(\theta_{g_u} i_{g_u})^2 + (\theta_{k_2} i_{k_2})^2 + (\theta_{g_i} i_{g_i})^2} = 0.04 \text{ u.m.}$$

L'incertezza associata alla sensibilità statica viene valutata usando sempre la (2.1), ossia

$$i_s = \sqrt{(\theta_{k1} i_{k2})^2 + (\theta_{gi2} i_{gi2})^2}$$

in cui

$$\theta_{k1} = \frac{\partial S_s}{\partial k_1} = 2g_i; \quad \theta_{gi} = \frac{\partial S_s}{\partial g_i} = 2k_i$$

Esercizio 25. Si determini la sensibilità statica di uno strumento avente caratteristica lineare sapendo che:

- in corrispondenza ad un ingresso nullo si misura, per 10 volte, un'uscita che ha valore medio di 420.15 u.m. (unità di misura) e scarto quadratico di 0.55 u.m.;
- in corrispondenza ad un ingresso di 852.4 ± 0.6 u.m. si misura 30 volte un'uscita che ha valore medio di 3350.65 u.m. e scarto quadratico di 0,30 u.m.

Soluzione

Dal momento che lo strumento ha caratteristica lineare, la sensibilità statica S_s è espressa dalla relazione (4.2) cioè

$$S_s = \frac{g_u}{g_i}$$

Essa va tuttavia modificata per far comparire i termini corrispondenti ai valori effettivamente misurati, ossia uscita in corrispondenza a un ingresso nullo e uscita corrispondente a un certo ingresso diverso da zero. In altre parole (si ricordi infatti che la sensibilità statica è supposta per ipotesi costante)

$$S_s = \frac{g_{u2} - g_{u1}}{g_{i2} - g_{i1}} = \frac{g_{u2} - g_{u1}}{g_{i2}}$$

Sostituendo i valori, si ottiene

$$S_s = \frac{3350.65 - 420.15}{852.4} = 3.438 \frac{\text{u.m.}_5}{\text{u.m.}}$$

Per quanto riguarda la valutazione dell'incertezza associata alla sensibilità statica i_s si può utilizzare la legge di propagazione dell'incertezza o legge di Kline-McKlintock nel caso di grandezze in ingresso non correlate.

⁵Il significato di questa particolare scrittura per l'unità di misura associata alla sensibilità statica va così interpretata. Si ha un valore adimensionale solo se l'unità di misura dell'uscita è la stessa di quella dell'ingresso. Però chiaramente in generale ciò può non essere verificato se nello strumento, come spesso accade, si ha almeno un elemento funzionale che opera una trasformazione di variabile.

A tale proposito vanno chiaramente prima determinate le incertezze sulle varie grandezze misurate con livello di confidenza del 95% e le espressioni dei coefficienti di sensibilità. Si ha ($i_{gi1} = 0$):

$$i_{gi1} = 0 \text{ u.m.}; \quad i_{gi2} = 0.6 \text{ u.m.}; \quad i_{gu1} = \frac{2.3 \cdot 0.55}{\sqrt{10}} = 0.4 \text{ u.m.} \quad i_{gu2} = \frac{2.0 \cdot 0.30}{\sqrt{30}} = 0.11 \text{ u.m.}$$

$$\theta_{gu2} = \frac{\partial S_s}{\partial g_{u2}} = \frac{1}{g_{i2}}; \quad \theta_{gu1} = \frac{\partial S_s}{\partial g_{u1}} = -\frac{1}{g_{i2}}; \quad \theta_{gi2} = \frac{\partial S_s}{\partial g_{i2}} = -\frac{g_{u2} - g_{u1}}{g_{i2}^2}$$

e quindi per la (2.1) a pagina 14

$$i_s = \sqrt{(\theta_{gu2} i_{gu2})^2 + (\theta_{gu1} i_{gu1})^2 + (\theta_{gi2} i_{gi2})^2} = 0.002 \frac{\text{u.m.}}{\text{u.m.}}$$

Allora $S_s = 3.438 \pm 0.002 \frac{\text{u.m.}}{\text{u.m.}}$ (95%).

Esercizio 26. Per la determinazione della sensibilità statica di un dinamometro a molla, con caratteristiche lineari, si ripete per 15 volte la misura della deflessione sotto carico di $200 \pm 0.001\%$ N, ottenendo i valori di spostamento (in mm):

$$\begin{array}{ccccc} 15.18; & 15.10; & 15.56; & 15.00; & 15.22; \\ 15.74; & 15.33; & 16.18; & 15.25; & 15.40; \\ 15.20; & 15.31; & 15.28; & 15.55; & 15.37; \end{array}$$

Si calcoli il valore della sensibilità e della relativa incertezza con un livello di confidenza del 95%, assumendo che sia stata verificata l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei dati.

Soluzione

Dalla definizione di sensibilità statica S_s sotto la condizione di linearità si ha

$$S_s = \frac{g_u}{g_i} = \frac{x}{F}$$

Poiché viene detto che risulta verificata l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei dati, è possibile applicare il criterio di Chauvenet per formulare un giudizio di accettabilità o meno dei dati acquisiti in base a considerazioni di tipo statistico. Certamente si distingue dagli altri il valore di 16.18 mm, ma la sua esclusione non può essere fatta a proprio gusto, ma – come detto – secondo un criterio oggettivo.

La Tabella 4.1 riassume i calcoli da svolgere sui dati al fine di utilizzare il criterio di Chauvenet. In essa con il simbolo z_i^* si è indicato l'i-esimo scarto ridotto, ossia la quantità $\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$.

La probabilità di Chauvenet è

$$p_c = 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{30} = 0.9667$$

x_i [mm]	z_i [mm]	z_i^2 [mm] ²	z_i^* [mm]
15.18	-0.20	0.04	-0.69
15.10	-0.28	0.0784	-0.97
15.56	0.18	0.0324	0.62
15.00	-0.38	0.1444	-1.31
15.22	-0.16	0.0256	-0.55
15.74	0.36	0.1296	1.24
15.33	-0.05	0.0025	-0.17
16.18	0.80	0.64	2.76
15.25	-0.13	0.0169	0.45
15.40	0.02	0.0004	0.07
15.20	-0.18	0.0324	-0.62
15.31	-0.07	0.0049	-0.24
15.28	-0.10	0.01	-0.34
15.55	0.17	0.0289	0.59
15.37	-0.01	0.0001	0.03
$\Sigma = 230.67$		$\Sigma = 1.1865$	
$\bar{x}=15.38$	mm	$s_x = \sqrt{\frac{1.1865}{14}} = 0.29$ mm	

Tabella 4.1

x_i [mm]	z_i [mm]	z_i^2 [mm] ²
15.18	-0.14	0.0196
15.10	-0.22	0.0484
15.56	0.24	0.0576
15.00	-0.32	0.1024
15.22	-0.10	0.0100
15.74	0.42	0.1764
15.33	0.01	0.0001
15.25	-0.07	0.0049
15.40	0.08	0.0064
15.20	-0.12	0.0144
15.31	-0.01	0.0001
15.28	-0.04	0.0016
15.55	0.23	0.0529
15.37	0.05	0.0025
$\Sigma=214.49$	$\Sigma =$	0.4973
$\bar{x}=15.32$ mm	$s_x = \sqrt{\frac{0.4973}{13}} = 0.19$ mm	

Tabella 4.2

cui corrisponde $z_{lim} = 2.13$. Tuttavia, in assenza della tabella con i valori precisi degli scarti limite, si può osservare che (vedi la Tabella 2.2 a pagina 12) per $n=10$ si ha $z_{lim} \approx 2$ e per $n=20$ $z_{lim} \approx 2,25$. Il valore approssimato dello scarto limite per $n=14$ sarà allora una via di mezzo tra i due e comunque, in questo caso, sicuramente minore di 2.76 mm, che è lo scarto ridotto associato al valore 16.18 mm. Dal momento che $2.76 > z_{lim}$, il dato 16.18 mm va dunque scartato.

Dei 14 valori rimanenti è necessario ricalcolare la media e lo scarto quadratico. I risultati sono riassunti in Tabella 4.2.

La sensibilità statica del dinamometro risulta essere

$$S_s = \frac{x}{F} = \frac{15.32}{200} = 76.60 \cdot 10^{-3} \frac{mm}{N}$$

Si può ora procedere al calcolo delle incertezze.

L'incertezza sulla forza i_F risulta

$$i_F = \frac{200 \cdot 0.001}{100} = 0.002 \text{ N}$$

e dunque si ha $F = 200.000 \pm 0.002 \text{ N}$.

Per quanto riguarda l'incertezza i_x associata allo spostamento medio (si ricordi l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei dati) con un livello di confidenza del 95% si ha

$$i_x = \frac{2 \cdot 0.19}{\sqrt{14}} = 0.10 \text{ mm}$$

L'incertezza i_S relativa alla sensibilità statica può essere calcolata in prima approssimazione con la formula di propagazione (2.1), cioè

$$i_S = \sqrt{(\theta_F i_F)^2 + (\theta_x i_x)^2}$$

in cui

$$\theta_F = \frac{\partial S_s}{\partial F} = -\frac{x}{F^2}; \quad \theta_x = \frac{\partial S_s}{\partial x} = \frac{1}{F}$$

Si ottiene

$$i_S = \sqrt{\left(-\frac{15.32}{200^2} 0.002\right)^2 + \left(\frac{0.1}{200}\right)^2} = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{mm}{N}$$

Ne segue $S_s = (76.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-3} \text{ mm/N}$ (95%).

Esercizio 27. Si deve determinare la sensibilità di un dinamometro con caratteristica lineare. Con ingresso nullo si ha un'uscita nulla. Si ripete 7 volte la misura dell'ingresso di $522 \pm 5 \text{ N}$, ottenendo i seguenti valori di uscita in mm:

857.9 857.5; 857.8; 857.1; 858.1; 857.1; 857.5;

- a) Si assegni il valore della sensibilità dello strumento;
 b) Si assegni la relativa incertezza;

Soluzione

Dalla definizione di sensibilità statica S_s sotto la condizione di linearità si ha

$$S_s = \frac{g_u}{g_i} = \frac{x}{F}$$

[a] L'osservazione dei valori di spostamento non evidenzia alcun valore macroscopicamente discordante.

In Tabella 4.3 sono riassunti i calcoli necessari per la determinazione del valore dello spostamento medio e dello scarto quadratico.

La sensibilità statica del dinamometro risulta essere

$$S_s = \frac{x}{F} = \frac{857.6}{522} = 1.64 \frac{mm}{N}$$

[b] Si può ora procedere al calcolo della incertezza associata alla sensibilità statica, osservando che $i_F=5$ N è un dato del problema.

L'incertezza i_x associata allo spostamento medio con un livello di confidenza del 95% è (per $\nu=7-1=6$ gradi di libertà $t=2.4$ secondo la Tabella 2.1 a pagina 11)

$$i_x = \frac{2.4 \cdot 0.4}{\sqrt{7}} = 0.4 \text{ mm}$$

L'incertezza i_S relativa alla sensibilità statica può essere calcolata in prima approssimazione con la formula di propagazione (2.1), cioè

$$i_S = \sqrt{(\theta_F i_F)^2 + (\theta_x i_x)^2}$$

in cui

$$\theta_F = \frac{\partial S_s}{\partial F} = -\frac{x}{F^2}; \quad \theta_x = \frac{\partial S_s}{\partial x} = \frac{1}{F}$$

Si ottiene

$$i_S = \sqrt{\left(-\frac{857.6}{522^2} 5\right)^2 + \left(\frac{0.4}{522}\right)^2} = 0.02 \frac{mm}{N}$$

Ne segue $S_s = 164 \pm 0.02 \text{ mm/N}$ (95%).

x_i [mm]	z_i [mm]	z_i^2 [mm] ²
857.9	0.3	0.09
857.5	-0.1	0.01
857.8	0.2	0.04
857.1	-0.5	0.25
858.1	0.5	0.25
857.1	-0.5	0.25
857.5	-0.1	0.01
$\Sigma=6003.0$	$\Sigma =$	0.90
$\bar{x}=857.6 \text{ mm}$	$s_x=$	$\sqrt{\frac{0.90}{6}} = 0.4 \text{ mm}$

Tabella 4.3

Si osserva che, a causa del ridotto numero di dati sullo spostamento, sarebbe stato più corretto applicare la formula di Welch-Sattelwhite. In ogni caso il risultato trovato non cambia.

===== O ===== O ===== O =====

Esercizio 28. Una cella di carico è costituita da quattro estensimetri elettrici a resistenza metallici (e.r.m.) incollati su un cilindro di diametro D e misura il carico N in direzione assiale, come schematizzato in Figura.

a) Si indichi la collocazione e l'orientazione degli estensimetri sulla cella di carico e la disposizione sul ponte di misura giustificando la scelta;

b) Si determini la sensibilità della cella in funzione della tensione di alimentazione del ponte V_0 ;

c) Si calcoli la sensibilità della cella quando $V_0 = 10.0 \pm 0.2$ V.

Siano:

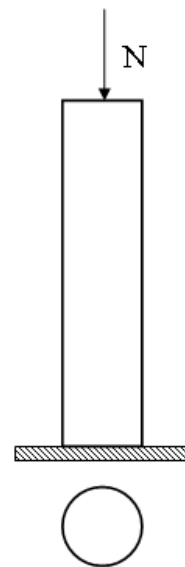
Diametro $D=2,00$ in

Modulo di Young $E=205$ GPa

Coefficiente di Poisson $\nu=0.30$

Fattore di taratura $K=2,055 \pm 0.5\%$

Resistenza dell'estensimetro $R_0=120 \pm 0.3\%$ Ω



Soluzione

[a] La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.3 a pagina 128. Con questa configurazione si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti dalla temperatura nonché la cancellazione di eventuali effetti dovuti alla flessione.

[b] La sensibilità S della cella è data dal rapporto $S = \frac{\Delta V_m}{N}$.

Sotto il carico N la struttura subisce una deformazione assiale pari a $\epsilon_n = \frac{N}{EA}$ e una contrazione (deformazione) trasversale $\epsilon_t = -\nu \epsilon_n = -\nu \frac{N}{EA}$. Sostituendo queste espressioni nella (8.1) a pagina 127 tenendo conto della disposizione fisica degli estensimetri sul corpo e della loro collocazione circuitale nel ponte di Wheatstone, si ha:

$$\frac{\Delta V_m}{V_0} = \frac{K}{4} \left(\frac{N}{EA} + \nu \frac{N}{EA} + \frac{N}{EA} + \nu \frac{N}{EA} \right) = \frac{K}{2} \frac{N}{EA} (1 + \nu)$$

da cui segue

$$S = \frac{\Delta V_m}{N} = \frac{K V_0}{2} \frac{1 + \nu}{EA}$$

funzione di V_0 .

Poiché $1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$, si ha $A = \frac{\pi}{4} D^2 = 0,00203 \text{ m}^2$. Sostituendo questo valore con gli altri nella relazione che consente di calcolare la sensibilità della cella si ottiene

$$S = \frac{\Delta V_m}{N} = \frac{2,055}{2} \frac{1 + 0,3}{205 \cdot 10^9 \cdot 2,03 \cdot 10^{-3}} = 3,21 \cdot 10^{-9} V_0 V/N$$

[c] Nel momento in cui $V_0 = 10,0 \text{ V}$, si ottiene $S = 3,21 \cdot 10^{-8} V/N$.

Per quanto riguarda l'incertezza, si noti che i due dati di interesse accompagnati da incertezza nella relazione

$$S = \frac{\Delta V_m}{N} = \frac{K V_0}{2} \frac{1 + \nu}{EA}$$

sono il gage factor K e la tensione di alimentazione del ponte V_0 . Si ha infatti:

$$V_0 = 10,0 \pm 0,2 \text{ V} \Rightarrow i_V = 0,2 \text{ V}$$

$$K = 2,055 \pm 0,5\% = 2,055 \pm 0,01 \Rightarrow i_K = 0,01$$

Per calcolare l'incertezza i_S che caratterizza la sensibilità S della cella in esame si utilizza la relazione (2.1) a pagina 14, supponendo le grandezze in ingresso non correlate tra di loro. I coefficienti di sensibilità sono

$$\theta_V = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{K(1 + \nu)}{2EA}; \quad \theta_K = \frac{\partial S}{\partial K} = \frac{V_0(1 + \nu)}{2EA}$$

e quindi si ottiene

$$i_S = \sqrt{(\theta_V i_V)^2 + (\theta_K i_K)^2} = 6,6 \cdot 10^{-10} V/N$$

La sensibilità è $S = (3,21 \pm 0,07) \cdot 10^{-8} V/N$.

Esercizio 29. Una cella di carico in acciaio al carbonio è costituita da quattro estensimetri elettrici a resistenza incollati su un elemento di sezione quadrata di lato $a = 20 \text{ mm}$ e lungo $L = 20 \text{ cm}$ vincolato e sollecitato come in Figura.

a) Si indichi la collocazione e l'orientazione degli estensimetri sulla cella di carico e la disposizione sul ponte di misura;

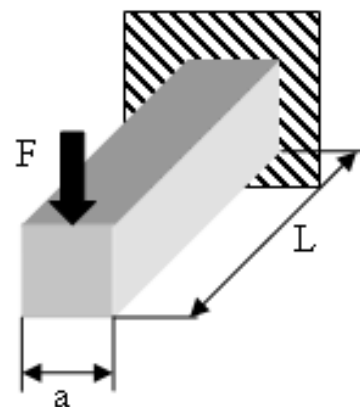
b) Si determini la sensibilità della cella quando il ponte è alimentato dalla tensione di $V_0 = 4,00 \pm 0,05 \text{ V}$.

Siano:

Coefficiente di Poisson $\nu = 0,30$

Fattore di taratura $K = 2,055 \pm 0,5\%$

Resistenza dell'estensimetro $R_0 = 120 \pm 0,3\% \Omega$



Soluzione

[a] La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è

simile a quella illustrata in Figura 8.2 a pagina 128. Con questa configurazione si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti della temperatura.

Il modello è chiaramente quello di una trave incastrata con forza F applicata all'estremo; gli estensimetri vengono incollati simmetricamente sulla forcina in modo che la superficie sia ortogonale alla direzione della forza che sollecita l'elemento meccanico in esame.

[b] Richiamando le formule che governano la flessione di una trave e i parametri caratterizzanti la sua sezione, per il caso in esame

$$I = \frac{1}{12}a^4$$

$$\sigma = \frac{M_f}{I}y = \frac{FL}{I} \frac{a}{2} = \frac{FL}{\frac{1}{12}a^4} \frac{a}{2} = \frac{6FL}{a^3}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{6FL}{Ea^3}$$

Tenendo conto della (8.1) a pagina 127 nel caso di misura della flessione a ponte completo di Wheatstone, si ha:

$$\frac{\Delta V_m}{V_0} = \frac{K}{4} 4\epsilon = K \frac{6FL}{Ea^3} = \frac{6KFL}{Ea^3}$$

Quindi l'espressione dello sbilanciamento ΔV_m è

$$\Delta V_m = \frac{6KFL}{Ea^3} V_0$$

In essa figura il modulo di Young del materiale il cui valore non figura tra i dati forniti dal problema. Tuttavia si sa dal testo che il materiale è un acciaio al carbonio, il cui modulo di Young si può assumere pari a $E=205$ GPa. Si tenga presente che per qualsiasi lega metallica di interesse pratico il relativo modulo di Young può essere ricavato consultando un manuale di ingegneria e di metallurgia.

Poiché la sensibilità è data dal rapporto $S = \frac{\Delta V_m}{F} S$, si ottiene

$$S = \frac{\Delta V_m}{F} = \frac{6KLV_0}{Ea^3} = \frac{6 \cdot 2.055 \cdot 0.20 \cdot 4.00}{205 \cdot 10^9 \cdot 0.02^3} = 6.01 \cdot 10^{-6} \text{ V/N}$$

Per quanto riguarda l'incertezza, si noti che i due dati di interesse accompagnati da incertezza nella relazione

$$S = \frac{\Delta V_m}{F} = \frac{6KLV_0}{Ea^3}$$

sono il gage factor K che caratterizza il modello di estensimetro utilizzato nella cella e la tensione di alimentazione del ponte di Wheatstone V_0 . Si ha infatti:

$$V_0 = 4.00 \pm 0.05 \text{ V} \Rightarrow i_V = 0.05 \text{ V}$$

$$K = 2.055 \pm 0.5\% = 2.055 \pm 0.01 \Rightarrow i_K = 0.01$$

Per calcolare l'incertezza i_S che caratterizza la sensibilità S della cella in esame si utilizza la relazione (2.1) a pagina 14, detta di Kline-McKlintock, supponendo le grandezze in ingresso non correlate tra di loro. I coefficienti di sensibilità sono

$$\theta_V = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{6L}{Ea^3}K; \quad \theta_K = \frac{\partial S}{\partial K} = \frac{6L}{Ea^3}V_0$$

e quindi si ottiene

$$i_S = \sqrt{(\theta_V i_V)^2 + (\theta_K i_K)^2} = 8.1 \cdot 10^{-8} \text{ V/N}$$

La sensibilità è $S = (6.01 \pm 0.08) \cdot 10^{-6} \text{ V/N}$.

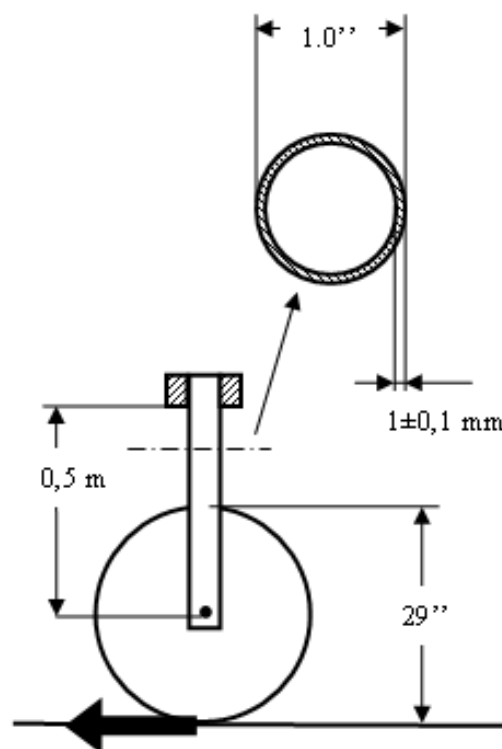
Esercizio 30. In Figura è schematizzata la forcella di un ciclomotore di diametro esterno D e spessore t su cui si vuole fare una misura della forza trasmessa dal fondo stradale in direzione del moto durante una frenata. Supponendo di effettuare la misura mediante l'applicazione di 2 estensimetri e.r.m. si determinino:

- la loro collocazione sulla forcella e rispetto all'asse di quest'ultima e la disposizione sul ponte di misura;
- la sensibilità nella misura della forza, supponendo di alimentare il ponte di misura con una tensione di 4.0 V e assumendo che il materiale sia un acciaio al carbonio.

Caratteristiche degli estensimetri:

Fattore di taratura: $K = 2,055 \pm 0,5\%$

Resistenza nominale: $R_0 = 120 \pm 0,3\% \Omega$



Soluzione

[a] La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.1 a pagina 128. Con questa configurazione si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti della temperatura. Per le altre due resistenze necessarie a completare il ponte si può assumere che il loro valore sia identico a quelle nominali degli estensimetri, cioè di 120 Ω , anche se per la soluzione dell'esercizio non è richiesta la conoscenza delle altre due resistenze del ponte.

Il modello è chiaramente quello di una trave incastrata con forza F applicata all'estremo. La forza assiale che agisce sulla forcella (anche la forza peso durante una frenata sollecita

la forcilla) viene in questo caso trascurata oppure si suppone che essa sia computata in modo opportuno cosicché di fatto sia possibile valutare solo la deformazione della forcilla conseguente alla flessione.

Gli estensimetri vengono incollati simmetricamente sulla forcilla in modo che la superficie sia ortogonale alla direzione della forza che sollecita l'elemento meccanico in esame e inoltre essi vengono collocati a una distanza L dalla forza F tale che essa sia la più grande possibile (tenendo conto degli effetti di bordo), poiché la sezione più sollecitata è ovviamente quella più vicina all'incastro. Per semplicità tale distanza L viene qui assunta coincidente con la distanza tra la forza F e la sezione d'incastro.

b La sensibilità S nella misura della forza F è data dal rapporto $S = \frac{\Delta V_m}{F}$.

Richiamando le formule che governano la flessione di una trave e i parametri caratterizzanti la sezione, per la forcilla in esame

$$I = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - t)^4]$$

(nelle relazioni devono figurare i parametri effettivamente misurati e in questo caso il diametro interno è determinato come $D-t$, se con t indica lo spessore della forcilla)

$$\sigma = \frac{M_f}{I} y = \frac{FL}{I} \frac{D}{2}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Tenendo conto della (8.1) a pagina 127 nel caso di misura a mezzo ponte di Wheatstone della flessione, si ha (indicando con V_0 la tensione che alimenta il ponte):

$$\frac{\Delta V_m}{V_0} = \frac{K}{2} \epsilon$$

Quindi l'espressione della sensibilità S è

$$S = \frac{\Delta V_m}{F} = \frac{K}{2} \frac{FL}{\frac{\pi}{64} [D^4 - (D - t)^4]} \frac{D}{2} = \frac{16 L K D}{E \pi [D^4 - (D - t)^4]} V_0$$

E' necessario effettuare alcune semplici conversioni tra unità di misura allo scopo di riportare i valori in pollici in m. Ora, poiché $1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$, si ha:

$$D = 1 \text{ in} = 1 \text{ in } 0.0254 \text{ m/in} = 0.0254 \text{ m}$$

$$29 \text{ in } 0.0254 \text{ m/in} = 0.7366 \text{ m}$$

Essendo inoltre

$$L = 0.5 + 0.7366/2 = 0.87 \text{ m}$$

$$D-t = 0.0254 - 0.001 = 0.0244 \text{ m}$$

e, assumendo per un acciaio al carbonio un valore $E = 205 \text{ GPa}$ per il modulo di Young, si ottiene

$$S = \frac{16 \cdot 0.87 \cdot 2.055 \cdot 0.0254}{205 \cdot 10^9 \pi [0.0254^4 - 0.0244^4]} 4.0 = 7.305 \cdot 10^{-5} = 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{V}{N}$$

Al fine di determinare l'incertezza i_S , si osservi che le grandezze che nella formula che esprime S sono accompagnate da incertezza sono lo spessore t della forcina e il fattore di taratura K dell'estensimetro e.r.m.; tali incertezze sono $i_t=0.1 \text{ mm} = 0.0001 \text{ m}$ e $i_K=2.055 \times 0.005=0.01$.

Si procede quindi a ricavare le espressioni dei coefficienti di sensibilità. Si ha

$$\theta_t = \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{64LKD(D-t)^3}{E\pi[D^4 - (D-t)^4]^2}V_0; \quad \theta_K = \frac{\partial S}{\partial K} = \frac{16LD}{E\pi[D^4 - (D-t)^4]}V_0$$

Applicando la formula di propagazione per grandezze non correlate (2.1) a pagina 14 si ottiene

$$i_S = \sqrt{(\theta_t i_t)^2 + (\theta_K i_K)^2} = 6.9 \cdot 10^{-6} \frac{V}{N}$$

Il risultato è quindi $S=(7.3 \pm 0.7) \cdot 10^{-5} \text{ V/N}$.

Prestazioni dinamiche degli strumenti

E' noto che tra le varie tecniche di calcolo della risposta forzata di regime di un sistema lineare vi è quella di utilizzare ingressi di tipo armonico. La funzione complessa $T(i\omega)$ che si ottiene ponendo $s=i\omega$ nella funzione di trasferimento $T(s)$ prende il nome di funzione di trasferimento sinusoidale.

Tra i vari metodi per rappresentare la funzione $T(i\omega)$ vi sono i diagrammi logaritmici, noti come diagrammi di Bode, per il cui tracciamento la funzione di trasferimento sinusoidale viene opportunamente fattorizzata (calcolando gli zeri dei polinomi a numeratore e a denominatore), assumendo la forma generale

$$T(i\omega) = K \frac{(i\omega)^{\alpha-\alpha'} \prod_{k=1}^s (1 + i\omega\tau_k)^{b_k} \prod_{k=1}^t [1 + 2\zeta_k(\frac{i\omega}{\omega_{nk}}) + (\frac{i\omega}{\omega_{nk}})]^{\gamma_k}}{\prod_{k=1}^{s'} (1 + i\omega\tau'_k)^{b'_k} \prod_{k=1}^{t'} [1 + 2\zeta'_k(\frac{i\omega}{\omega'_{nk}}) + (\frac{i\omega}{\omega'_{nk}})]^{\gamma'_k}} \quad (5.1)$$

Le funzioni che figurano nella (5.1) e che sono i fattori dei due polinomi della funzione di trasferimento sinusoidale hanno delle forme particolari, i cui diagrammi asintotici sono riportati in letteratura assieme alle curve di correzione per la rappresentazione dei termini del primo e del secondo ordine.

La conoscenza dei grafici asintotici del modulo e della fase delle funzioni elementari è essenziale per tracciare il diagramma di Bode asintotico di una generica funzione $T(i\omega)$. Per le proprietà dei logaritmi, nel passaggio in scala logaritmica il prodotto tra due quantità si trasforma nella somma algebrica dei loro logaritmi. Da ciò segue che, noti i grafici asintotici delle funzioni elementari che compongono una data funzione di trasferimento, la costruzione del grafico asintotico del modulo e della fase (così come di quello effettivo) avviene per ogni valore di $\log(\omega)$ per semplice somma algebrica dei valori assunti da ogni funzione elementare.

Pur non essendo richieste nelle applicazioni numeriche la rappresentazione dei diagrammi completi di Bode, ma solo di quelli asintotici, alcune considerazioni riguardanti le correzioni al grafico asintotico del modulo sono particolarmente significative per la determinazione approssimata della banda passante a -3 dB. A tale proposito giova mettere in evidenza i seguenti aspetti:

- Nel grafico delle curve di correzione per la rappresentazione completa dei termini di primo ordine per il modulo la correzione è di ± 3 dB in corrispondenza del punto di rottura e per la fase è pari a zero. Il primo dato è particolarmente significativo per la determinazione approssimata della banda passante a -3 dB.
- I grafici con le curve di correzione per la rappresentazione completa dei termini di secondo ordine sono più complessi, essendo parametrici nel rapporto di smorzamento ζ . Ne segue che la correzione da apportare in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n non ha un unico valore (come visto per i termini di primo grado), ma va computato sulla base del valore di ζ . Di conseguenza risulta più complesso determinare l'estremo della banda passante a -3 dB in presenza di uno o più termini del secondo ordine. In linea di massima per il modulo della funzione di trasferimento si può notare che:
 1. per $\zeta=1$ la correzione è pari a -6 dB (infatti la funzione è fattorizzabile con uno punto di rottura doppio. A ciascuna soluzione compete una correzione di -3 dB). La correzione è di -3 dB a circa $0.7\omega_n$.
 2. per $\zeta=0,5$ la correzione è nulla in corrispondenza della frequenza naturale.
 3. per $\zeta \leq 0.3$ la correzione di -3 dB cade in corrispondenza di valori via via più bassi rispetto alla frequenza naturale ω_n , da $0,9\omega_n$ per $\zeta=0,3$ a $0,4\omega_n$ per $\zeta=0,05$.

Alcune note sui diagrammi di Bode nel testo. Si è ritenuto importante dal punto di vista didattico riportare anche i grafici asintotici del modulo e della fase delle varie funzioni elementari che a numeratore e a denominatore costituiscono di volta in volta le varie funzioni di trasferimento. Dai parametri caratteristici è facile ricondurre ciascun grafico elementare alla rispettiva funzione anche in assenza di una legenda. A tale diagramma fa seguito quello complessivo della funzione di trasferimento, nel quale è anche graficato l'effettivo andamento della funzione $T(i\omega)$.

Essendo il testo stampato in bianco e nero, si è reso necessario stabilire nei diagrammi di Bode una convenzione di stile per le linee per renderle di più facile lettura. Nello specifico:

1. sia nel diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento $T(i\omega)$ che in quello della fase:
 - in linea continua è rappresentato il grafico asintotico
 - in linea tratteggiata è rappresentato il grafico reale
2. per un qualsiasi segnale sinusoidale nel diagramma di Bode del modulo
 - in linea tratteggiata ne è rappresentato l'ingresso e, in caso di sovrapposizione, con una croce è indicato l'estremo del segmento;
 - in linea continua ne è rappresentata l'uscita, in caso di sovrapposizione, con un pallino è indicato l'estremo del segmento.

Esercizio 31. *Rappresentare in un diagramma temporale un segnale sinusoidale di ampiezza unitaria e frequenza di 1Hz cui è sovrapposto un disturbo interferente sinusoidale di ampiezza 0.2 e frequenza di 50Hz.*

Soluzione

Nel dominio del tempo il segnale $g(t)$ è somma delle funzioni sinusoidali che seguono (si ricorda che $\omega = 2\pi f$, con f la frequenza delle sinusoidi), in cui, per semplicità, si è posto per entrambi la fase uguale a zero:

- (1) $g_s = 1\sin(2\pi 1t)$
- (2) $g_{d1} = 0.2\sin(2\pi 50t)$

La costruzione del diagramma temporale richiesto può essere fatta utilizzando un doppio decimetro con scala graduata in mm. In generale per prima cosa si deve considerare che per rappresentare velocemente e in modo approssimato un periodo di una funzione sinusoidale sono necessari almeno 4 punti sull'asse delle ascisse e precisamente quelli cui corrispondono i due zeri e i due massimi.

Nel caso di un segnale somma di due segnali sinusoidali, tutto sta a scegliere opportunamente la scala dei tempi ossia le lunghezze in mm con cui rappresentare un intero ciclo oppure mezzo ciclo del segnale a minore frequenza e i vari cicli del secondo segnale a frequenza maggiore. Chiaramente il rapporto che lega le frequenze dei due segnali unisce anche i tratti di asse scelti per rappresentarne un periodo.

In altre parole e facendo riferimento ai valori dati, visto che la frequenza del disturbo interferente è 50 volte più alta di quella del segnale principale (50 Hz contro 1 Hz), se per esempio un periodo del segnale a maggiore frequenza viene rappresentato in 4 mm (si ricordi che servono 4 punti), allora sono necessari $4 \cdot 50 = 200$ mm per graficare un periodo del segnale a 1 Hz oppure 100 mm per raffigurarne solo mezzo periodo.

Giova anche richiamare alla memoria che, facendo variare il tempo t secondo frazioni di π , cioè scegliendo come unità per l'asse delle ascisse una opportuna frazione di π (qui $1 \text{ mm} = \frac{2\pi}{4 \cdot 50} = \frac{\pi}{100}$), la costruzione grafica è notevolmente facilitata, perché in 2π , mentre il segnale a 1 Hz effettua un solo ciclo, il segnale interferente ne fa 50.

Associando allora all'intervallo di 1 mm un valore di $\frac{\pi}{100}$, ne segue che un periodo del segnale interferente è contenuto in 4 mm (lunghezza tra l'altro uguale al lato di un quadretto di un foglio a quadrettatura piccola) e un intero periodo del segnale principale sta in 200 mm (compatibile con la larghezza di un foglio formato A4)¹.

Dal punto di vista pratico si può prima tracciare con una matita l'andamento della sinusoide di frequenza pari a 1 Hz e ampiezza unitaria, tenendo conto, nella scelta del

¹La stessa scelta circa la lunghezza dei segmenti può ovviamente essere assunta anche in assenza di quadrettatura.

Qualora la quadrettatura del foglio sia invece quella media (lato di 5 mm), è più conveniente assumere $2.5 \text{ mm} = \frac{\pi}{100}$, da cui deriva che un periodo della sinusoide a 50 Hz è contenuto in 10 mm (2 quadretti) e mezzo periodo del segnale a 1 Hz in 250 mm, valore compatibile con l'altezza di un foglio A4.

valore di lunghezza del segmento che rappresenta l'unità sull'asse delle ordinate, che il segnale interferente oscilla con ampiezza pari a $\frac{1}{5}$ di quella del segnale principale. Attorno a questa linea oscilla su e giù il segnale interferente con ampiezza di 0.2 l'unità scelta per le ordinate. Una volta disegnato, la curva della sinusoide a 1 Hz può essere cancellata.

Il risultato finale di tale costruzione manuale dovrebbe risultare simile al grafico in Figura 5.1, realizzato con un apposito software.

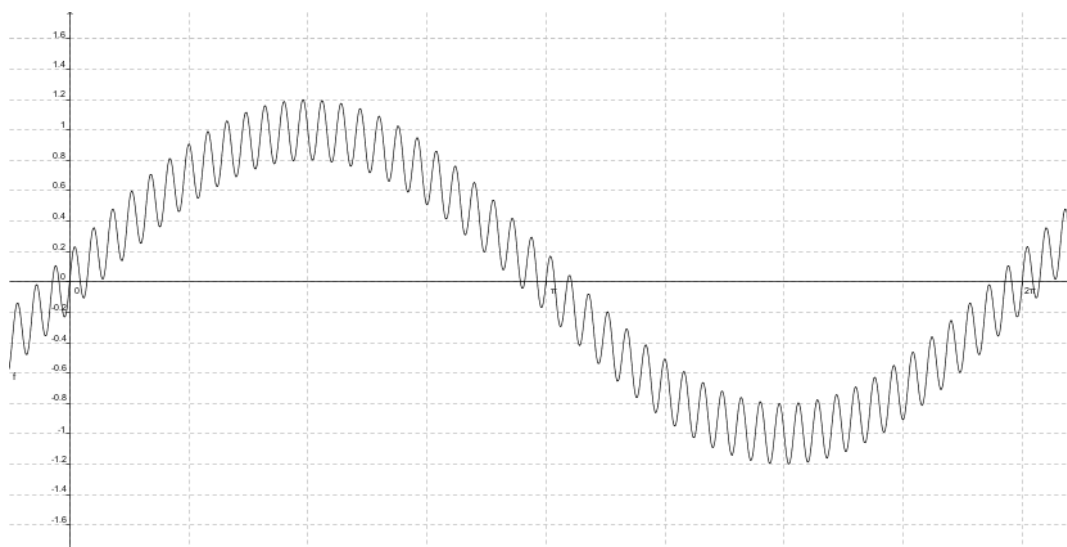


Figura 5.1

Esercizio 32. Rappresentare nel diagramma di Bode del modulo un segnale tempovariante sinusoidale di ampiezza pari a 100 e pulsazione di 10 rad/s cui è sovrapposto un disturbo interferente costituito da due sinusoidi di ampiezza rispettivamente di 10 e 1 e pulsazioni rispettivamente di 0.01 rad/s e 5000 rad/s.

Soluzione

Nel dominio del tempo il segnale in ingresso $g(t)$ è somma delle seguenti funzioni:

- (1) $g_s = 100\sin(10t + \vartheta_1)$
- (2) $g_{d1} = 10\sin(0.01t + \vartheta_2)$
- (3) $g_{d2} = 1\sin(5000t + \vartheta_3)$

La rappresentazione nel diagramma di Bode del modulo di un segnale sinusoidale (si tratta di fatto di un particolare tipo di spettro teorico) non dipende dalla fase, cioè è sempre la stessa. I parametri d'interesse sono l'ampiezza e la pulsazione ω . Poiché la rappresentazione è in scala doppia logaritmica e precisamente si ha $\log(\omega)$ in ascissa e in

ordinata si hanno valori in decibel (dB), è necessario effettuare delle semplici trasformazioni dei parametri di ciascun segnale. Può essere utile riunire i risultati sotto forma di tabella, come fatto nella Tabella 5.1.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]
(1)	$20\log(100) = 40$	$\log(10) = 1$
(2)	$20\log(10) = 20$	$\log(0.01) = -2$
(3)	$20\log(1) = 0$	$\log(5000) = 3,7$

Tabella 5.1

Ciascun segnale sinusoidale nello spettro assume la forma di un segmento verticale (compreso il segmento di lunghezza nulla) che, partendo dall'asse delle ascisse in corrispondenza del valore della pulsazione, sale per ampiezze maggiori di 1 ($\text{dB} > 0$) e scende per ampiezze minori dell'unità ($\text{dB} < 0$). La rappresentazione dei tre segnali è riportata in Figura 5.2.

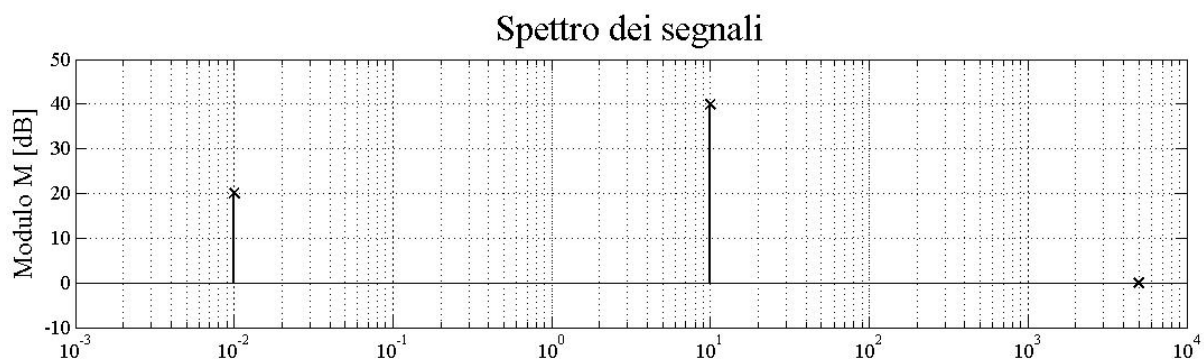


Figura 5.2

Esercizio 33. Rappresentare nel diagramma di Bode del modulo la vibrazione sinusoidale di un sistema meccanico di ampiezza pari a 1000 e frequenza di 0.5 kHz cui è sovrapposto un disturbo interferente costituito da due sinusoidi di ampiezza rispettivamente 0.1 e 10.0 e frequenze rispettivamente di 0.01 Hz e 50 Hz.

Soluzione

Nel dominio del tempo il segnale in ingresso $g(t)$ è somma delle seguenti tre funzioni:

- (1) $g_s = 1000\sin(2\pi 500t + \vartheta_1)$
- (2) $g_{d1} = 0.1\sin(2\pi 0.01t + \vartheta_2)$

$$(3) \quad g_{d2} = 10.0 \sin(\pi 50t + \vartheta_3)$$

Per rappresentare i segnali dati nel diagramma di Bode del modulo i parametri d'interesse (ampiezza e pulsazione ω) vanno trasformati secondo quanto riportato in Tabella 5.2.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]
(1)	$20\log(1000) = 60$	$\log(2\pi 500) = 3.5$
(2)	$20\log(0.1) = -20$	$\log(2\pi 0.01) = -1.2$
(3)	$20\log(10) = 20$	$\log(2\pi 50) = 2.5$

Tabella 5.2

Non resta che tracciare lo spettro di ciascun segnale nel piano di Bode. Il risultato è in Figura 5.3.

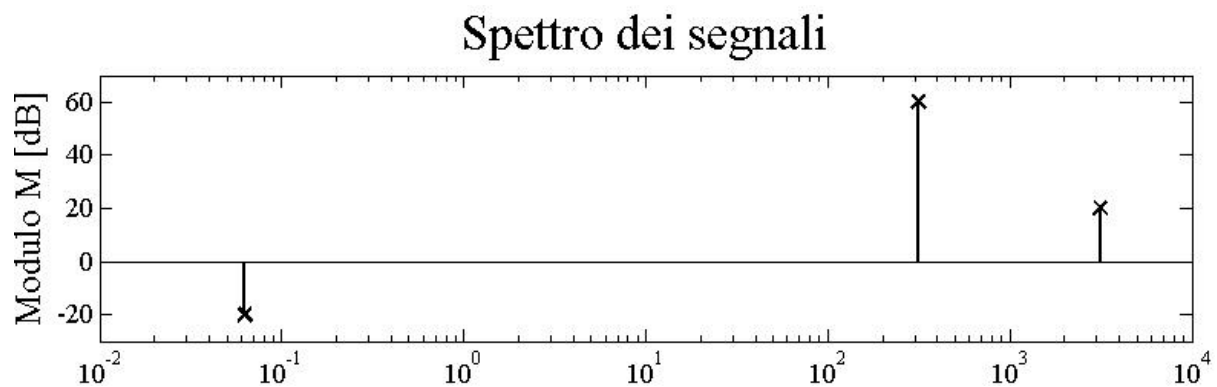


Figura 5.3

Esercizio 34. *Un segnale formato dalla somma di quattro sinusoidi, di cui sono indicate in Tabella 5.3 le caratteristiche, viene misurato per mezzo di un sistema di misura il cui modulo della funzione di trasferimento $|T(i\omega)|$ è noto ed è stato fornito per le pulsazioni delle sinusoidi che formano il segnale in ingresso.*

Rappresentare nel diagramma di Bode del modulo l'ingresso e l'uscita del segnale. Scrivere inoltre l'espressione nel dominio del tempo del segnale d'uscita a meno della fase.

Soluzione

Nel dominio del tempo il segnale in ingresso $g_i(t)$ è costituito delle seguenti sinusoidi:

$$(1) \quad g_{i1} = 4 \sin(15.9t + \vartheta_1)$$

Segnale	Ampiezza [dB]	Pulsazione [rad/s]	$ T(i\omega) $ [dB]
(1)	4	15.9	+40
(2)	0.315	0.01	-3
(3)	20	0.315	-6
(4)	1	10000	+20

Tabella 5.3

$$(2) \quad g_{i2} = 0.315 \sin(0.01t + \vartheta_2)$$

$$(3) \quad g_{i3} = 20 \sin(0.315t + \vartheta_3)$$

$$(4) \quad g_{i4} = 1 \sin(10t + \vartheta_4)$$

Si consideri il generico segnale sinusoidale $g(t) = A \sin(2\pi ft + \vartheta) = A \sin(\omega t + \vartheta)$ di frequenza f e pulsazione $\omega = 2\pi f$.

Lo spettro teorico di un segnale sinusoidale è rappresentato da un segmento verticale con piede in corrispondenza del valore della frequenza (o della pulsazione) del segnale stesso. Assumendo per semplicità come parametro caratteristico la pulsazione anziché la frequenza, sia $S_i(\omega)$ l'altezza del segmento che rappresenta il segnale nel dominio della frequenza.

Nel venire misurato da uno strumento caratterizzato dalla funzione di trasferimento sinusoidale $T(i\omega)$ il cui modulo $|T(i\omega)|$ sia rappresentato dalla funzione reale $M(\omega)$, il segnale in ingresso viene generalmente modificato per ampiezza e fase, ma non in frequenza.

Trascurando le problematiche connesse alla fase, lo spettro relativo al modulo del segnale d'uscita è ancora costituito da un segmento verticale con piede in corrispondenza della pulsazione dell'ingresso, ma in generale con altezza $S_u(\omega)$ diversa e data dal prodotto di $S_i(\omega)$ con $M(\omega)$, cioè

$$S_u(\omega) = M(\omega) S_i(\omega) \quad (5.2)$$

Per le note proprietà dei logaritmi si ha

$$\log(S_u(\omega)) = \log(M(\omega)) + \log(S_i(\omega))$$

e anche la scrittura equivalente

$$20\log(S_u(\omega)) = 20\log(M(\omega)) + 20\log(S_i(\omega))$$

- $20\log(S_i(\omega)) = A_i[dB]$ è il valore dell'ampiezza espressa in dB del segnale sinusoidale ossia l'altezza del segmento dello spettro in frequenza del segnale d'ingresso;
- $20\log(S_i(\omega)) = M(\omega)[dB]$ è il valore del modulo espresso in dB della funzione di trasferimento $T(i\omega)$ in corrispondenza della pulsazione ω ;
- $20\log(S_u(\omega)) = A_u[dB]$ è il valore dell'ampiezza espressa in dB del segnale sinusoidale d'uscita cioè l'altezza del segmento dello spettro in frequenza del segnale d'uscita;

Si può quindi scrivere che

$$A_u[dB] = M(\omega)[dB] + A_i[dB] \quad (5.3)$$

relazione che rappresenta a secondo membro una *somma algebrica* tra valori in decibel e che graficamente si traduce

- se $M(\omega)[dB] > 0$, in una somma tra i segmenti $M(\omega)[dB]$ e $A_i[dB]$;
- se $M(\omega)[dB] < 0$, in una sottrazione tra i segmenti $M(\omega)[dB]$ e $A_i[dB]$

Chiaramente vale anche la relazione inversa

$$A_i[dB] = A_u[dB] - M(\omega)[dB] \quad (5.4)$$

che consente di risalire all'ampiezza in dB dello spettro del segnale d'ingresso noto che sia il valore in dB dell'ampiezza dello spettro del segnale d'uscita e del modulo della funzione di trasferimento in corrispondenza della pulsazione che caratterizza i segnali sinusoidali g_i e g_u .

Quanto detto per un singolo segnale sinusoidale $g(t) = A \sin(\omega t + \vartheta)$ può essere applicato pari passo a ciascuna delle n sinusoidi presenti in un generico segnale d'ingresso con funzione nel dominio del tempo esprimibile come

$$g_i(t) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k t + \vartheta_k)$$

Nel diagramma di Bode del modulo gli spettri del segnale d'ingresso e di quello d'uscita risultano ovviamente ciascuno formato da n segmenti verticali (eventualmente anche di altezza nulla), ognuno in corrispondenza di ciascuna delle n pulsazioni ω_k presenti. Per le varie pulsazioni del segnale d'ingresso le altezze in decibel di ciascuna coppia di segmenti ingresso-uscita sono legate tra loro per mezzo della (5.3).

A questo punto non resta che eseguire i calcoli e quindi, una volta trasformate le ampiezze e le pulsazioni fornite per la loro rappresentazione nel piano di Bode, non resta che applicare la (5.3) a ciascuna delle sinusoidi che formano il segnale in ingresso dato, ottenendo così i quattro valori di $A_u[dB]$. Si ha quindi quanto riportato in Tabella 5.4

Segnale	Ampiezza	Ascissa	$A_u[dB]$
(1)	$20\log(4) = 12 \text{ dB}$	$\log(15.9) = 1.2$	$40 + 12 = 52 \text{ dB}$
(2)	$20\log(0.315) = -10 \text{ dB}$	$\log(0.01) = -2$	$-3 - 10 = -13 \text{ dB}$
(3)	$20\log(20) = 26 \text{ dB}$	$\log(0.135) = -0.5$	$-6 + 26 = 20 \text{ dB}$
(4)	$20\log(1) = 0 \text{ dB}$	$\log(10000) = 4$	$0 + 20 = 20 \text{ dB}$

Tabella 5.4

e da tali risultati si ottiene il diagramma con entrambi gli spettri in Figura 5.4.

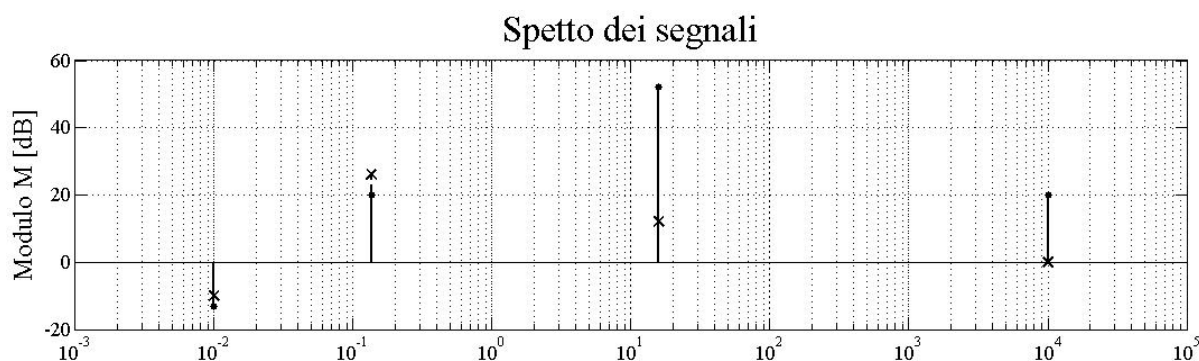


Figura 5.4

Per quanto riguarda l'espressione del segnale d'uscita nel dominio del tempo a meno della fase, per ottenerla basta riconvertire i valori in dB dei quattro $A_u[dB]$ nella scala di misura [u.m.] con cui sono state fornite le ampiezze delle sinusoidi in ingresso usando la relazione

$$\text{Ampiezza [u.m.]} = 10^{\frac{[dB]}{20}} \quad (5.5)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$g_u(t) = 398 \sin(15.9t + \Phi_1) + 0.224 \sin(0.01t + \Phi_2) + 10(0.315t + \Phi_3) + 10 \sin(10000t + \Phi_4)$$

in cui ogni Φ_k ($k=1, \dots, 4$) è la somma algebrica tra la fase ϑ_k propria del segnale in ingresso di pulsazione ω_k con la fase φ_k della funzione di trasferimento $|T(i\omega)|$ per $\omega = \omega_k$, ossia $\Phi_k = \vartheta_k + \varphi_k$.

Esercizio 35. Scrivere la funzione di trasferimento di un filtro passa-basso del primo ordine e studiarne il diagramma asintotico di Bode del modulo e della fase al variare della costante di tempo τ . Fissato $\tau = 0.1$ s, scrivere la funzione di trasferimento per un filtro passa-basso del II, III e IV ordine ottenuto mettendo in serie più filtri identici del primo ordine e ricavare i rispettivi diagrammi di Bode asintotici in modulo e fase.

Soluzione

La funzione di trasferimento di un filtro passa-basso del primo ordine è

$$T(i\omega) = \frac{1}{1 + \tau i\omega}$$

Nel caso di un filtro elettrico tipo R-C, si ha $\tau=RC$, con R e C rispettivamente la resistenza e la capacità del condensatore utilizzati per costruirlo.

La funzione di trasferimento $T(i\omega)$ presenta due funzioni elementari (cfr. Tabella 5.5).

$$1) K=1 \quad 2) (1 + \tau i\omega)^{-1}$$

Tabella 5.5

Si assuma per semplicità $\tau=0,1$ s. In Figura 5.5 sono riportati i diagrammi asintotici del modulo e della fase delle funzioni elementari che costituiscono la funzione di trasferimento in esame, mentre in Figura 5.6 vi è il diagramma di Bode complessivo sia asintotico che reale.

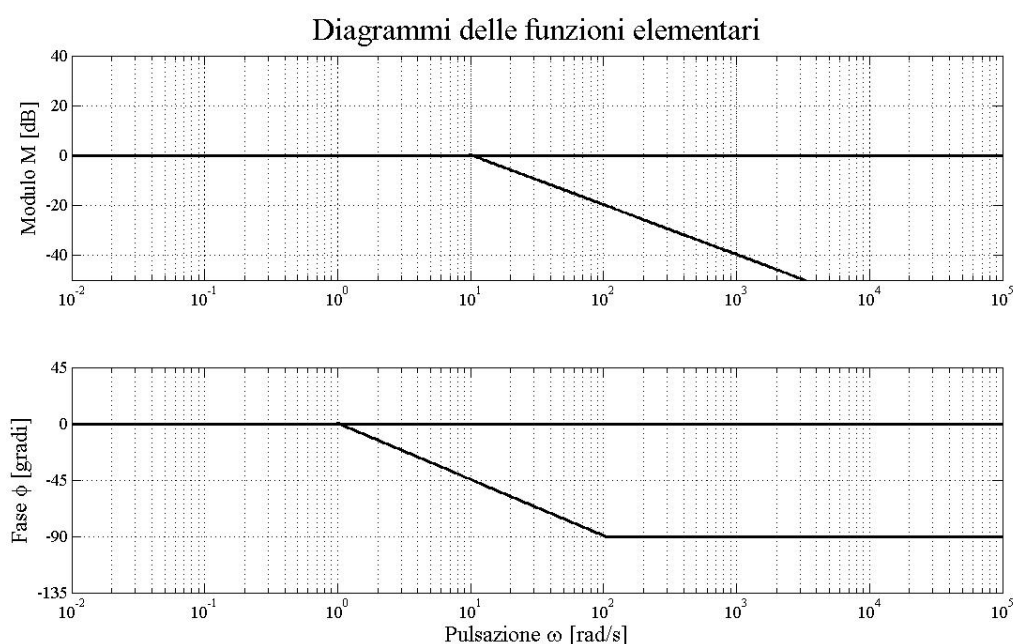


Figura 5.5

Per studiare in che modo si modifica il diagramma di Bode al variare di τ , si osservi che

- nulla cambia per la funzione elementare $K=1$.
- il grafico di $(1 + \tau i\omega)^{-1}$ non cambia forma, ma semplicemente il solo tratto con pendenza sempre di -20 dB/decade parte da un punto che si sposta sull'asse delle ascisse al variare di τ . Infatti il punto di rottura cade sull'asse delle ascisse in corrispondenza di $\log(\omega)=-\log(\tau)$.
- la variazione di fase di $-\frac{\pi}{2}$ è sempre la stessa. A cambiare è solo la posizione delle due decadi (una a prima e una dopo il punto di rottura) in cui si esplica tale variazione e che, nel diagramma asintotico, porta a tracciare un segmento inclinato di $-\frac{\pi}{4}$.

Ne segue che *al variare di τ il diagramma di Bode di un filtro passa-basso del primo ordine trasla semplicemente sull'asse delle ordinate mantenendo immutata la forma.*

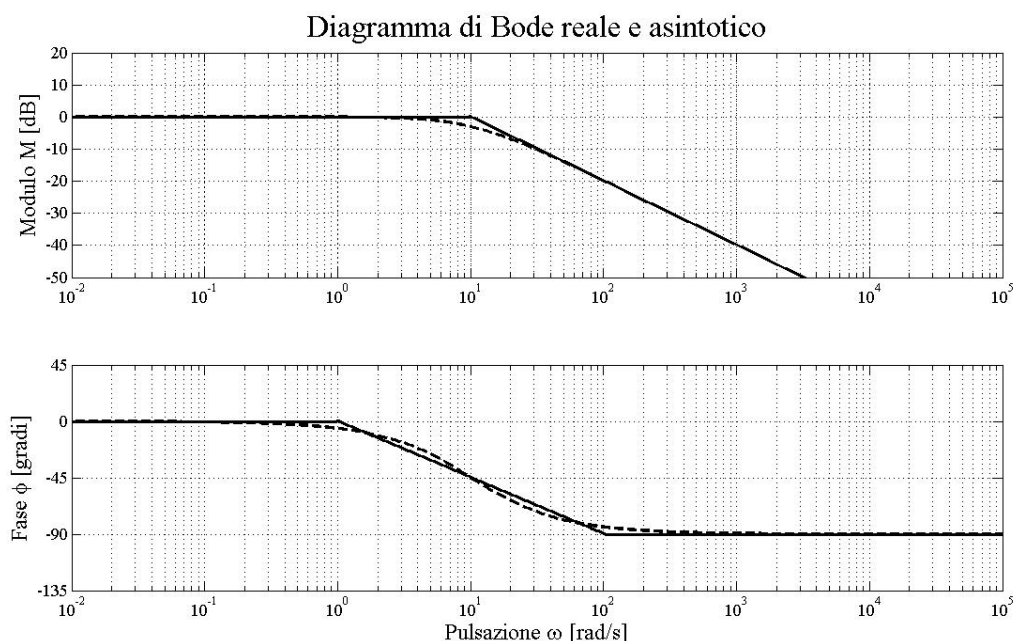


Figura 5.6

Un filtro passa-basso di ordine superiore al primo può essere realizzato mettendo in cascata più filtri identici² passa-basso del primo ordine.

La funzione di trasferimento globale di un filtro passa-basso del II, III e IV ordine costruito come detto risulta allora essere il prodotto di 2, 3, 4 volte la funzione di trasferimento associata al filtro passa-basso del I ordine (si richiamino le regole dall'algebra dei blocchi). Si ha allora, nel caso in cui $\tau=0.1$ s:

$$\begin{array}{lll} \text{II ordine} & \text{III ordine} & \text{IV ordine} \\ T(i\omega) = \frac{1}{(1+0,1i\omega)^2} & T(i\omega) = \frac{1}{(1+0,1i\omega)^3} & T(i\omega) = \frac{1}{(1+0,1i\omega)^4} \end{array}$$

A cambiare è solo la pendenza associata alla funzione elementare $(1 + 0,1i\omega)^{-n}$ (che risulta essere di $n \frac{-20dB}{decade}$) per $\log(\omega) > -\log(\tau)$ e la variazione di fase (che segue la relazione $n \frac{-\pi}{2}$ in funzione di n). Risulta così facile ottenere i diagrammi asintotici di Bode. Essi sono rispettivamente riportati in Figura 5.7, Figura 5.8 e Figura 5.9.

Si noti che la correzione da apportare al modulo in corrispondenza del punto di rottura è rispettivamente di -6 dB, -9 dB e -12 dB ossia pari a n volte quella di -3 dB associata alla funzione elementare $(1 + 0,1i\omega)^{-1}$.

²Per identici si intende il fatto che essi *abbiano la stessa costante di tempo* τ . Considerando il caso elettrico non è quindi necessario che i filtri passa-basso del primo ordine messi in cascata abbiano gli stessi valori di resistenza R e capacità C del condensatore. Questi possono anche differire da un filtro all'altro, purché il loro prodotto RC dia sempre la stessa τ .

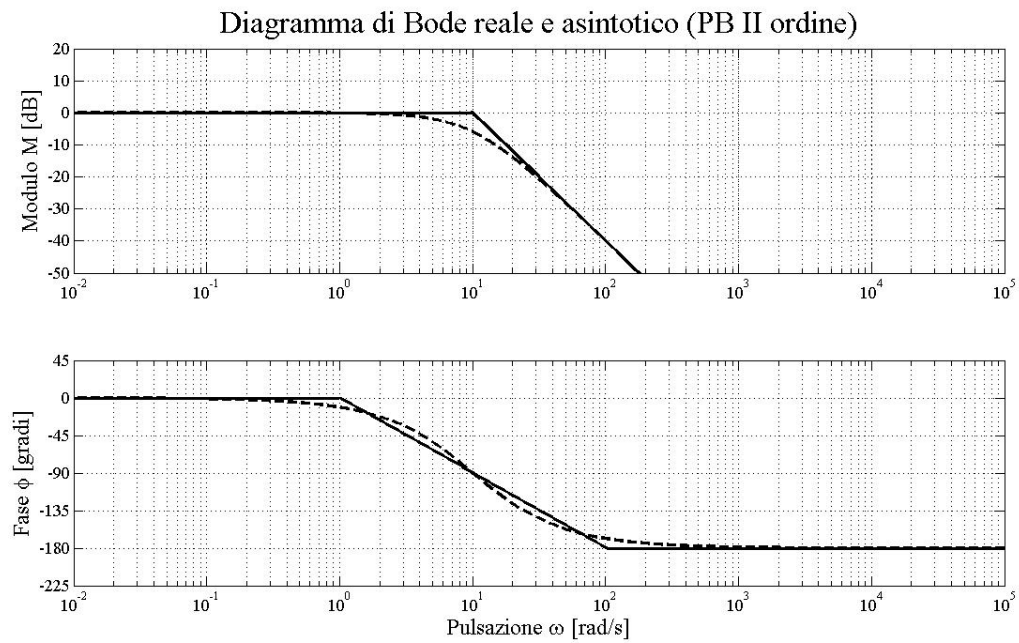


Figura 5.7

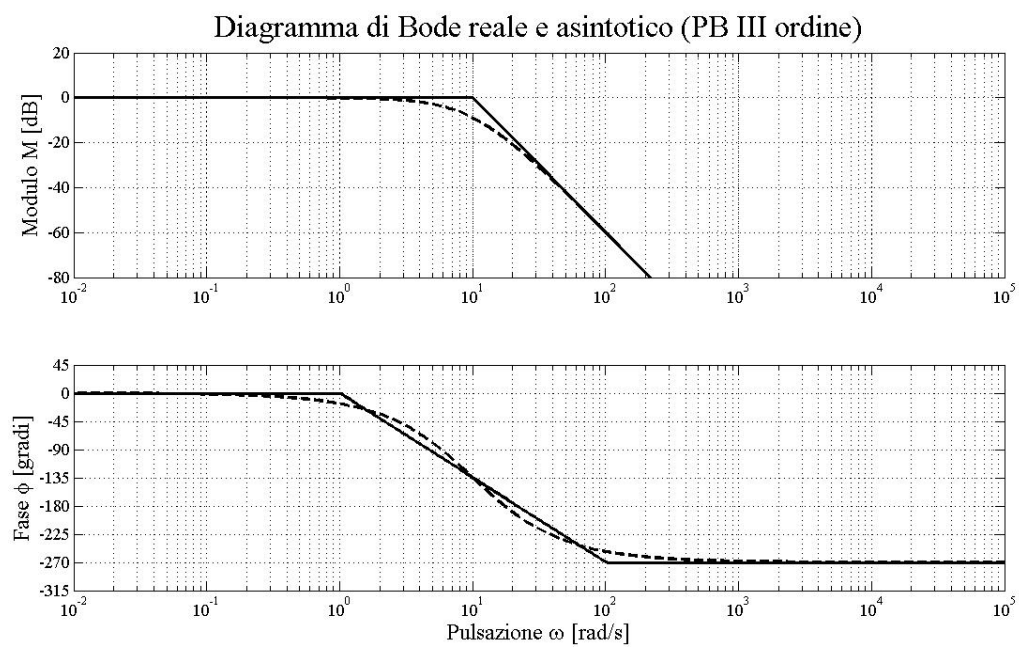


Figura 5.8

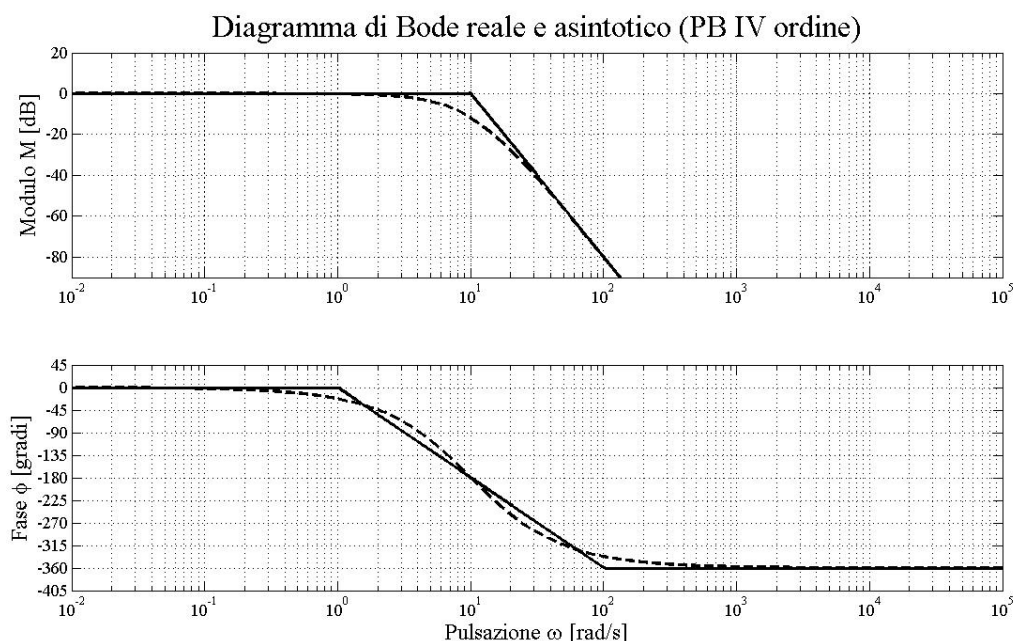


Figura 5.9

Esercizio 36. *Determinare la banda passante a -3 dB di un filtro passa-basso con costante di tempo $\tau=0,1$ s.*

Soluzione

Alla luce dei risultati ottenuti nell'esercizio 35 a pagina 61, il diagramma di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.6 a pagina 63.

Per definizione di banda passante a -3 dB l'utilizzo del diagramma asintotico di Bode del modulo porterebbe una sovrastima della banda passante. Si deve invece richiamare alla memoria che la correzione da apportare a un qualsiasi termine del primo ordine (purché distante almeno una decade da altri termini simili o di ordine superiore) è di ± 3 dB in corrispondenza del punto di rottura.

Ne segue che, se è verificata la condizione sulla separazione di ciascun termine del primo ordine da altri eventualmente presenti con identico ordine o con ordine superiore, per l'estremo della banda passante a -3 dB si può assumere la pulsazione corrispondente al punto di rottura, cioè $-\log \tau$, se dall'analisi del diagramma asintotico di Bode del modulo in tale intorno appare cadere l'estremo della banda passante.

Nel caso qui in esame la banda passante è allora $-\infty < \log \omega < -\log 0,1$ ovvero, effettuando il conto, $-\infty < \log \omega < 1$.

Esercizio 37. Scrivere la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto del primo ordine e studiarne il diagramma asintotico di Bode del modulo e della fase al variare della costante di tempo τ . Fissato $\tau = 10$ s, scrivere la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto del II, III e IV ordine ottenuto mettendo in serie più filtri identici del primo ordine e ricavare i rispettivi diagrammi di Bode asintotici in modulo e fase.

Soluzione

La funzione di trasferimento di un filtro passa-alto del primo ordine è

$$T(i\omega) = \frac{\tau i\omega}{1 + \tau i\omega}$$

Nel caso di un filtro elettrico tipo R-C, si ha $\tau=RC$, con R e C rispettivamente la resistenza e la capacità del condensatore utilizzati per costruirlo.

La funzione di trasferimento $T(i\omega)$ presenta tre funzioni elementari (vedi la Tabella 5.6).

$$1) K=\tau \quad 2) i\omega \quad 3) (1 + \tau i\omega)^{-1}$$

Tabella 5.6

Si assuma per semplicità $\tau=10$ s. In Figura 5.10 sono riportati i diagrammi asintotici del modulo e della fase delle funzioni elementari che costituiscono la funzione di trasferimento in esame. Il diagramma di Bode complessivo sia asintotico che reale è in Figura 5.11.

Per studiare in che modo si modifica il diagramma di Bode al variare di τ , si osservi che

- nulla cambia per la funzione elementare $K=10$.
- nulla cambia per la funzione elementare $i\omega$.
- il grafico di $(1 + \tau i\omega)^{-1}$ non cambia forma, ma semplicemente il solo tratto con pendenza sempre di -20 dB/decade parte da un punto che si sposta sull'asse delle ascisse al variare di τ . Infatti il punto di rottura cade sull'asse delle ascisse in corrispondenza di $\log(\omega)=-\log(\tau)$.
- la variazione di fase di $-\frac{\pi}{2}$ è sempre la stessa. A cambiare è solo la posizione delle due decadi (una a prima e una dopo il punto di rottura) in cui si esplica tale variazione e che, nel diagramma asintotico, porta a tracciare un segmento inclinato di $-\frac{\pi}{4}$.

Se si effettua la costruzione del diagramma asintotico del modulo e della fase per un diverso valore di τ (per esempio $\tau=0.01$), si può osservare che *al variare di τ il diagramma di*

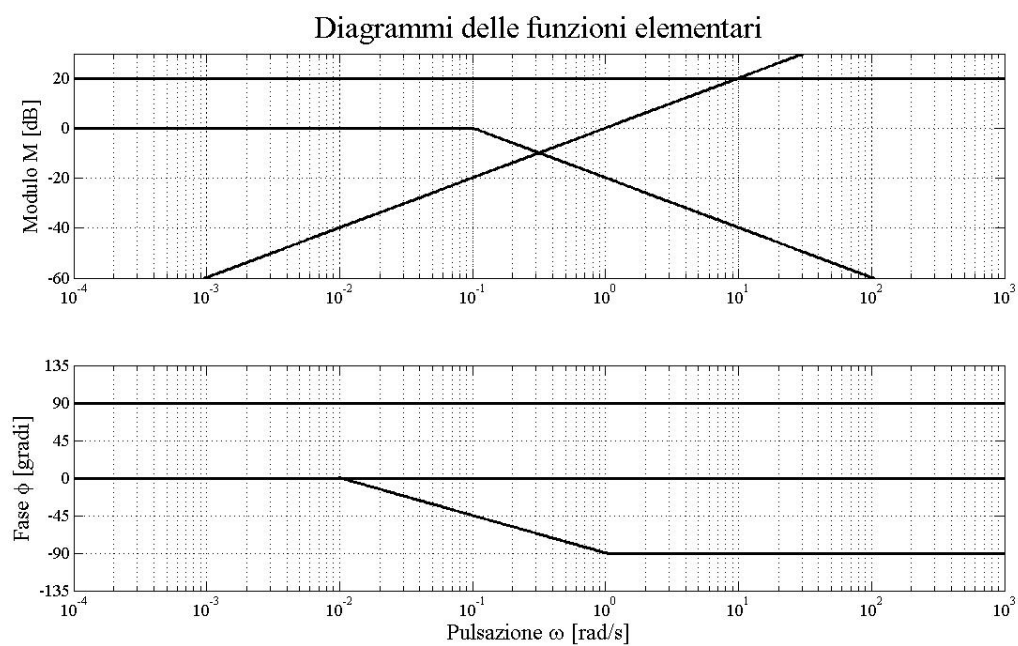


Figura 5.10

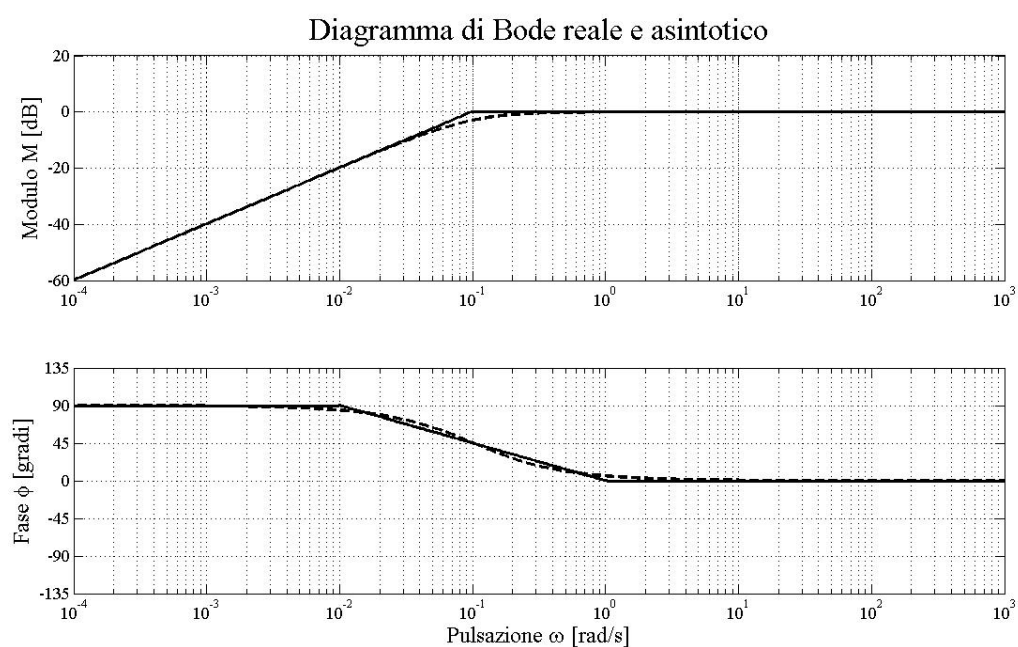


Figura 5.11

Bode di un filtro passa-alto del primo ordine trasla semplicemente sull'asse delle ordinate mantenendo immutata la forma.

Un filtro passa-alto di ordine superiore al primo può essere realizzato mettendo in cascata più filtri identici³ passa-alto del primo ordine.

La funzione di trasferimento globale di un filtro passa-alto del II, III e IV ordine costruito come detto risulta allora essere il prodotto di 2, 3, 4 volte la funzione di trasferimento associata al filtro passa-alto del I ordine (si richiamino le regole dall'algebra dei blocchi). Si ha allora, nel caso in cui $\tau=10$ s:

$$\begin{array}{lll} \text{II ordine} & \text{III ordine} & \text{IV ordine} \\ T(i\omega) = \left(\frac{10i\omega}{1+10i\omega}\right)^2 & T(i\omega) = \left(\frac{10i\omega}{1+10i\omega}\right)^3 & T(i\omega) = \left(\frac{10i\omega}{1+10i\omega}\right)^4 \end{array}$$

A cambiare è solo la pendenza associata alla funzione elementare $(1 + 10i\omega)^{-n}$ (che risulta essere di $n \frac{-20dB}{decade}$) per $\log(\omega) > -\log(\tau)$ e la variazione di fase (che segue la relazione $n \frac{-\pi}{2}$ in funzione di n). Risulta così facile ottenere i rispettivi diagrammi asintotici di Bode. Essi sono rispettivamente riportati in Figura 5.12, Figura 5.13 e Figura 5.14.

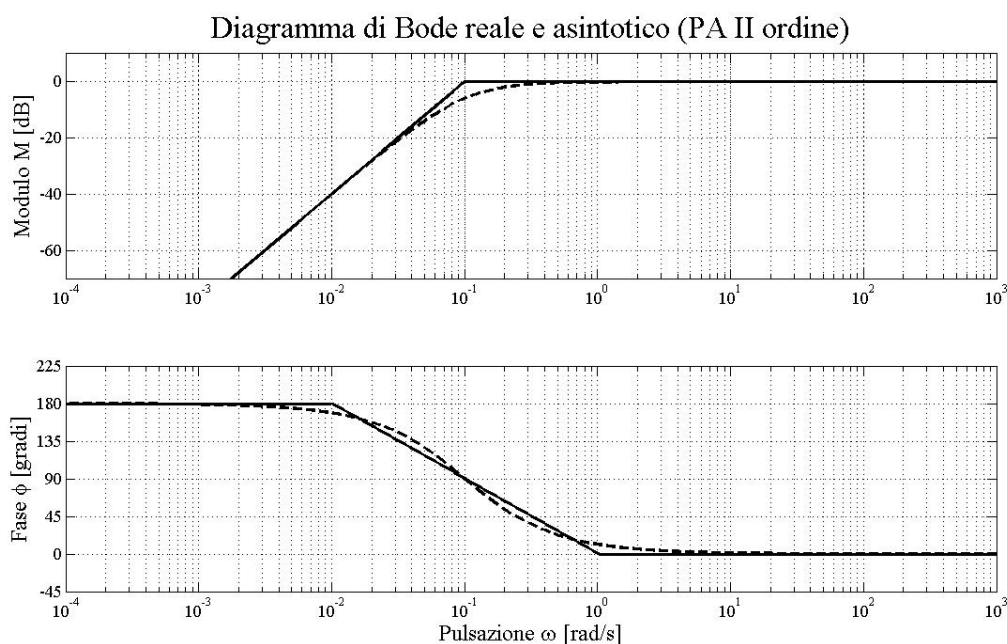


Figura 5.12

Si noti che la correzione da apportare al modulo in corrispondenza del punto di rottura è rispettivamente di -6 dB, -9 dB e -12 dB ossia pari a n volte quella di -3 dB associata alla funzione elementare $(1 + 10i\omega)^{-1}$.

³Per identici si intende il fatto che essi *abbiano la stessa costante di tempo* τ . Considerando il caso elettrico non è quindi necessario che i filtri passa-alto del primo ordine messi in cascata abbiano gli stessi valori di resistenza R e capacità C del condensatore. Questi possono anche differire da un filtro all'altro, purché il loro prodotto RC dia sempre la stessa τ .

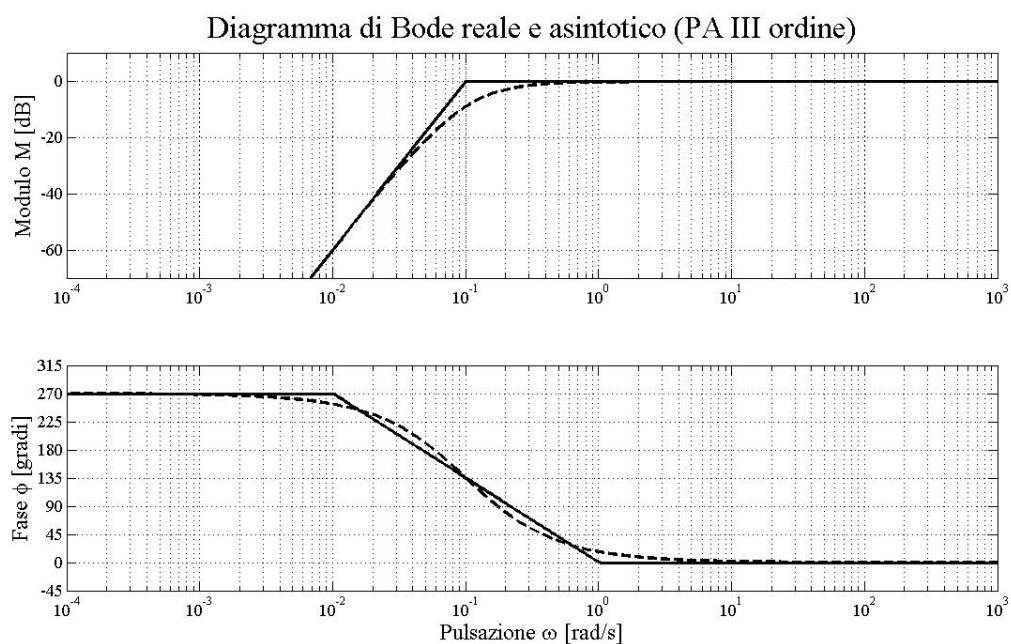


Figura 5.13

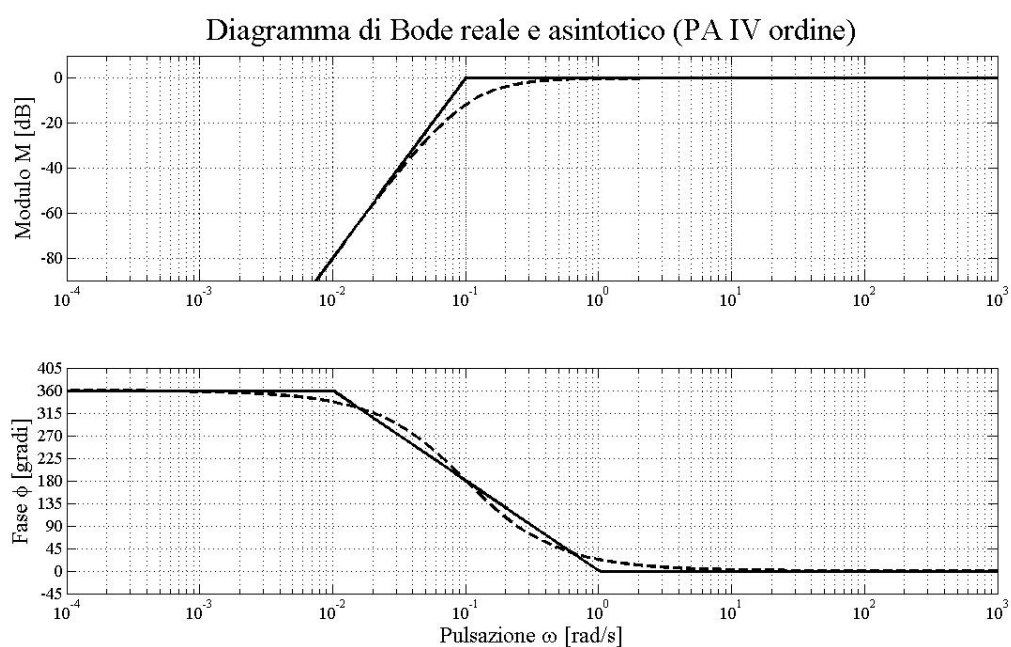


Figura 5.14

Esercizio 38. *Determinare la banda passante a -3 dB di un filtro passa-alto con costante di tempo $\tau=10,0$ s.*

Soluzione

Alla luce dei risultati ottenuti nell'esercizio 37 a pagina 65, il diagramma di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.11 a pagina 67.

L'utilizzo del diagramma asintotico di Bode del modulo porterebbe una sovrastima della banda passante. Alla luce delle stesse considerazioni fatte nell'36 si ha che la banda passante è $-\log 10 < \log \omega < \infty$ ovvero, effettuando il conto, $-1 < \log \omega < \infty$.

Esercizio 39. *Scrivere la funzione di trasferimento di un filtro passa-banda del secondo ordine ottenuto mettendo in serie un filtro passa-basso del primo ordine con uno passa-alto del primo ordine. Assumendo $\tau_1 = 0,01$ s e $\tau_2 = 10$ dire quale τ è meglio associare al filtro passa-basso e quale al filtro passa-alto.*

Soluzione

Per l'espressione della funzione di trasferimento di un filtro passa-banda del primo ordine e di quella propria di uno passa-alto sempre del primo ordine si vedano rispettivamente gli esercizi 35 e 37. In base alle regole dall'algebra dei blocchi, con una disposizione in serie di due blocchi la funzione di trasferimento globale è il prodotto delle funzioni di trasferimento, cioè

$$T(i\omega) = \frac{\tau_{PA}i\omega}{(1 + \tau_{PB}i\omega)(1 + \tau_{PA}i\omega)} \quad (5.6)$$

avendo indicato con τ_{PB} la costante di tempo del filtro passa-basso e con τ_{PA} la costante di tempo del filtro passa-alto.

Nella (5.6) si individuano le funzioni elementari riassunte in Tabella 5.7.

$$1) K=\tau_{PA} \quad 2) i\omega \quad 3) (1 + \tau_{PB}i\omega)^{-1} \quad 4) (1 + \tau_{PA}i\omega)^{-1}$$

Tabella 5.7

Poiché si hanno i valori numerici di due costanti di tempo distinti tra loro, quale associare al filtro passa-basso e quale a quello passa-alto? Discutendo i due casi si vede che una sola è la operativamente corretta.

$\tau_{PB} > \tau_{PA}$

La funzione di trasferimento globale (5.6) con $\tau_{PB}=10$ s e $\tau_{PA}=0,01$ s diviene

$$T(i\omega) = \frac{0,01i\omega}{(1 + 10i\omega)(1 + 0,01i\omega)}$$

ed è caratterizzata dalle funzioni elementari richiamate in Tabella 5.8 i cui diagrammi

$$1) K=0,01 \quad 2) i\omega \quad 3) (1 + 10i\omega)^{-1} \quad 4) (1 + 0,01i\omega)^{-1}$$

Tabella 5.8

asintotici sono in Figura 5.15.

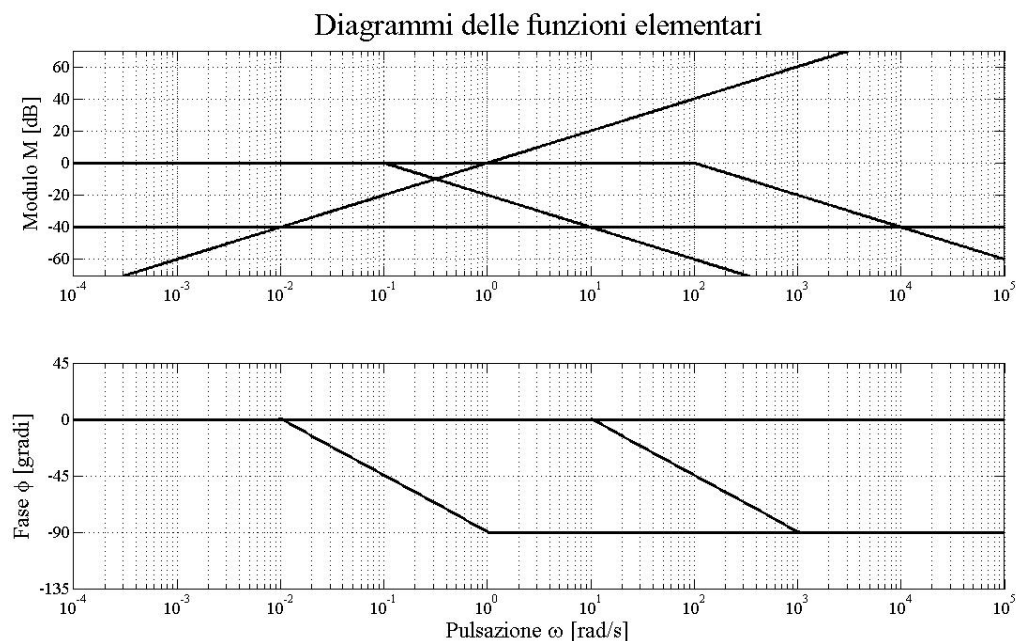


Figura 5.15

Dal diagramma di Bode del modulo in Figura 5.16 si nota la pesante attenuazione di ben 60 dB che caratterizza il filtro anche all'interno della banda passante a -3 dB. Si tenga presente che ciò è legato alla condizione $\tau_{PB} > \tau_{PA}$ e non ai particolari valori delle costanti di tempo scelte come esempio. Per convincersene si riporta in Figura 5.17 il diagramma di Bode che si ottiene con le costanti di tempo $\tau_{PB}=10000$ s e $\tau_{PA}=100$ s (ovviamente $\tau_{PB} > \tau_{PA}$).

L'inserimento di un filtro passa-banda (ma in generale di un qualsiasi filtro) all'interno di una catena di misura ha lo scopo di attenuare i segnali di disturbo presenti mantenendo nello stesso tempo il più possibile inalterato il segnale di interesse. E' evidente che un filtro passa-banda così strutturato attenua pesantemente anche il segnale da acquisire.

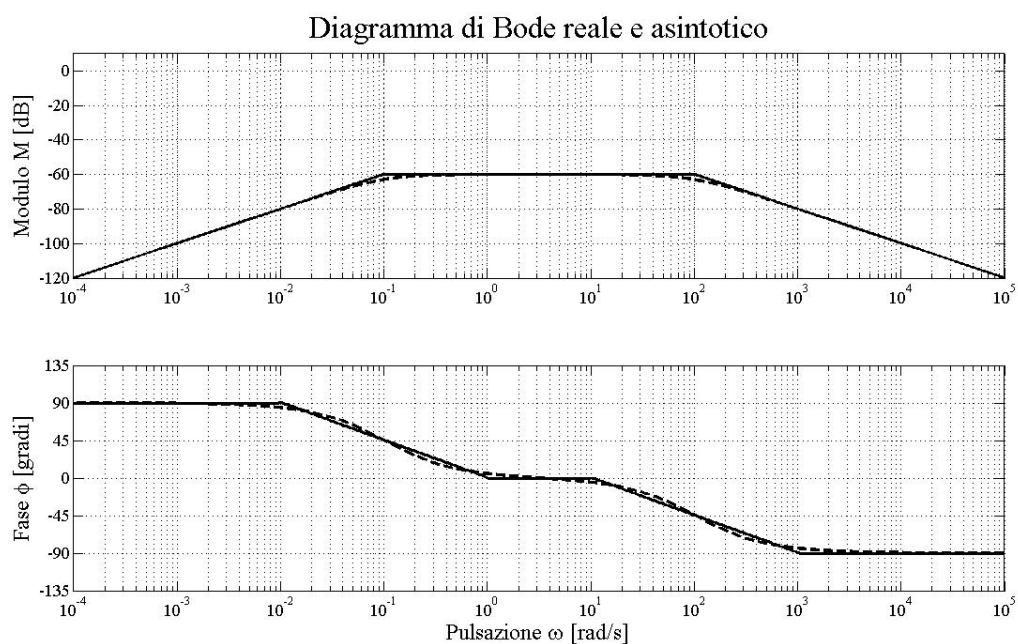


Figura 5.16

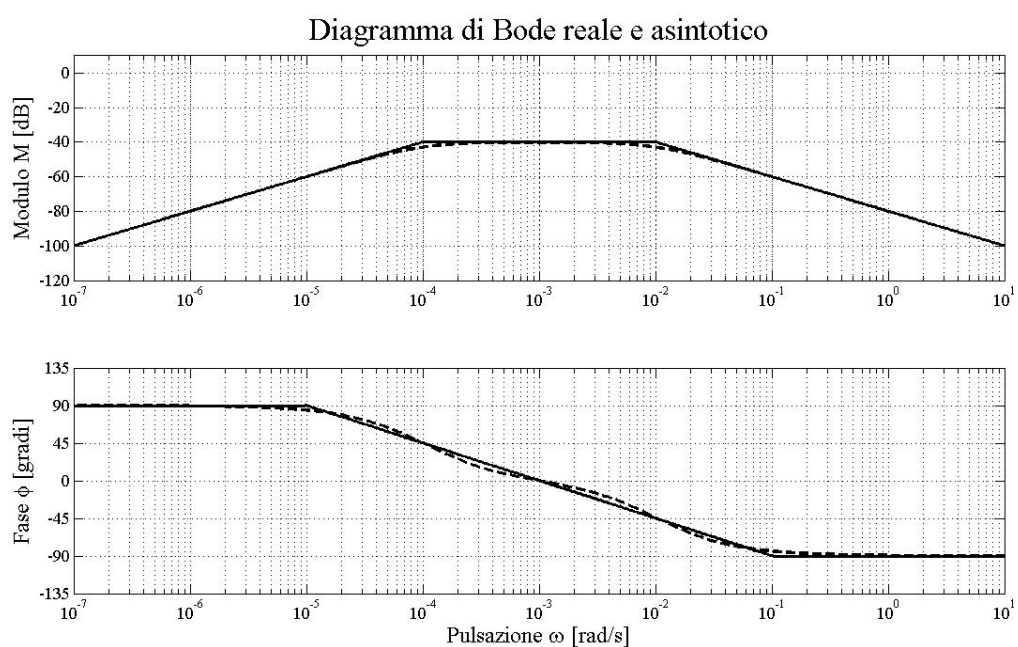


Figura 5.17

$$\tau_{PA} > \tau_{PB}$$

La funzione di trasferimento globale (5.6) con $\tau_{PA}=10$ s e $\tau_{PB}=0,01$ s diviene

$$T(i\omega) = \frac{10i\omega}{(1 + 10i\omega)(1 + 0,01i\omega)}$$

ed è caratterizzata dalle funzioni elementari illustrate in Tabella 5.9 i cui diagrammi

$$1) K=10 \quad 2) i\omega \quad 3) (1 + 10i\omega)^{-1} \quad 4) (1 + 0,01i\omega)^{-1}$$

Tabella 5.9

asintotici sono in Figura 5.18.

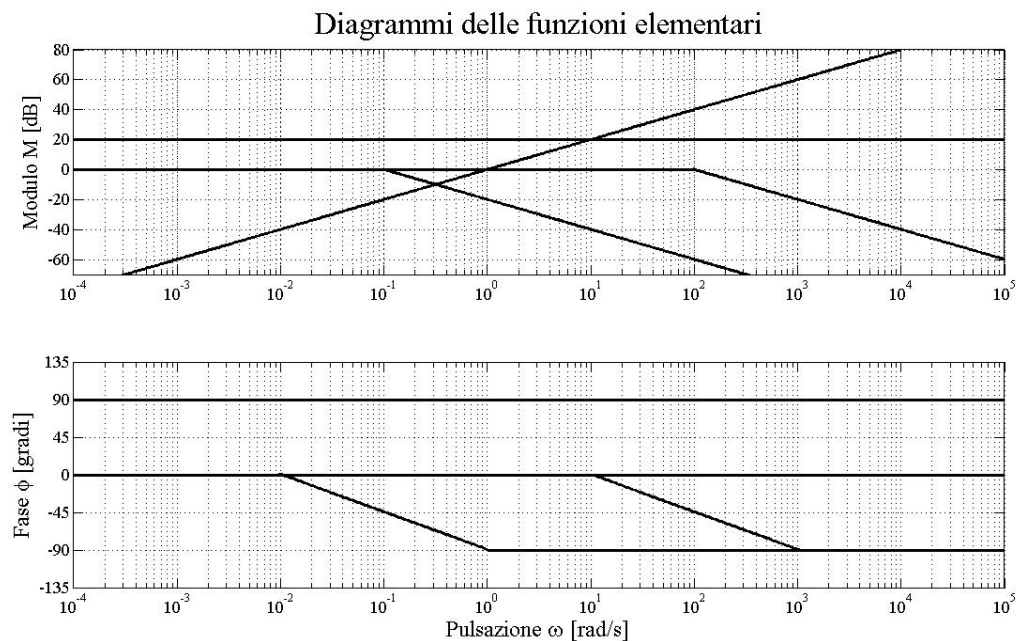


Figura 5.18

Dal diagramma di Bode del modulo in Figura 5.19 si nota l'assenza di attenuazione che caratterizza il filtro all'interno della banda passante a -3 dB. Si può facilmente dimostrare che ciò è legato alla condizione $\tau_{PA} > \tau_{PB}$ e non ai particolari valori delle costanti di tempo scelte qui come esempio.

E' evidente che un filtro passa-banda così strutturato è quello operativamente corretto, cosicché *in un filtro passa-banda correttamente progettato si ha $\tau_{PA} > \tau_{PB}$.*

NOTA INTEGRATIVA

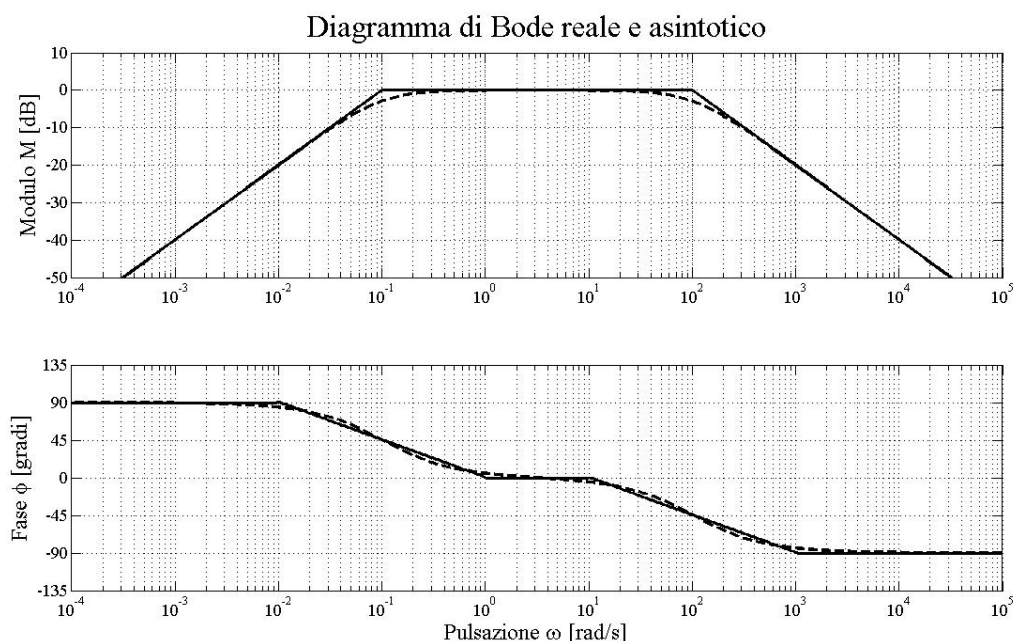


Figura 5.19

E' interessante studiare brevemente anche il caso $\tau_{PA} = \tau_{PB} = \tau$, poiché è utile per fare alcune considerazioni sull'ottimizzazione di questo tipo di filtri. Per semplicità si assume $\tau=0,1$ s.

La funzione di trasferimento globale (5.6) diviene

$$T(i\omega) = \frac{0,1i\omega}{(1 + 0,1i\omega)^2}$$

ed è caratterizzata dalle funzioni elementari in Tabella 5.10 i cui diagrammi asintotici sono

$$1) K=0,1 \quad 2) i\omega \quad 3) (1 + 0,1i\omega)^{-2}$$

Tabella 5.10

in Figura 5.20.

Dal diagramma di Bode in Figura 5.21 si nota come i tratti pendenti della funzione di trasferimento vanno a chiudersi nel comune punto di rottura. Considerando il diagramma di Bode asintotico del modulo, la banda passante si riduce a un intervallo molto ridotto intorno alla pulsazione corrispondente al punto di rottura. In queste condizioni l'unico segnale a non essere attenuato dal filtro è quello con pulsazione pari a τ^{-1} . Sembrerebbe di essere in presenza del filtro passa-banda ideale per eccellenza. In realtà non è così.

Poiché il filtro vero e proprio funziona secondo il diagramma di Bode reale del modulo e della fase e non in base al diagramma asintotico, un filtro così costruito attenuerebbe

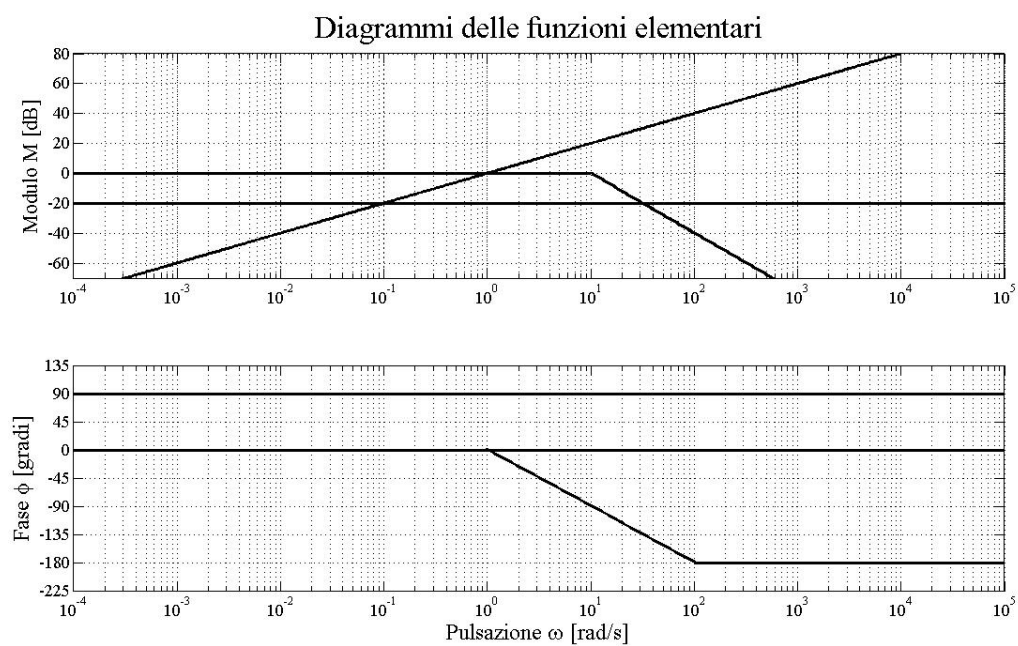


Figura 5.20

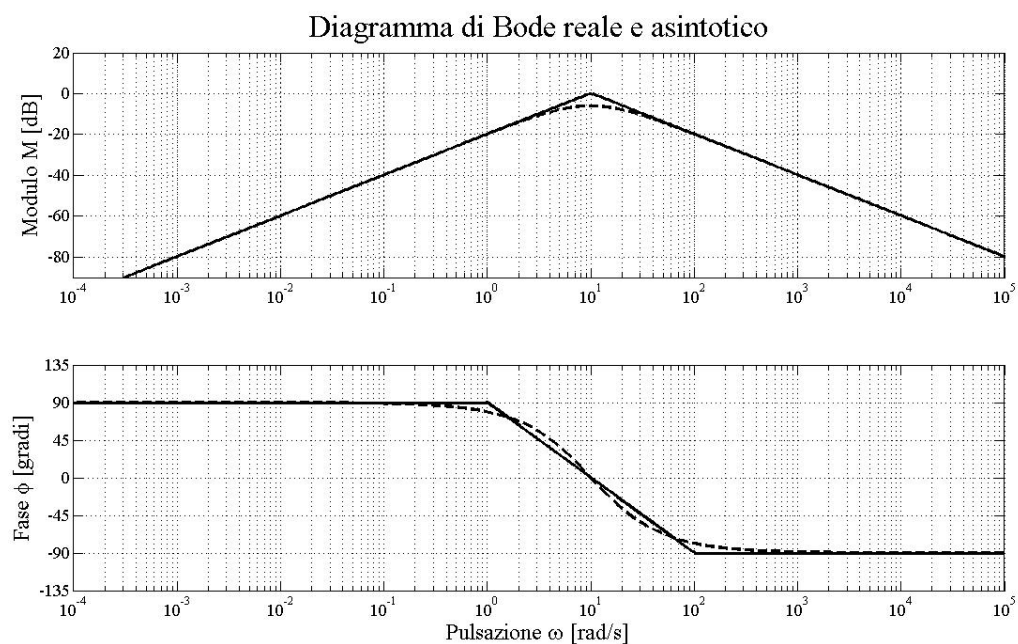


Figura 5.21

pure il segnale di interesse e precisamente di -6 dB (corrispondente a una variazione di ben il 50%).

Perciò nell'ottimizzazione di un filtro di questo tipo (operazione per altro nel suo insieme complessa) non è conveniente far convergere in un punto i due tratti pendenti, ma piuttosto è meglio lasciare comunque un certo tratto orizzontale, che comporta infatti una minore correzione rispetto a quanto previsto dal diagramma asintotico.

Esercizio 40. *Tracciare il diagramma asintotico di Bode, in modulo e fase, della funzione di trasferimento seguente:*

$$T(i\omega) = \frac{10^8 + 10^{11}i\omega}{(10 + i\omega)(-\omega^2 + 10^4 + 10^6)}$$

Soluzione

La funzione fornita dev'essere per prima cosa trasformata per riportarla nella forma (5.1).

$$T(i\omega) = \frac{10^8(1 + 10^3i\omega)}{10(1 + 0,1i\omega)10^6[\frac{(i\omega)^2}{10^6} + \frac{10^4}{10^6}i\omega + 1]} = \frac{10(1 + 10^3i\omega)}{(1 + 0,1i\omega)[(\frac{i\omega}{10^3})^2 + 10\frac{i\omega}{10^3} + 1]}$$

Poiché $\zeta=5>1$ ($10=2*\zeta$), il termine di secondo grado può essere fattorizzato. Si ha quindi

$$x_{1,2} = \frac{-0,01 \pm \sqrt{0,01^2 - 4 \cdot 10^{-6}}}{2 \cdot 10^{-6}} \quad \begin{cases} x_1 = -9898,98 \\ x_2 = -101,02 \end{cases}$$

e di conseguenza

- $\tau_1 \cdot 10^{-4}$ s; $\log(9898,98)$ 4 rad/s
- $\tau_2 \cdot 10^{-2}$ s; $\log(101,05)$ 2 rad/s

$$T(i\omega) = \frac{10(1 + 1000i\omega)}{(1 + 0,1i\omega)(1 + 0,0001i\omega)(1 + 0,01i\omega)}$$

La funzione di trasferimento è caratterizzata dalle funzioni elementari riportate in Tabella 5.11 i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.22.

1) K=10	2) $(1 + 1000i\omega)$	3) $(1 + 0,1i\omega)^{-1}$	4) $(1 + 0,01i\omega)^{-1}$	5) $(1 + 0,0001i\omega)^{-1}$
p.r. [rad/s]	$-\log(1000)=-3$	$-\log(0,1)=1$	$-\log(0,01)=2$	$-\log(0,0001)=4$

Tabella 5.11

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.23.

Si vuole qui richiamare l'attenzione al fatto che per $\zeta>1$ il relativo termine di secondo grado è fattorizzabile e la fattorizzazione deve essere eseguita al fine di scrivere ed

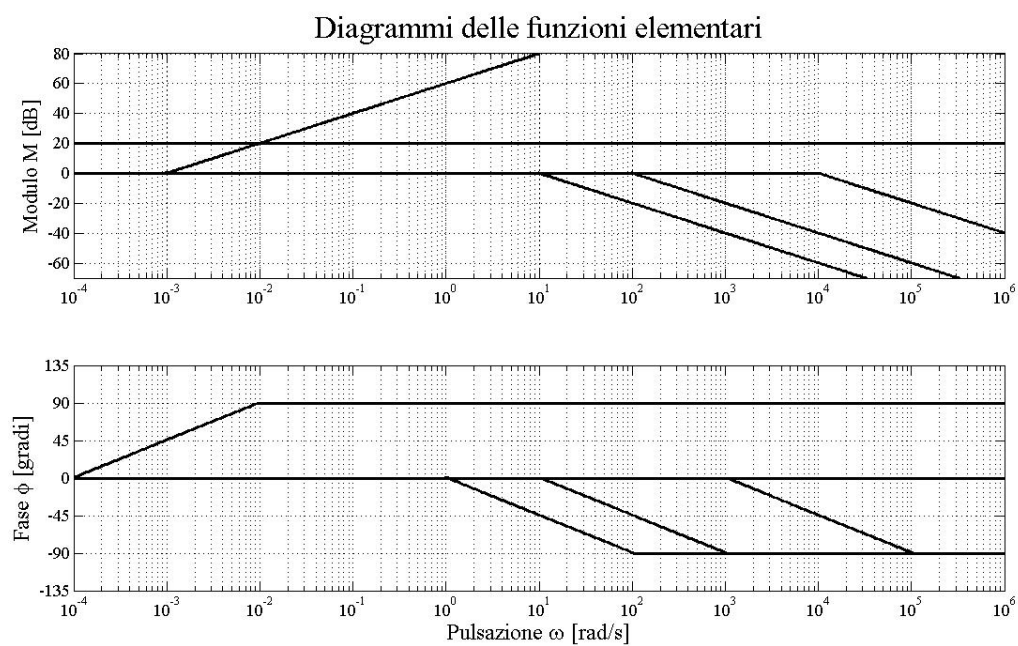


Figura 5.22

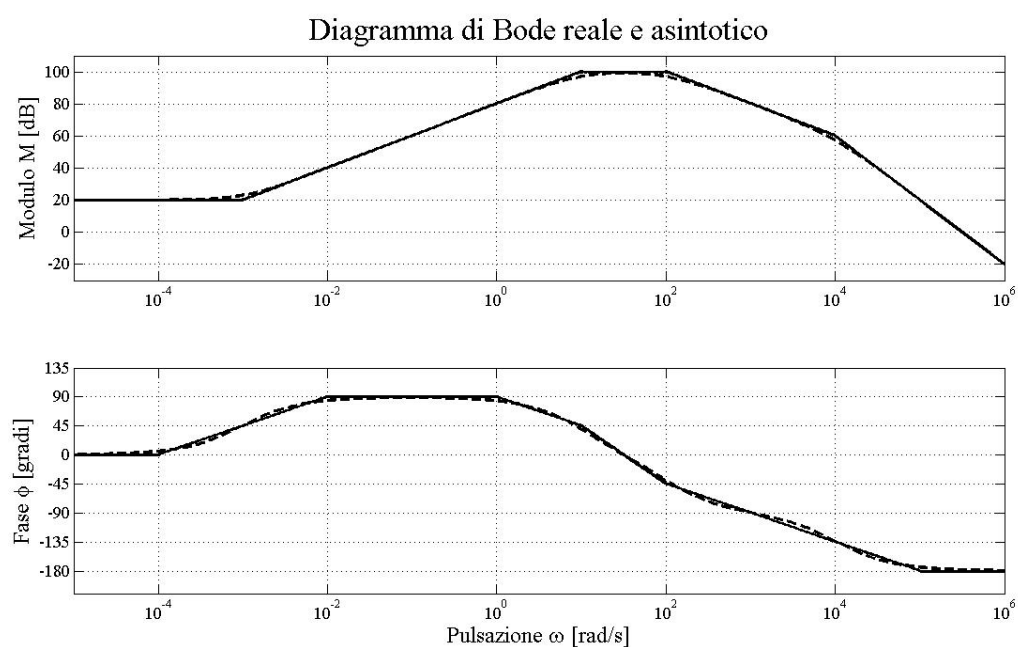


Figura 5.23

eventualmente tracciare il grafico della funzione di trasferimento sinusoidale. Non fare la fattorizzazione comporta un errore concettuale rilevante. Non a caso le curve di correzione per i termini di secondo ordine sono parametriche in ζ con $\zeta \leq 1$.

Esercizio 41. Si consideri la catena di misura riportata in Figura 5.24. Si determini la

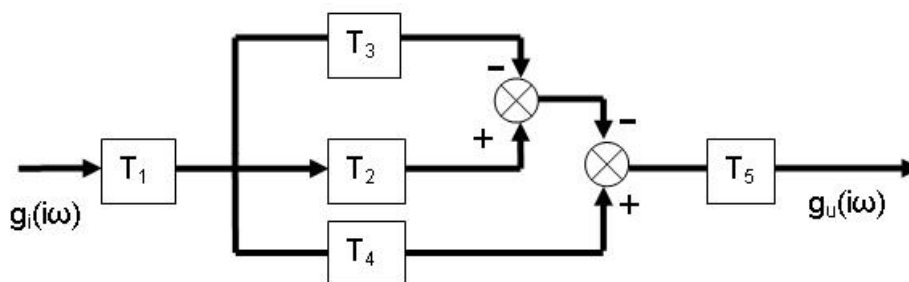


Figura 5.24

funzione di trasferimento e si traccino i diagrammi di Bode in modulo e fase, assumendo $T_1 = 1,25i\omega$; $T_2 = 60 + 17i\omega$; $T_3 = 58 + 19i\omega$; $T_4 = 10$; $T_5 = [(1 + 0,003i\omega)(1 + 0,02i\omega)]^{-1}$. Si determini la banda passante a 3 dB, se esiste.

Soluzione

Eliminando per prima cosa i paralleli secondo le regole dell'algebra dei blocchi, si ha alla fine

$$T(i\omega) = \frac{10i\omega(1 + 0,25i\omega)}{(1 + 0,0003i\omega)(1 + 0,02i\omega)}$$

La funzione di trasferimento globale è caratterizzata dalle funzioni elementari riassunte in Tabella 5.12 i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.25.

1) K=10	2) $i\omega$	3) $(1 + 0,25i\omega)$	4) $(1 + 0,0003i\omega)^{-1}$	5) $(1 + 0,02i\omega)^{-1}$
p.r.	[rad/s]	$-\log(0,25)=0,6$	$-\log(0,0003)=3,5$	$-\log(0,02)=1,7$

Tabella 5.12

La determinazione delle ordinate nei punti di variazione delle pendenze nel diagramma asintotico del modulo richiede l'effettuazione di alcuni semplici calcoli. Se per $\omega=0$ il modulo vale 20 dB, nella fascia $0 \leq \log \omega \leq 0,6$ il modulo cresce di 12 dB portandosi a 32 dB. A tale risultato di giunge impostando la proporzione

$$\underbrace{1 : 20}_{\text{pendenza}} = 0,6 : x \Rightarrow x = 12 \text{ dB}$$

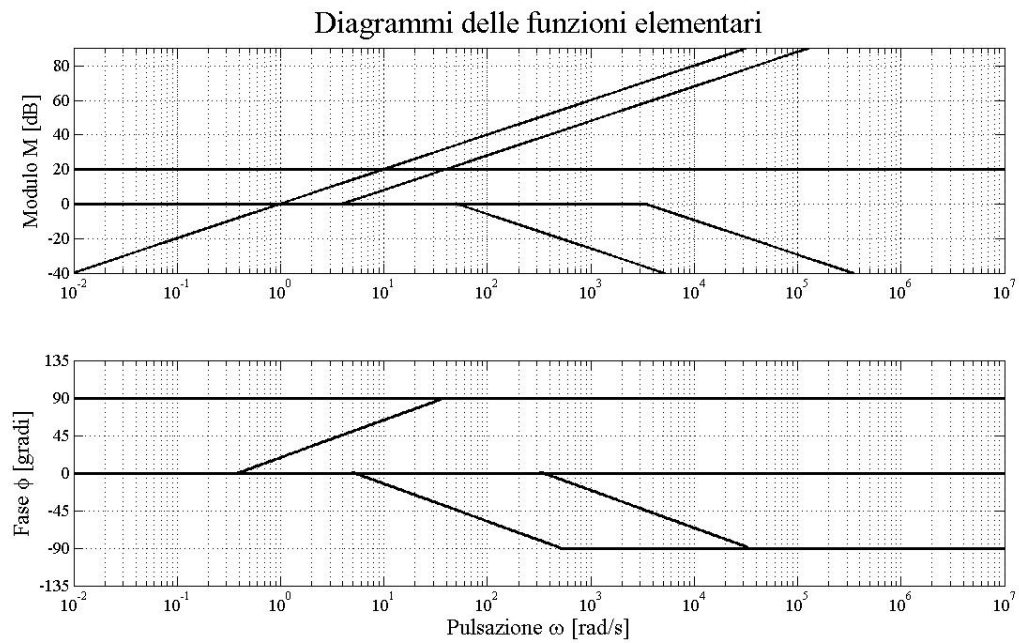


Figura 5.25

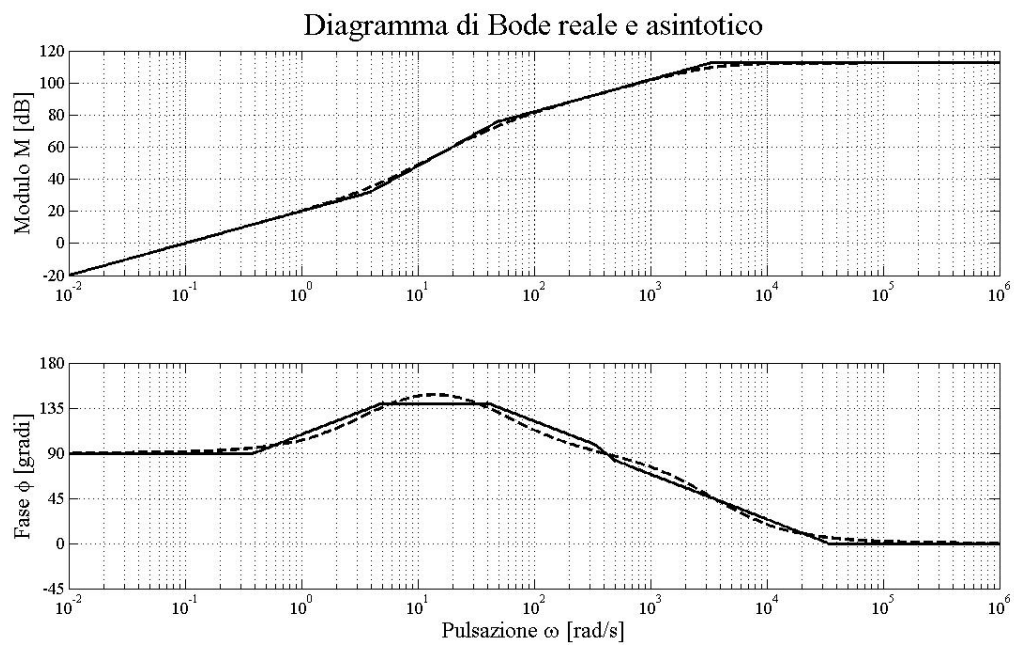


Figura 5.26

Tra $0,6 \leq \log \omega \leq 1,7$ con una pendenza di 40 dB/decade il modulo cresce di 36 dB, raggiungendo i 76 dB ($1 : 40 = 1,7 - 0,6 : x \Rightarrow x = 44$ dB) in corrispondenza del punto di rottura intermedio. Quindi tra $1,7 \leq \log \omega \leq 3,5$ la pendenza torna a 20 dB/decade e il modulo si porta a 112 dB, avendo infatti un incremento di 36 dB ($1 : 20 = 3,5 - 1,7 : x \Rightarrow x = 36$ dB), valore che per pulsazioni maggiori rimane infine costante. Chiaramente calcoli simili vanno effettuati per costruire il diagramma asintotico della fase.

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.26. Tenendo conto della correzione da apportare in corrispondenza di un punto di rottura sufficientemente lontano da altri, la banda passante a -3 dB è $3,5 < \log \omega < \infty$.

Esercizio 42. L'analisi funzionale di uno strumento conduce allo schema a blocchi della Figura 5.27.

a) Se ne esegua la riduzione e si traccino i diagrammi asintotici di Bode, modulo e fase,

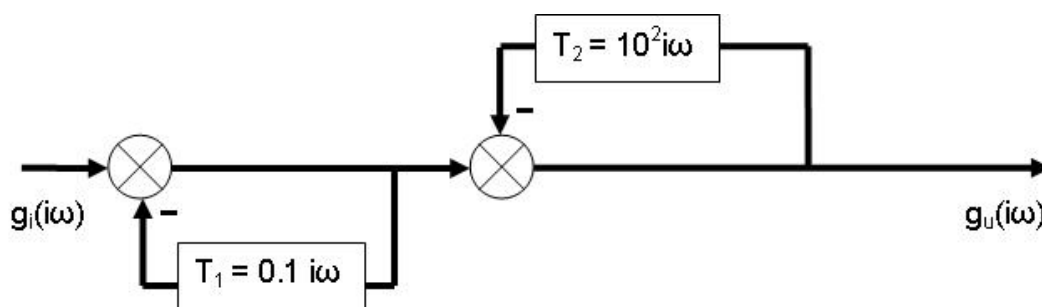


Figura 5.27

della funzione di trasferimento globale.

b) Si determini la banda passante a 3 dB del sistema.

Soluzione

a Eliminando per prima cosa gli anelli di retroazione secondo le regole dell'algebra dei blocchi, si ha

$$g_i(t) \longrightarrow \left[\frac{1}{1 + T_1} \right] \longrightarrow \left[\frac{T_2}{1 + T_2} \right] \longrightarrow g_u(t)$$

$$T(i\omega) = \frac{T_2}{(1 + T_1)(1 + T_2)} = \frac{100i\omega}{(1 + 0,1i\omega)(1 + 100i\omega)}$$

La funzione di trasferimento globale è caratterizzata dalle funzioni elementari evidenziate in Tabella 5.13 i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.28.

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.29.

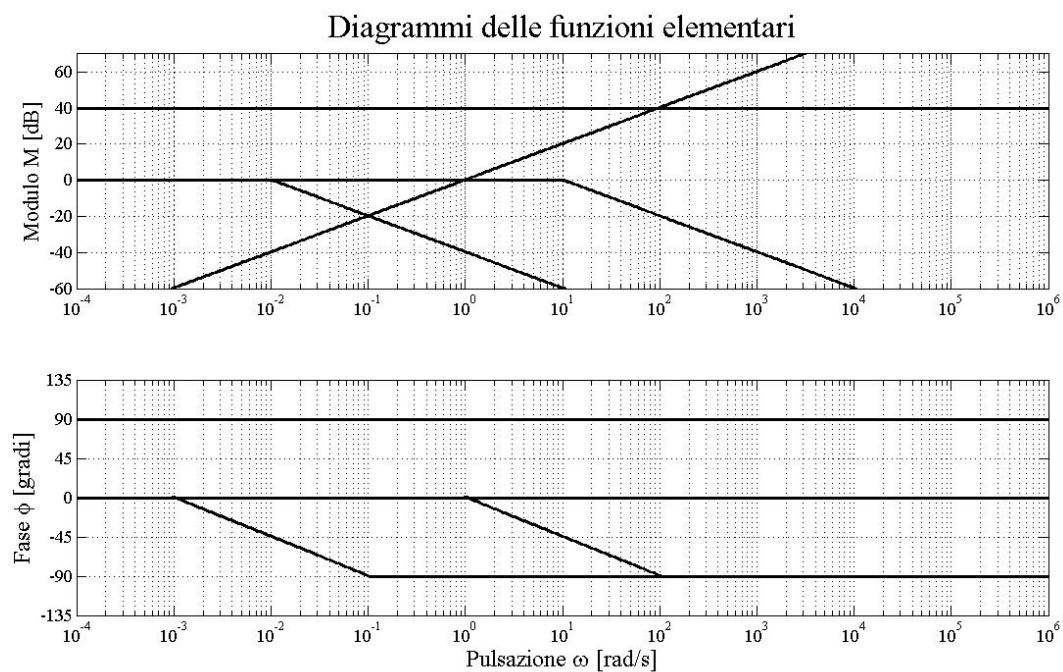


Figura 5.28

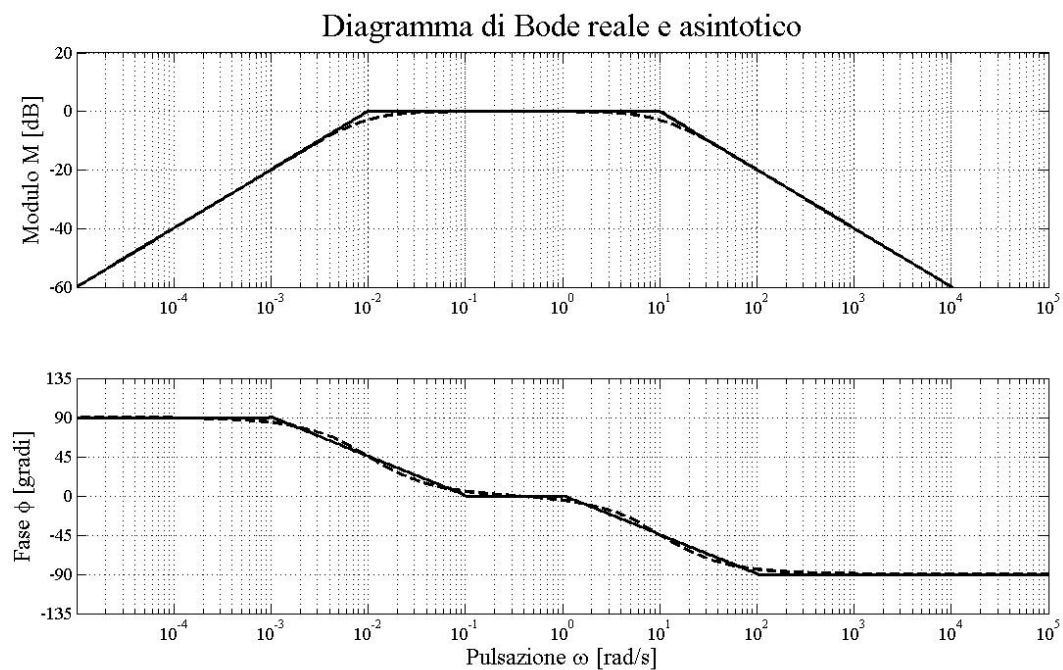


Figura 5.29

1) $K=100$	2) $i\omega$	3) $(1 + 0,1i\omega)^{-1}$	4) $(1 + 100i\omega)^{-1}$
p.r.	[rad/s]	$-\log(0,1)=1$	$-\log(100)=-2$

Tabella 5.13

b Dal momento che i punti di rottura sono separati tra loro di più di una decade, la correzione da apportare al diagramma asintotico in corrispondenza di essi è di -3 dB. Pertanto la banda passante è $-2 < \log \omega < 1$.

Esercizio 43. Ridurre lo schema a blocchi dello strumento illustrato della Figura 5.30:

a) si traccino i diagrammi asintotici di Bode, modulo e fase, della funzione di trasferimento globale

b) si determini la banda passante a 3 dB del sistema.

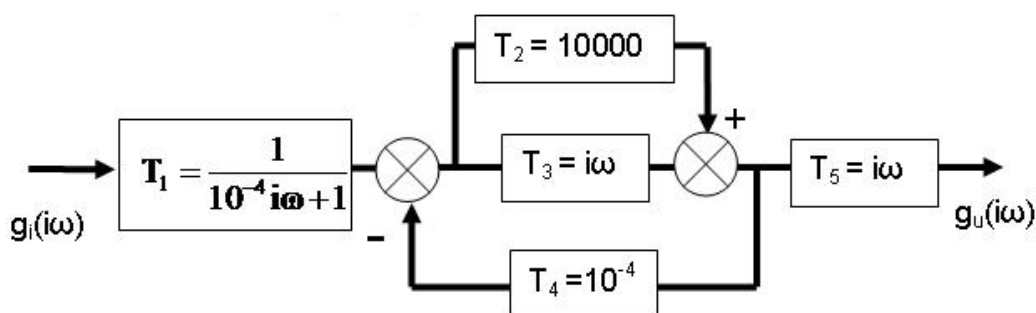


Figura 5.30

Soluzione

a Eliminando per prima cosa il parallelo tra T_2 e T_3 e poi l'anello di retroazione secondo le regole dell'algebra dei blocchi, si ha

$$g_i(t) \longrightarrow [T_1] \longrightarrow \left[\frac{T_2 + T_3}{1 + (T_2 + T_3)T_4} \right] \longrightarrow [T_5] \longrightarrow g_u(t)$$

$$T(i\omega) = \frac{T_1(T_2 + T_3)T_5}{1 + (T_2 + T_3)T_4} \cong^4 \frac{i\omega}{1 + 2\frac{i\omega}{10^4} + (\frac{i\omega}{10^4})^2}$$

La funzione di trasferimento globale è caratterizzata dalle funzioni elementari ($\zeta = 1$) riportate in Tabella 5.14 i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.31.

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.32.

⁴Si noti che $1 + 10^4 + 2i\omega + 10^{-4}(i\omega)^2 \cong 10^4 + 2i\omega + 10^{-4}(i\omega)^2$

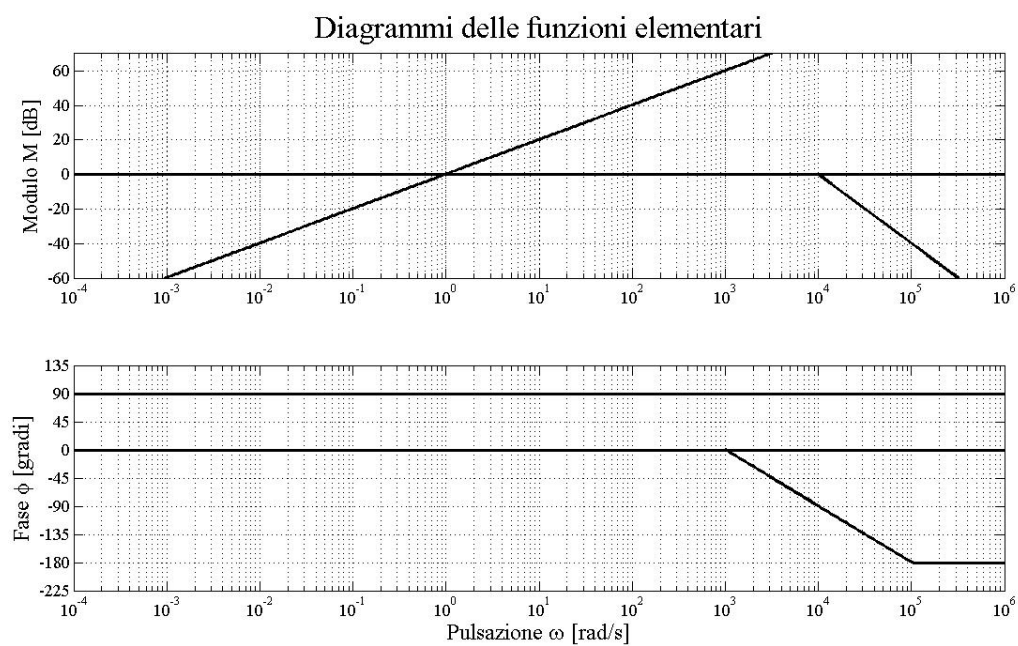


Figura 5.31

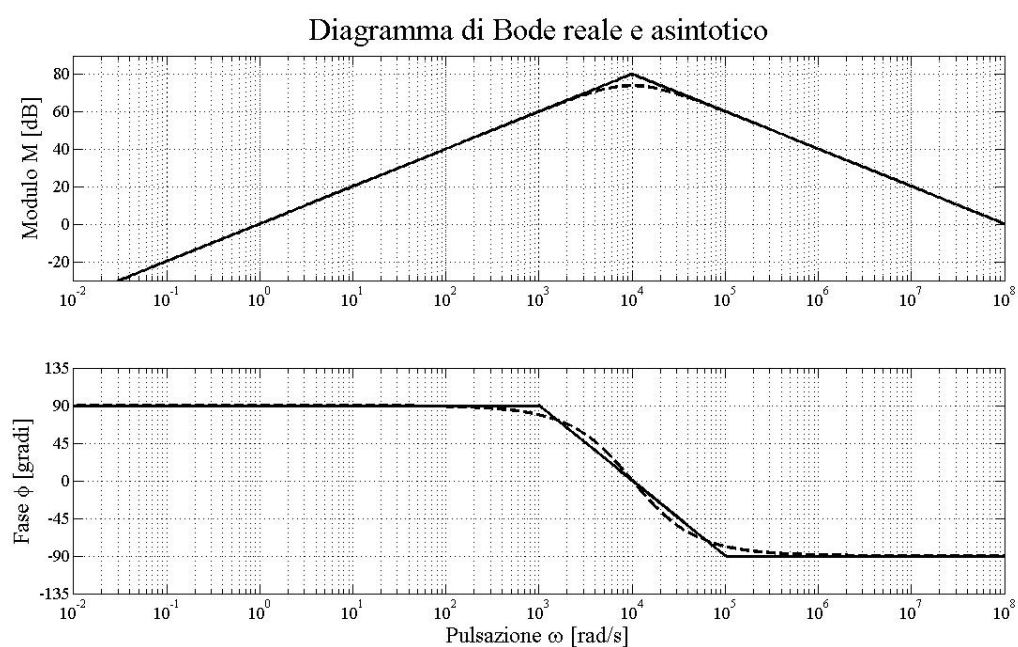


Figura 5.32

1) $K=1$	2) $i\omega$	3) $(1 + 10^{-4}i\omega)^{-2}$
p.r.	[rad/s]	$-\log(0.0001)=4$

Tabella 5.14

b Tenendo conto che la correzione in corrispondenza del punto di rottura doppio è di -6 dB, la banda passante non esiste.

Esercizio 44. L'analisi funzionale di uno strumento conduce allo schema a blocchi in Figura 5.33.

a) Se ne esegua la riduzione e si traccino i diagrammi asintotici di Bode, modulo e fase,

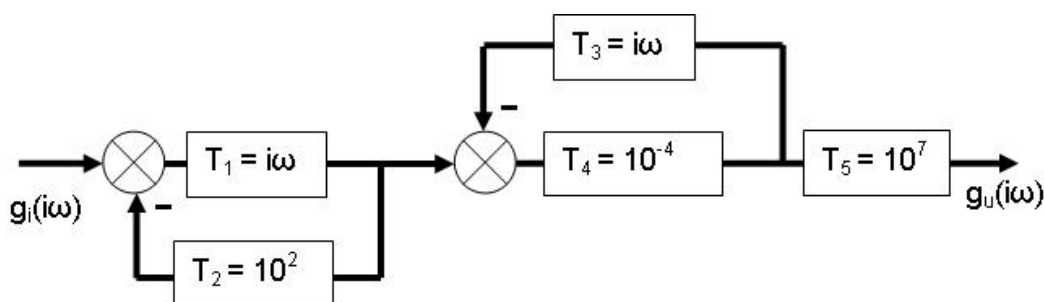


Figura 5.33

della funzione di trasferimento globale.

b) Si determini la banda passante a 3 dB del sistema.

c) Si determini il segnale di uscita, a regime, per l'ingresso $g_i(t) = 10\sin(25t) + 10^3\sin(10^5t)$

Soluzione

a Eliminando per prima cosa gli anelli di retroazione secondo le regole dell'algebra dei blocchi, si ha

$$g_i(t) \longrightarrow \left[\frac{T_1}{1 + T_1 T_2} \right] \longrightarrow \left[\frac{T_4}{1 + T_3 T_4} \right] \longrightarrow [T_5] \longrightarrow g_u(t)$$

$$T(i\omega) = \frac{T_1 T_4 T_5}{(1 + T_1 T_2)(1 + T_3 T_4)} = \frac{i\omega 10^{-4} 10^7}{(1 + 10^2 i\omega)(1 + 10^{-4} i\omega)} = \frac{10^3 i\omega}{(1 + 10^2 i\omega)(1 + 10^{-4} i\omega)}$$

La funzione di trasferimento globale è caratterizzata dalle funzioni elementari richiamate in Tabella 5.15 i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.34.

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.35.

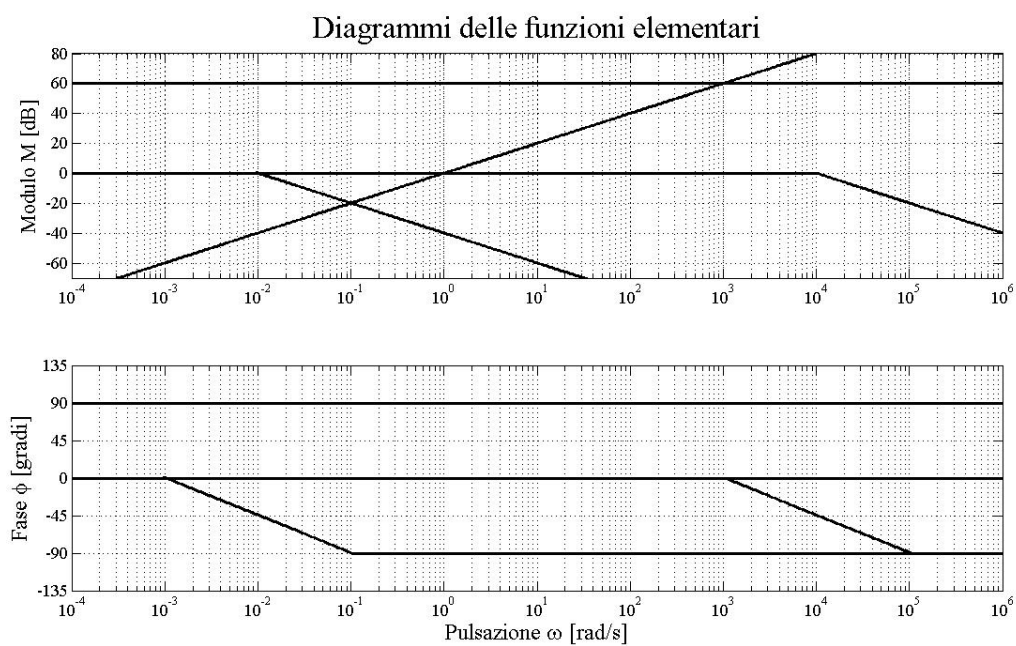


Figura 5.34

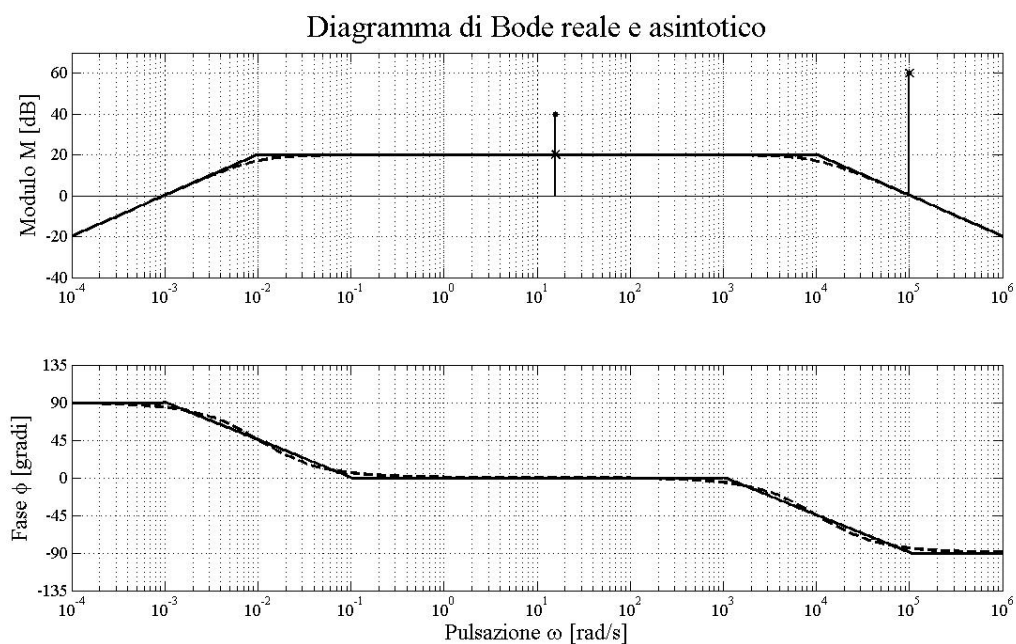


Figura 5.35

1) $K=1000$ p.r.	2) $i\omega$ [rad/s]	3) $(1 + 100i\omega)^{-1}$ $-\log(100)=-2$	4) $(1 + 0,0001i\omega)^{-1}$ $-\log(0,0001)=4$
---------------------	-------------------------	-----------------------------------------------	----------------------------------------------------

Tabella 5.15

[b] Dal momento che i punti di rottura sono separati tra loro di più di una decade, la correzione da apportare al diagramma asintotico in corrispondenza di essi è di -3 dB. Pertanto la banda passante è $-2 < \log \omega < 4$.

[c] Nel dominio del tempo il segnale in ingresso $g_i(t)$ è costituito delle seguenti sinusoidi:
 (1) $g_{i1} = 10 \sin(25t)$
 (2) $g_{i2} = 1000 \sin(10^5 t)$
 Procedendo come nell'esercizio 34 a pagina 58 e adottando la (5.3) per il calcolo del volare in dB di ciascuna componente del segnale d'uscita, si ha la tabella Tabella 5.16. I risultati sono rappresentati graficamente in Figura 5.35.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]	$M(\omega)$ [dB]	$ g_u $ [dB]
(1)	$20 \log(10) = 20$	$\log(15.9) = 1.4$	20	$20 + 20 = 40$ dB
(2)	$20 \log(1000) = 60$	$\log(10^5) = 5$	0	$60 + 0 = 60$ dB

Tabella 5.16

Anche se non richiesto, è possibile scrivere con facilità l'espressione a meno della fase⁵ del segnale d'uscita nel dominio del tempo. Per questo basta riconvertire i valori in dB delle due ampiezze nella scala di misura [u.m.] con cui sono state fornite le ampiezze delle sinusoidi in ingresso usando la (5.5) a pagina 61. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$g_u(t) = 100 \sin(15.9t + \varphi_1) + 1000 \sin(10^5 t + \varphi_2)$$

Esercizio 45. *Un ingresso tempovariante viene amplificato di un fattore 1000 e successivamente filtrato mediante un filtro passa-basso del primo ordine con frequenza di taglio di 40 Hz.*

- Rappresentare la catena di misura e scriverne la funzione di trasferimento sinusoidale.*
- Tracciare poi il diagramma di Bode in modulo e fase.*

⁵Per la verità il valore della fase in corrispondenza delle pulsazioni delle due sinusoidi è leggibile dal diagramma di Bode. Come stima si può fare riferimento al valore che emerge dal diagramma asintotico, chiaramente se l'errore che si commette è accettabile, altrimenti la fase va calcolata oppure letta dal diagramma reale.

Soluzione

a La catena di misura è facilmente rappresentabile e si presenta come segue

$$g_i(t) \longrightarrow \boxed{K} \longrightarrow \boxed{F. P.B.} \longrightarrow g_u(t)$$

e la funzione di trasferimento globale risulta (si veda l'esercizio 35 a pagina 61 per quanto riguarda il filtro passa-basso)

$$T(i\omega) = \frac{K}{(1 + \tau i\omega)} = \frac{1000}{(1 + 0,004i\omega)}$$

Infatti $\omega = 2\pi f = 80\pi \text{ rad/s}$, da cui $\log\omega = 2,4 \text{ rad/s}$ e $\tau = \omega^{-1} = 0,004 \text{ s}$.

b La funzione di trasferimento globale è caratterizzata dalle funzioni elementari richiamate in Tabella 5.17 i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.36.

$$\begin{array}{ll} 1) K=1000 & 2) (1 + 0,004i\omega)^{-1} \\ \text{p.r. [rad/s]} & -\log(0,004)=2,4 \end{array}$$

Tabella 5.17

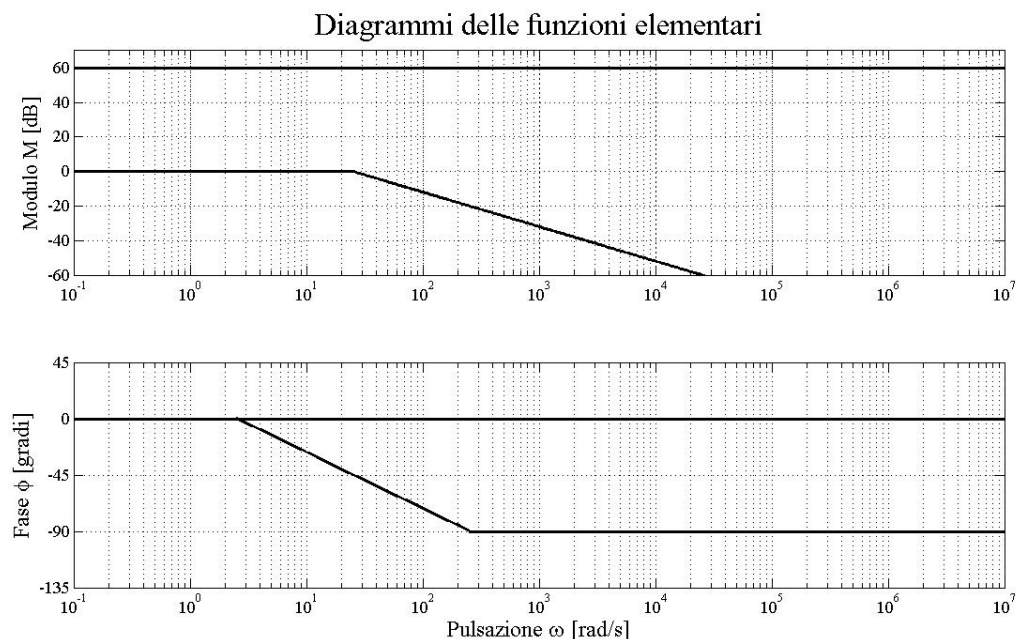


Figura 5.36

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento globale è in Figura 5.37.

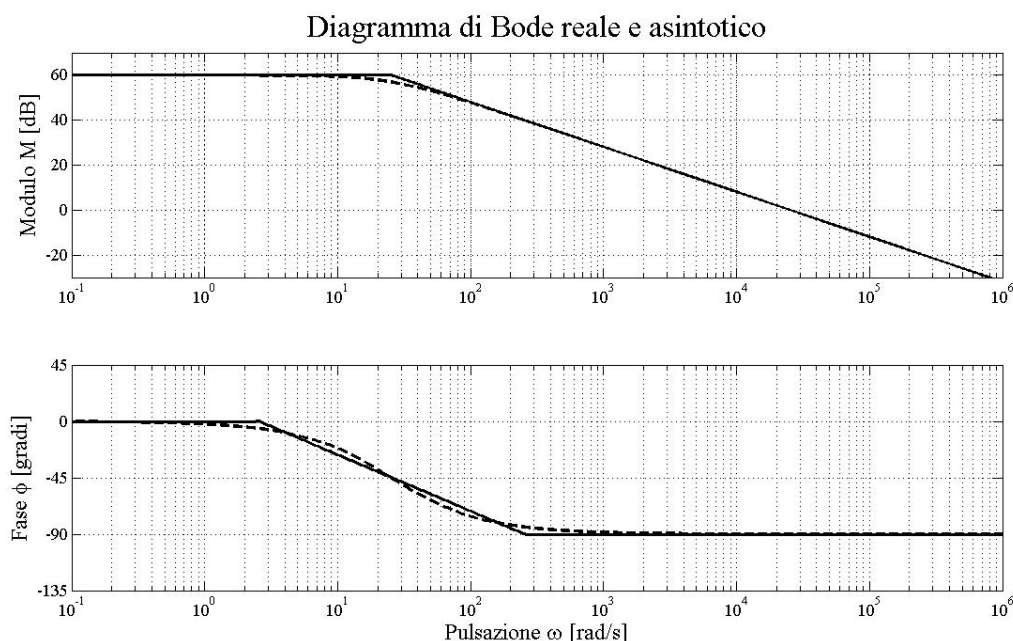


Figura 5.37

Esercizio 46. Si consideri un filtro passa-alto del primo ordine e con frequenza di taglio pari a 100 Hz.

- Si scriva la funzione di trasferimento e se ne rappresenti il diagramma di Bode asintotico in modulo.
- In ingresso al filtro si consideri un segnale sinusoidale di ampiezza unitaria oscillante a 10 Hz ed un disturbo interferente sinusoidale di ampiezza 1000 e frequenza pari a 0,1 Hz. Rappresentare il modulo dell'uscita su di un diagramma di Bode asintotico.
- Proporre una frequenza di taglio del filtro che migliori l'amplificazione del segnale di uscita e riduca gli effetti di disturbo.

Soluzione

a) La funzione di trasferimento (si veda l'esercizio 37 a pagina 65) risulta

$$T(i\omega) = \frac{\tau i\omega}{1 + \tau i\omega} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3} i\omega}{1 + 1,6 \cdot 10^{-3} i\omega}$$

Infatti $\omega = 2\pi f = 200\pi$ rad/s, da cui $\log \omega = 2,8$ rad/s e $\tau = \omega^{-1} = 0,0016$ s. La funzione di trasferimento è caratterizzata da 3 funzioni elementari (vedi la Tabella 5.18) i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.38.

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento è in Figura 5.39. Per trovare le ordinate in alcuni punti significativi si ricorre a delle semplici proporzioni come fatto nell'esercizio 41 a pagina 78.

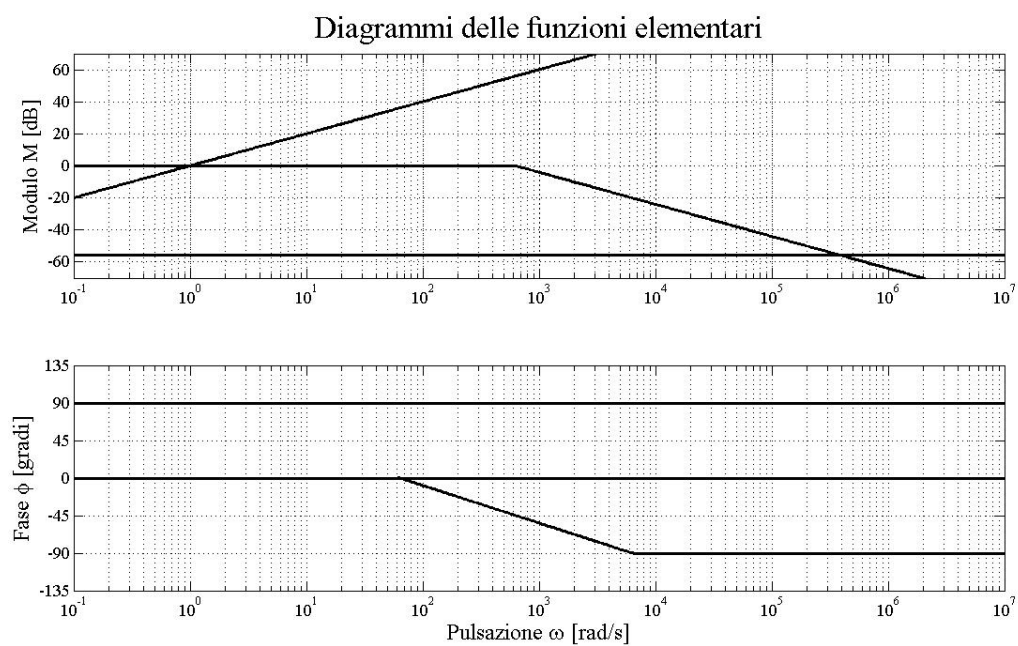


Figura 5.38

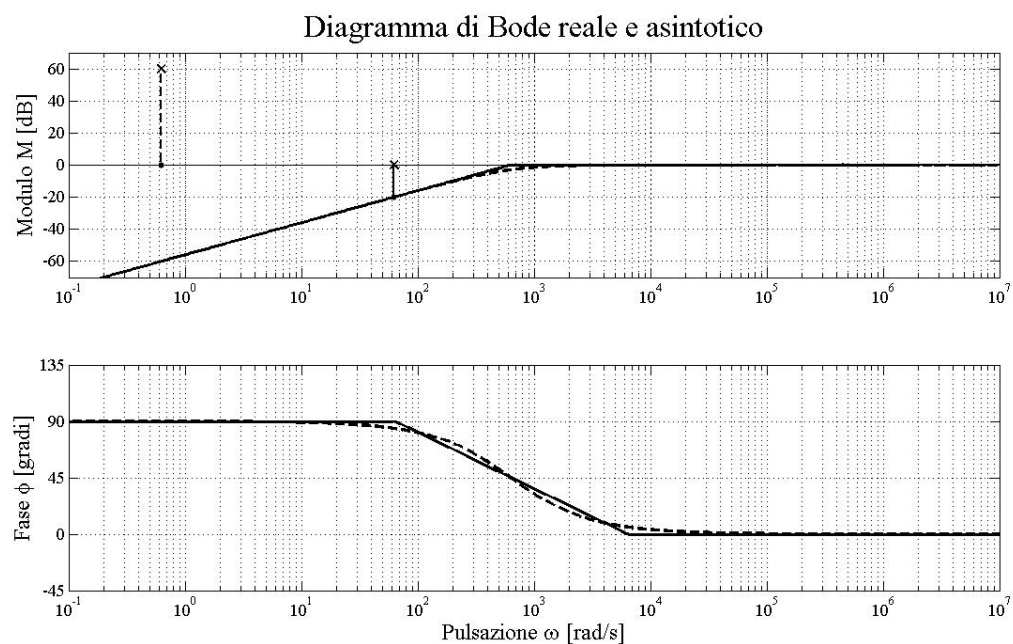


Figura 5.39

1) $K=0,0016$ p.r.	2) $i\omega$ [rad/s]	3) $(1 + 0,0016i\omega)^{-1}$ $-\log(0,0016)=2,8$
-----------------------	-------------------------	------------------------------------------------------

Tabella 5.18

- [b]** Nel dominio del tempo il segnale in ingresso $g_i(t)$ è costituito dalle seguenti sinusoidi:
- (1) $g_{i1} = \sin(2\pi 10t)$
 - (2) $g_{i2} = 1000\sin(2\pi 0,1t)$

Procedendo come nell'esercizio 34 a pagina 58 e adottando la (5.3) per il calcolo del volare in dB di ciascuna componente del segnale d'uscita, si ha la Tabella 5.19.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]	$M(\omega)$ [dB]	$ g_u $ [dB]
(1)	$20\log(1) = 0$	$\log(2\pi 10) = 1,8$	-20	$0-20=-20$ dB
(2)	$20\log(1000) = 60$	$\log(2\pi 0,1) = -0,2$	-60	$60-60=0$ dB

Tabella 5.19

I valori del modulo $M(\omega)$ della funzione di trasferimento in corrispondenza delle pulsazioni dei segnali sono così ottenuti:

- $1 : 20 = 0,2 : x$ da cui $x = 4$ dB. Si tratta però di un valore negativo che va sommato al valore di -56 dB del modulo della funzione di trasferimento in corrispondenza di $\omega=0$. Si ottiene -60 dB
- $2,8 : -56 = 2,8-1,8 : x$ da cui $x = -20$ dB.

I risultati sono stati per semplicità inseriti all'interno della Figura 5.39.

[c] E' evidente che la frequenza di taglio del filtro penalizza il segnale, dal momento che ne comporta una attenuazione di ben 20 dB. Per evitare l'attenuazione del segnale di interesse continuando però ad attenuare il disturbo interferente, la frequenza di taglio del filtro deve essere di certo inferiore ai 10 Hz.

Tenendo conto della correzione di ± 3 dB da apportare al diagramma asintotico in corrispondenza di un punto di rottura e che tale correzione è nulla a distanza di una decade⁶, si può allora ragionevolmente assumere il valore di 1,6 Hz come frequenza di taglio di primo tentativo (l'ottimizzazione dei filtri è una operazione in generale complessa). Infatti a $\log\omega=1$ corrisponde una frequenza $f=\frac{10}{2\pi}=1,6$ Hz.

⁶Chiaramente tutto ciò in assenza di altri punti di rottura distanti meno di una decade da quello considerato.

Esercizio 47. Rappresentare in un diagramma di Bode in modulo:

- Un filtro passa-basso del I ordine con amplificazione pari a 100 e con frequenza di taglio (a - 3 dB) di 3000 Hz.
- Un filtro passa-alto del II ordine con amplificazione pari a 500 e con frequenza di taglio (a - 6 dB) di 0,8 Hz.
- Un ingresso consistente in una sinusoide di ampiezza unitaria oscillante con frequenza di 10 Hz a cui sono sovrapposti due disturbi sinusoidali di ampiezza 100 oscillanti con frequenza di 0,1 e di 400 Hz.
- L'uscita di una catena di misura consistente nell'ingresso c) che entra nel filtro a) posto in cascata con il filtro b).
- Scegliere in fine un'opportuna frequenza di taglio del filtro a) tale da massimizzare il rapporto segnale/rumore.

Soluzione

a) Per la funzione di trasferimento di un filtro passa-basso del I ordine si veda l'esercizio 35 a pagina 61. Poiché è presente un'amplificazione pari a 100, la funzione di trasferimento globale del filtro in esame è

$$T_{PB}(i\omega) = \frac{100}{1 + 5.3 \cdot 10^{-5} i\omega}$$

risultando infatti la pulsazione $\omega = 2\pi f = 2\pi 3000 \text{ rad/s}$ e di conseguenza $\log \omega = 4,3 \text{ rad/s}$ e $\tau = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

La funzione di trasferimento è caratterizzata dalle 2 funzioni elementari riportate in Tabella 5.20 le quali danno il diagramma di Bode in Figura 5.40.

1) $K=100$	2) $(1 + 5.3 \cdot 10^{-5} i\omega)^{-1}$
p.r. [rad/s]	$-\log(2\pi 3000) = 4.3$

Tabella 5.20

b) Per la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto del II ordine si veda l'esercizio 37 a pagina 65. Poiché è presente un'amplificazione pari a 500 e la frequenza di taglio è a -6 dB, la funzione di trasferimento globale del filtro in esame è

$$T_{PA}(i\omega) = \frac{20(i\omega)^2}{(1 + 0.2i\omega)^2}$$

risultando infatti la pulsazione $\omega = 2\pi f = 2\pi 0.8 \text{ rad/s}$ e di conseguenza $\log \omega = 4,3 \text{ rad/s}$ e $\tau = 0,2 \text{ s}$.

La funzione di trasferimento è caratterizzata dalle 3 funzioni elementari richiamate in Tabella 5.21, le quali danno il diagramma di Bode in Figura 5.41.

Il tratto orizzontale della funzione di trasferimento è a 54 dB, valore che si ottiene

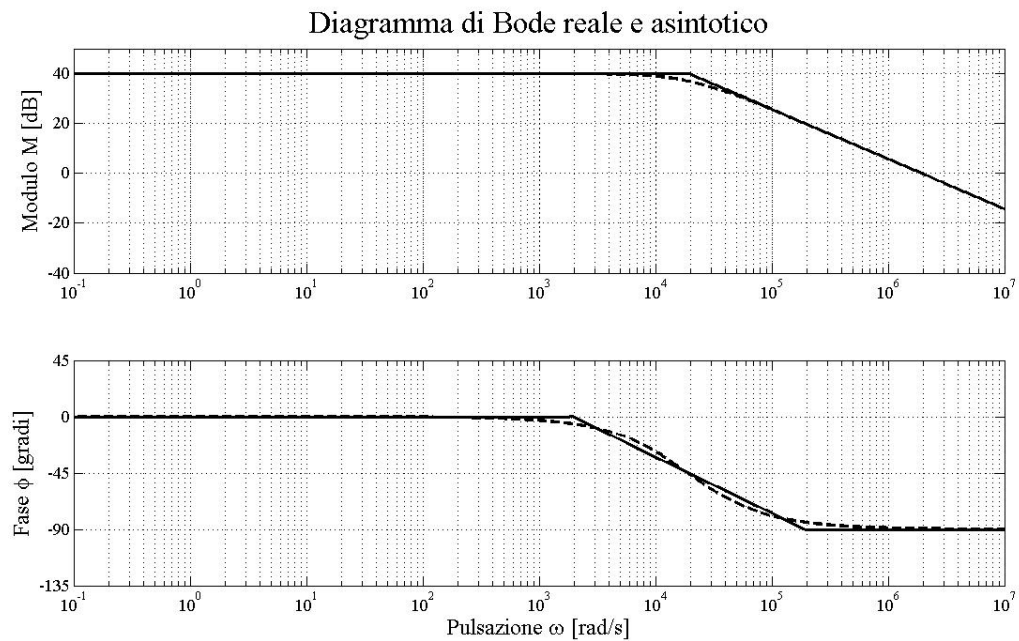


Figura 5.40

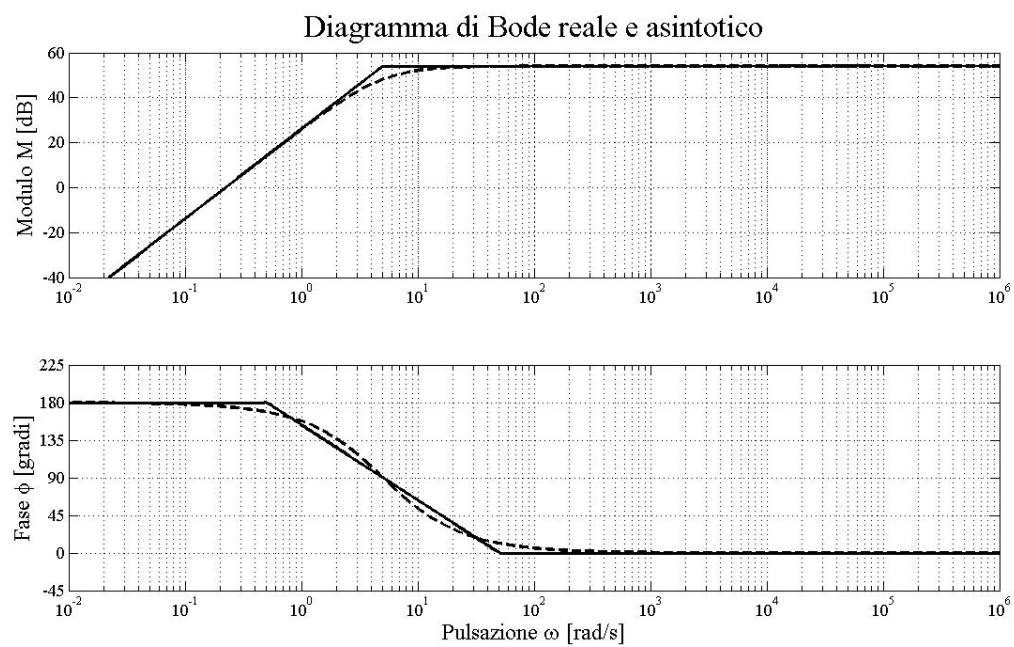


Figura 5.41

1) K=20	2) $(i\omega)^2 (1 + 0.2i\omega)^{-2}$	
p.r.	[rad/s]	$-\log(2\pi 0.8)=0.7$

Tabella 5.21

sommando $20\log 20=26$ dB derivante dalla funzione elementare K con il contributo della funzione 2 che si trova impostando la semplice proporzione $1:40 = 0,7 : x \Rightarrow x=28$ dB.

c Nel dominio del tempo il segnale $g(t)$ è somma delle seguenti funzioni:

- (1) $g_s = 1\sin(2\pi 10t)$
- (2) $g_{d1} = 100\sin(2\pi 0.1t)$
- (3) $g_{d2} = 100\sin(2\pi 400t)$

Sulla base di quanto detto nell'esercizio 32 a pagina 56, si hanno i valori della Tabella 5.22. La rappresentazione dei tre segnali è riportata in Figura 5.42.

Segnale	Ampiezza	Ascissa
(1)	$20\log(1) = 0$ dB	$\log(2\pi 10) = 1,8$
(2)	$20\log(100) = 40$ dB	$\log(2\pi 0.1) = -0.2$
(3)	$20\log(100) = 40$ dB	$\log(2\pi 400) = 3,4$

Tabella 5.22

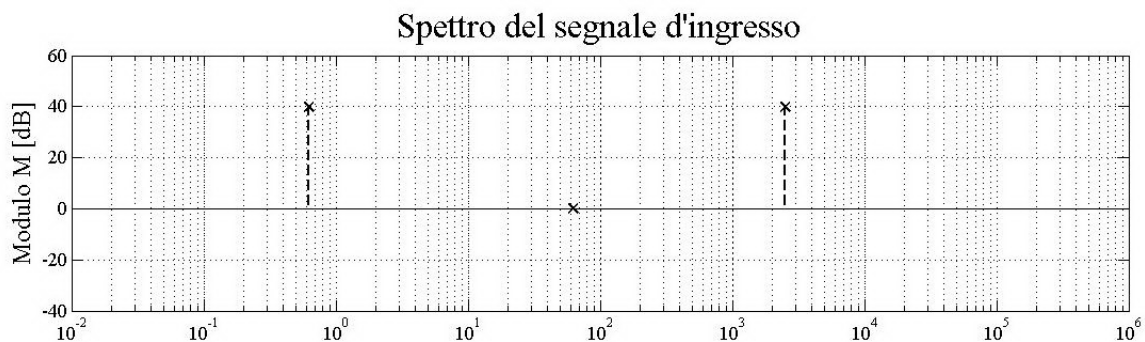


Figura 5.42

d Lo schema a blocchi è

$$g_i(t) \longrightarrow \boxed{T_{PB}} \longrightarrow \boxed{T_{PA}} \longrightarrow g_u(t)$$

e di conseguenza la funzione di trasferimento globale risulta

$$T(i\omega) = \frac{2000(i\omega)^2}{(1 + 5.3 \cdot 10^{-5}i\omega)(1 + 0.2i\omega)^2}$$

La funzione di trasferimento globale è caratterizzata dalle funzioni elementari nella Tabella 5.23 i cui diagrammi asintotici sono in Figura 5.43.

1) K=2000	2) $(i\omega)^2$	3) $(1 + 5.3 \cdot 10^{-5}i\omega)^{-1}$	4) $(1 + 0.2i\omega)^{-2}$
p.r.	[rad/s]	$-\log(2\pi 3000)=4,3$	$-\log(2\pi 0,8)=0,7$

Tabella 5.23

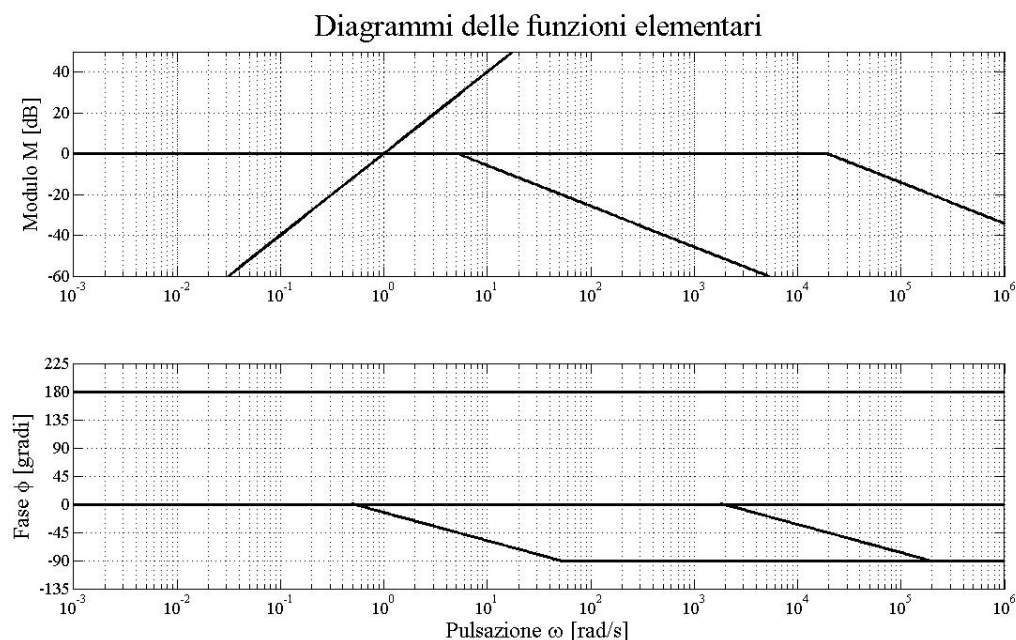


Figura 5.43

Si noti che, in base a ovvie considerazione sui diagrammi asintotici delle funzioni elementari:

- in corrispondenza di $\omega=0$ rad/s la funzione di trasferimento ha valore pari a $20\log(2000)=66$ dB
- il tratto orizzontale si trova a $66+28=94$ dB. Infatti $1 \text{ rad/s} : 40 \text{ dB} = 0,7 \text{ rad/s} : x \Rightarrow x=28 \text{ dB}$

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento globale è in Figura 5.44.

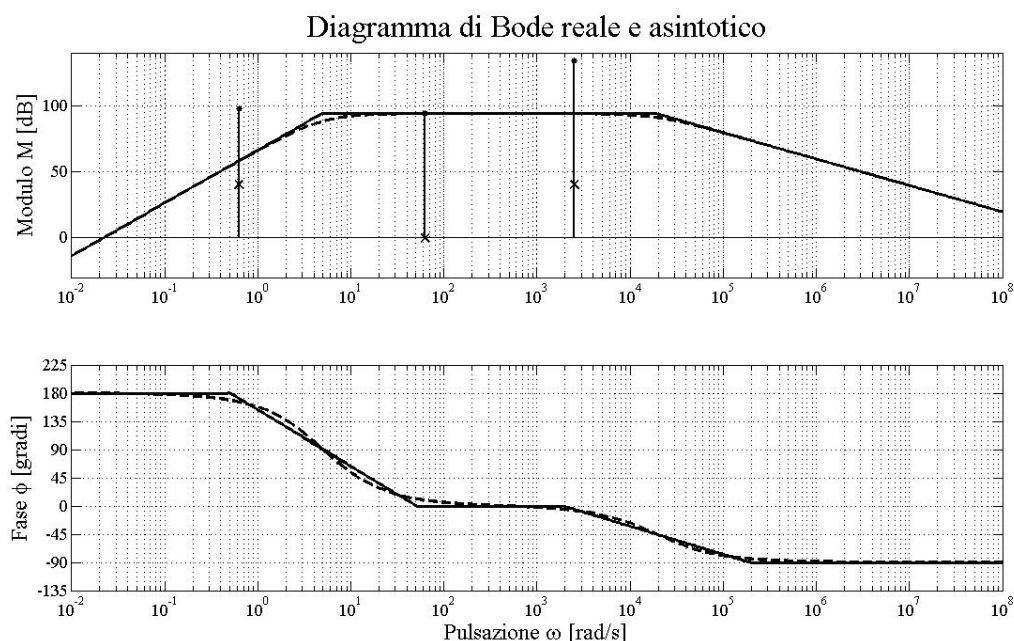


Figura 5.44

In questo stesso diagramma sono stati riportati il segnale d'ingresso e quello d'uscita. Per quanto riguarda la rappresentazione di quest'ultimo è necessario conoscere il valore del modulo della funzione di trasferimento per $\log \omega = -0,2$ rad/s. Tale valore si ottiene facilmente impostando la proporzione $0,7 \text{ rad/s} : 94-66 \text{ dB} = 0,2 \text{ rad/s} : x \Rightarrow x=8 \text{ dB}$ e prendendo tale valore col segno meno, ossia lo si sottrae a 66 dB, avendo così $66-8=58 \text{ dB}$. In definitiva si ha la Tabella 5.24.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]	$M(\omega)$ [dB]	$ g_u $ [dB]
(1)	0	1,8	94	$94+0=94$
(2)	40	-0,2	58	$40+58=98$
(3)	40	3,4	94	$40+94=134$

Tabella 5.24

e L'ottimizzazione di un filtro è in generale una operazione complessa.

Poiché viene espressamente richiesto di modificare la sola frequenza di taglio del filtro passa-basso, è evidente che essa debba essere abbassata al fine di migliorare il rapporto segnale/rumore.

Analizzando il solo diagramma asintotico è evidente che l'ottimo sarebbe portare la frequenza di taglio del filtro passa-basso in corrispondenza della frequenza del segnale di interesse, ossia a 10 Hz. Tuttavia nella realtà ciò comporterebbe una perdita di 3 dB del segnale principale, perdita che può essere invece contenuta scegliendo frequenze leggermente

più alte e addirittura annullata se si è lontani almeno una decade dalla punto di rottura. Chiaramente ciò comporta però una minore attenuazione del segnale di disturbo a 400 Hz.

In base a queste semplici considerazioni (che non esauriscono affatto il problema di ottimizzazione di un filtro) si può scegliere di abbassare la frequenza di taglio del filtro passa-basso portandola a 100 Hz ossia a circa una decade di distanza dalla frequenza del segnale principale.

Esercizio 48. Di un filtro passa-banda del II ordine ottenuto dalla cascata di un filtro passa-basso del I ordine con amplificazione pari a 10 e frequenza di taglio di 5 Hz a -3 dB e un filtro passa-alto del I ordine con amplificazione pari a 10 e frequenza di taglio di 0,005 Hz a -3 dB:

- a) Scrivere la funzione di trasferimento e rappresentarla in un diagramma di Bode in modulo;
- b) Rappresentare nello stesso diagramma:
 - un ingresso sinusoidale di ampiezza unitaria oscillante a 0,01 Hz;
 - un ingresso interferente con senoide di ampiezza 1000 oscillante a 100 Hz;
 - un ingresso interferente con senoide di ampiezza 10 oscillante a 1 Hz;
- c) Rappresentare la catena di misura consistente nei tre segnali posti in ingresso a due uguali filtri passa-banda in cascata e riportarne l'uscita.
- d) Discutere come sia possibile ottimizzare le caratteristiche dei filtri per rendere massimo il rapporto segnale/rumore.

Soluzione

a) Per le funzioni di trasferimento di base di un filtro passa-basso del I ordine e di un filtro passa-alto del I ordine si vedano rispettivamente gli esercizi da 35 a 37 nelle pagine 61–65. Poiché ciascun filtro è caratterizzato da amplificazione pari a 10, lo schema a blocchi del filtro passa-banda è

$$g_i(t) \longrightarrow \boxed{K_1} \longrightarrow \boxed{T_{PB}} \longrightarrow \boxed{K_2} \longrightarrow \boxed{T_{PA}} \longrightarrow g_u(t)$$

Le costanti di tempo, facilmente calcolabili ($\tau_{PB}=0,032$ s e $\tau_{PA}=31,83$ s), consentono di scrivere la funzione di trasferimento globale del filtro passa-banda qui in esame che risulta essere

$$T_1(i\omega) = \frac{3183i\omega}{(1 + 0.032i\omega)(1 + 31.83i\omega)}$$

La funzione di trasferimento è caratterizzata dalle funzioni elementari riportate in Tabella 5.25 le quali sono rappresentate graficamente in Figura 5.45.

Per il diagramma di Bode si osservi che

- $20\log(3183)=70$ dB

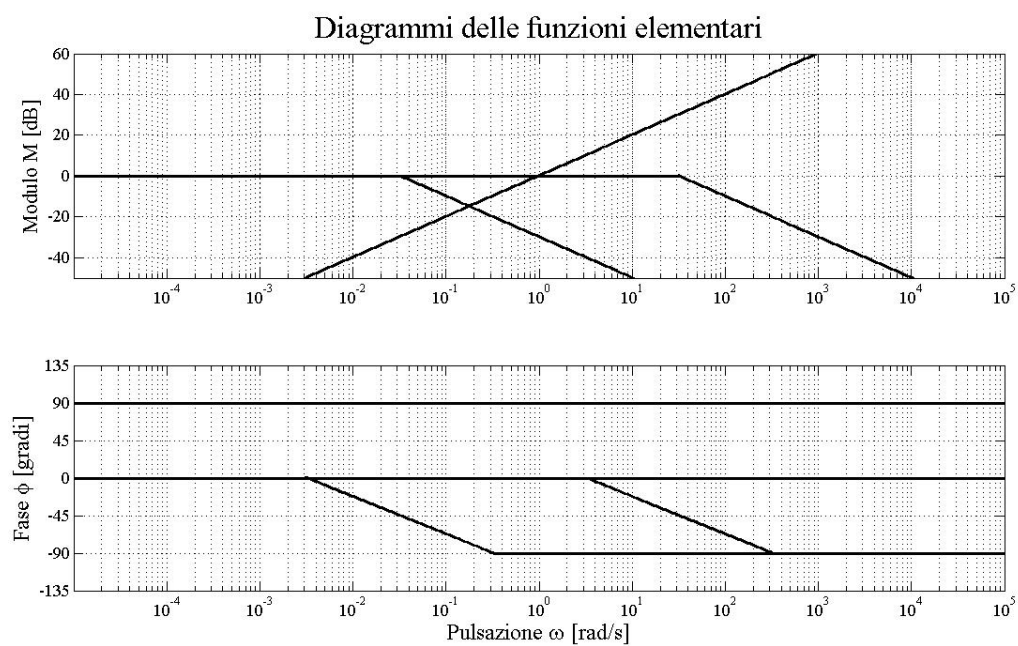


Figura 5.45

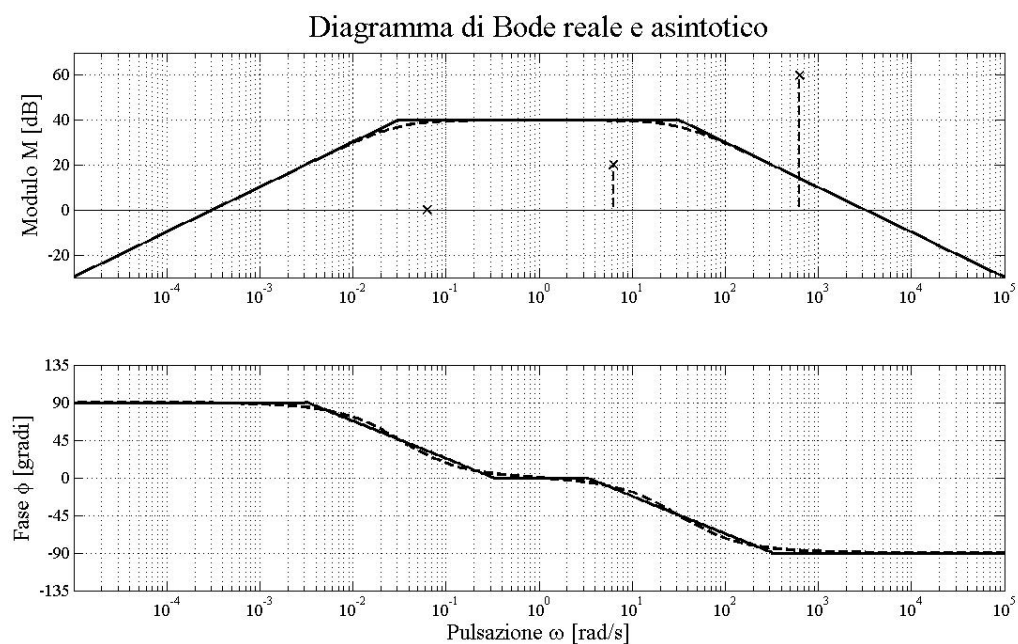


Figura 5.46

1) $K=3183$ p.r.	2) $i\omega$ [rad/s]	3) $(1 + 0.032i\omega)^{-1}$ $-\log(2\pi 5)=1,5$	4) $(1 + 31.83i\omega)^{-1}$ $-\log(2\pi 0.005)=-1,5$
---------------------	-------------------------	-----------------------------------------------------	----------------------------------------------------------

Tabella 5.25

- 1 : -20 dB = 1.5 : x => x=-30 dB, da cui si ricava che il tratto orizzontale del diagramma di Bode del modulo ha una “quota” massima di 70-30=40 dB.

Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento T_1 è in Figura 5.46.

b Nel dominio del tempo il segnale di ingresso $g_i(t)$ è somma delle seguenti funzioni:

- (1) $g_s = 1\sin(2\pi 0,01t)$
- (2) $g_{d1} = 1000\sin(2\pi 100t)$
- (3) $g_{d2} = 10\sin(2\pi 1t)$

I valori caratteristici dei 3 segnali, trasformati per poterli rappresentare in un diagramma di Bode, sono richiamati in Tabella 5.26. Il risultato è riportato in Figura 5.46.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]
(1)	$20\log(1) = 0$	$\log(2\pi 0.01) = -1,2$
(2)	$20\log(1000) = 60$	$\log(2\pi 100) = 2,8$
(3)	$20\log(10) = 20$	$\log(2\pi 1) = 0,8$

Tabella 5.26

c Lo schema a blocchi è

$$g_i(t) \longrightarrow \boxed{T_1} \longrightarrow \boxed{T_1} \longrightarrow g_u(t)$$

e di conseguenza la funzione di trasferimento globale $T_2 = T_1 T_1$ risulta

$$T_2(i\omega) = \frac{3183^2(i\omega)^2}{(1 + 0.032i\omega)^2(1 + 31.83i\omega)^2}$$

La funzione di trasferimento è caratterizzata dalle funzioni elementari riportate in Tabella 5.27 le quali sono rappresentate graficamente in Figura 5.47.

1) $K=3183^2$ p.r.	2) $i\omega^2$ [rad/s]	3) $(1 + 0.032i\omega)^{-2}$ $-\log(2\pi 5)=1,5$	4) $(1 + 31.83i\omega)^{-2}$ $-\log(2\pi 0.005)=-1,5$
-----------------------	---------------------------	-----------------------------------------------------	----------------------------------------------------------

Tabella 5.27

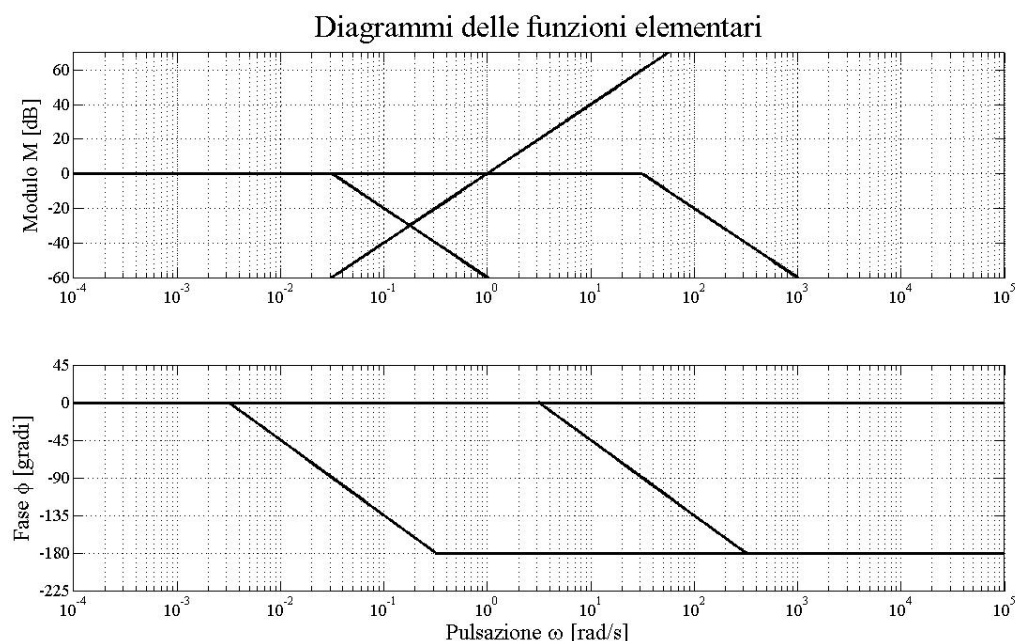


Figura 5.47

Con analogo procedimento si ricava che il tratto orizzontale incontra l'asse delle ascisse si corrispondenza del valore di 80 dB. Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento globale $T_2(i\omega)$ è in Figura 5.48.

In questo stesso diagramma sono stati riportati il segnale d'ingresso (nulla è cambiato rispetto a quanto visto in precedenza) e quello d'uscita. Per quanto riguarda la rappresentazione di quest'ultimo è necessario conoscere il valore del modulo della funzione di trasferimento per $\log\omega=2,8$ rad/s. Tale valore si ottiene facilmente impostando la proporzione $3,5-1,5$ rad/s : 80 dB = $3,5-2,8$ rad/s : x => x=28 dB. La Tabella 5.28 riassume i valori necessari per rappresentare i segnali nel diagramma di Bode.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]	$M(\omega)$ [dB]	$ g_u $ [dB]
(1)	0	-1,2	80	$0+80=80$
(2)	60	2,8	28	$60+28=88$
(3)	20	0,8	80	$20+80=100$

Tabella 5.28

Anche se non richiesto, è piuttosto immediato scrivere l'uscita $g_u(t)$ nel dominio del tempo a meno della fase. Essa risulta essere

$$g_u(t) = 10000\sin(0,063t + \varphi_1) + 100000\sin(6,283t + \varphi_2) + 25119\sin(628,3t + \varphi_3)$$

[e] L'ottimizzazione di un filtro è in generale un'operazione complessa. Dall'osservazione

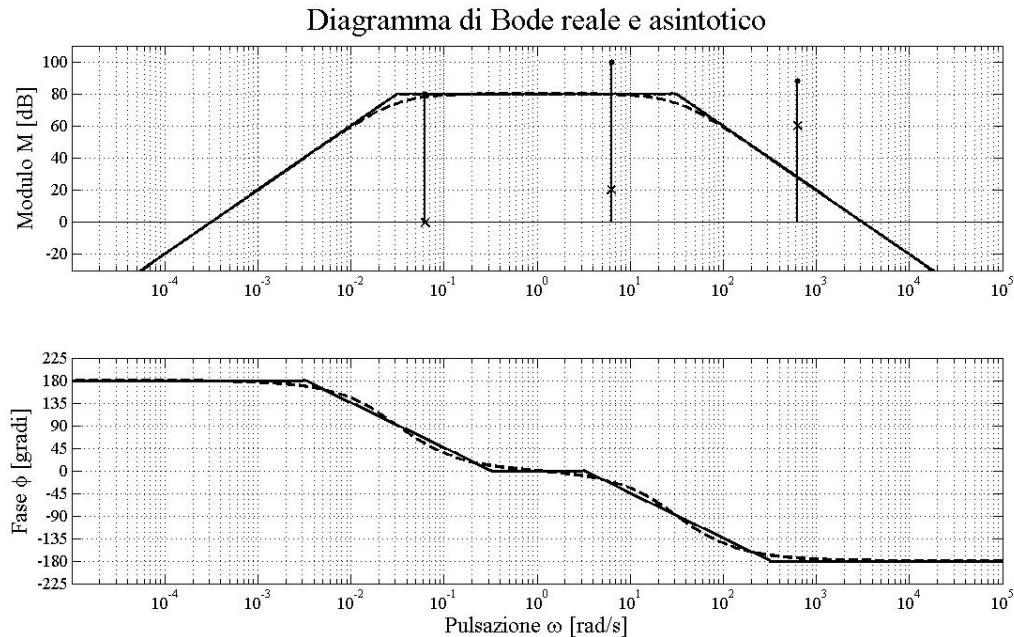


Figura 5.48

dei segnali nel diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento $T_2(i\omega)$ è evidente che, per attenuare il disturbo a 100 Hz, vada abbassata la frequenza di taglio del filtro passa-basso che compone il filtro passa-banda del IV ordine qui in esame. Ciò infatti migliora il rapporto segnale/rumore.

Analizzando il solo diagramma asintotico l'ottimo sarebbe portare la frequenza di taglio del filtro passa-basso in corrispondenza della frequenza del segnale di interesse, ossia a 0,01 Hz. Tuttavia nella realtà ciò comporterebbe una attenuazione di ben 12 dB anche del segnale principale, perdita che può essere invece contenuta scegliendo frequenze leggermente più alte. Chiaramente ciò comporta però una minore attenuazione dei due segnali di disturbo.

In base a queste semplici considerazioni (che non esauriscono affatto il problema di ottimizzazione di un filtro) si può scegliere, come ottimizzazione preliminare di primo tentativo, di abbassare la frequenza di taglio del filtro passa-basso a 0.05 Hz, ossia a una decade di distanza dall'altra frequenza di taglio.

Esercizio 49. Rappresentare in un diagramma di Bode in modulo:

- un filtro passa-basso del I ordine con amplificazione pari a 1 e frequenza di taglio di 500 Hz a -3 dB e scriverne la funzione di trasferimento;
- un filtro passa-alto del V ordine con amplificazione pari a 0,1 e frequenza di taglio di 1 Hz a -15 dB e scriverne la funzione di trasferimento;
- un ingresso:

- sinusoidale di ampiezza unitaria oscillante a 10 Hz;
 - un ingresso interferente con senoide di ampiezza 1000 oscillante a 0,1 Hz;
 - un ingresso interferente con senoide di ampiezza 10 oscillante a 100 Hz;
- d) Rappresentare la catena di misura consistente nei tre segnali posti in ingresso ai due filtri a) e b) in cascata e riportarne l'uscita nel diagramma di Bode in modulo.
- e) Valutare il rapporto segnale / rumore in uscita della catena di misura e successivamente scegliere le frequenze di taglio dei filtri per rendere massimo tale rapporto nell'ipotesi di diagrammi asintotici.

Soluzione

a) Per la funzione di trasferimento di un filtro passa-basso del I ordine e i dettagli per eseguirne il diagramma di Bode si veda l'esercizio 35 a pagina 61. Qui si ottiene per il punto di rottura $\log \omega = 3,5$ rad/s e per la costante di tempo $\tau = 3,2 \cdot 10^{-4}$ s. La funzione di trasferimento del filtro passa-basso del I ordine risulta essere

$$T_{PB}(i\omega) = \frac{1}{1 + 3,2 \cdot 10^{-4} i\omega}$$

il cui diagramma di Bode è in Figura 5.49.

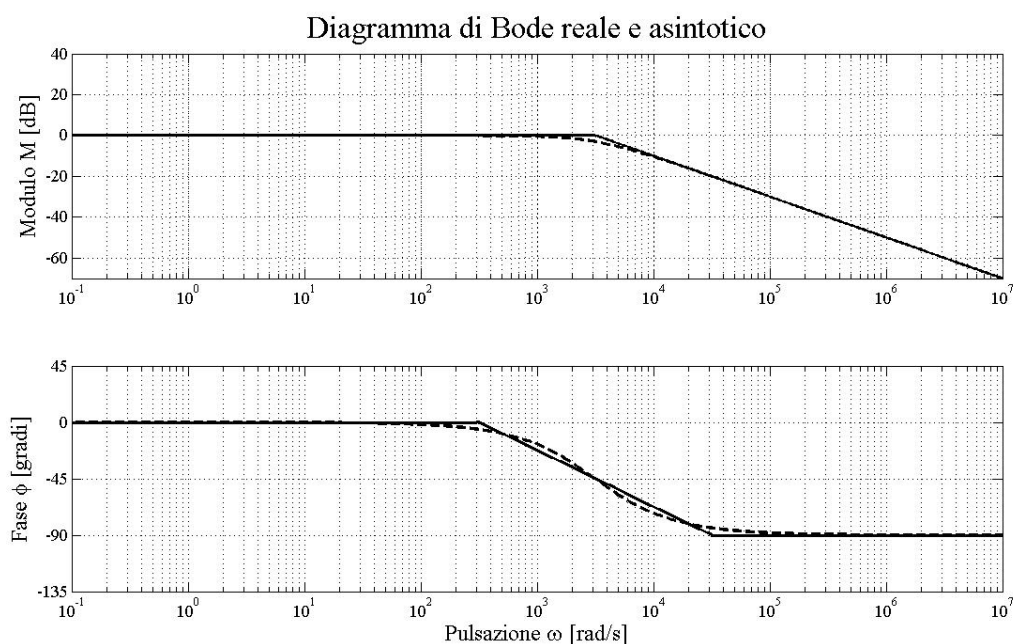


Figura 5.49

b) Per quanto riguarda il filtro passa-alto del V ordine, esso si ottiene mettendo in cascata 5 filtri passa-alto del I ordine con identica costante di tempo. Per i dettagli si rimanda all'esercizio 37 a pagina 65 rispetto al quale l'unica differenza è qui la presenza

del fattore di amplificazione pari a 0,1. Considerando allora che la frequenza di taglio dichiarata è a -15 dB, si hanno facilmente i parametri d'interesse. Essi sono punto di rottura per $\log\omega=0,8$ rad/s e costante di tempo $\tau=0,16$ s. Di conseguenza la funzione di trasferimento del filtro passa-alto del V ordine qui in esame risulta essere

$$T_{PA5}(i\omega) = 0.1 \left(\frac{0.16i\omega}{1 + 0.16i\omega} \right)^5 = \frac{1.02 \cdot 10^{-5} (i\omega)^5}{(1 + 0.16i\omega)^5}$$

il cui diagramma di Bode è in Figura 5.50. La “quota” del tratto orizzontale è a -20 dB, valore che si trova sommando a $K = 20\log(1.02 \cdot 10^{-5}) \cong -100$ dB il valore che assume la funzione elementare $(i\omega)^5$ per $\log\omega=0,8$ rad/s (il punto di rottura). Si ha $1 \text{ rad/s} : 100 \text{ dB} = 0,8 : x \Rightarrow x=80 \text{ dB}$ e quindi $-100+80=-20 \text{ dB}$.

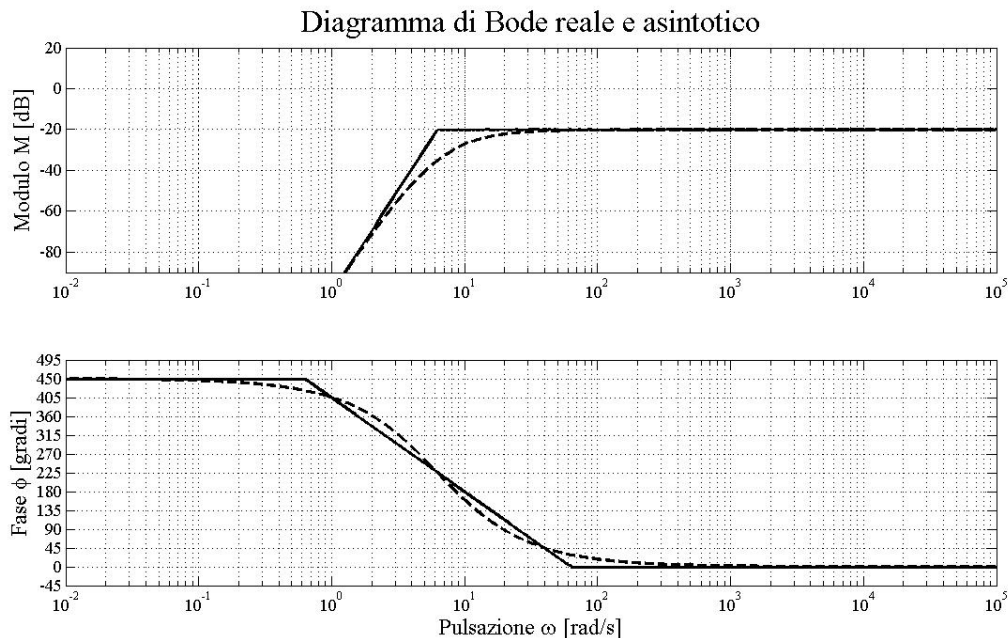


Figura 5.50

c Nel dominio del tempo i tre segnali in ingresso sono rappresentati dalle seguenti sinusoidi:

- (1) $g_s = 1\sin(2\pi 10t)$
- (2) $g_{d1} = 1000\sin(2\pi 0,1t)$
- (3) $g_{d2} = 10\sin(2\pi 100t)$

I valori caratteristici dei 3 segnali, trasformati per poterli rappresentare in un diagramma di Bode, sono richiamati in Tabella 5.29, mentre il risultato grafico è in Figura 5.51.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]
(1)	$20\log(1) = 0$	$\log(2\pi 0.01) = -1,2$
(2)	$20\log(1000) = 60$	$\log(2\pi 100) = 2,8$
(3)	$20\log(10) = 20$	$\log(2\pi 1) = 0,8$

Tabella 5.29

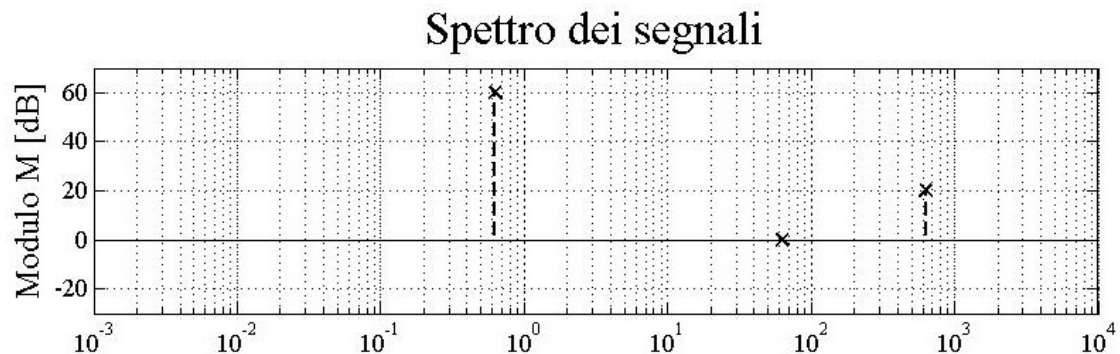


Figura 5.51

d Poiché il segnale sinusoidale principale è accompagnato da due disturbi sinusoidali interferenti, ne segue che il segnale d'ingresso è

$$g_i(t) = 1\sin(2\pi 10t) + 1000\sin(2\pi 0,1t) + 10\sin(2\pi 100t)$$

e la catena di misura così schematizzabile

$$g_i(t) \longrightarrow \boxed{T_{PB}} \longrightarrow \boxed{T_{PA}} \longrightarrow g_u(t)$$

Chiaramente la funzione di trasferimento globale è il prodotto delle funzioni di trasferimento dei filtri analizzati in precedenza e risulta

$$T(i\omega) = \frac{1.02 \cdot 10^{-5} (i\omega)^5}{(1 + 3.2 \cdot 10^{-4} i\omega)(1 + 0.16 i\omega)^5}$$

La funzione di trasferimento è caratterizzata dalle funzioni elementari riportate in Tabella 5.30.

1) $K=1.02 \cdot 10^{-5}$	2) $i\omega^5$	3) $(1 + 0.00032 i\omega)^{-1}$	4) $(1 + 0.16 i\omega)^{-5}$
p.r.	[rad/s]	$-\log(0.00032)=3,5$	$-\log(0,16)=0,8$

Tabella 5.30

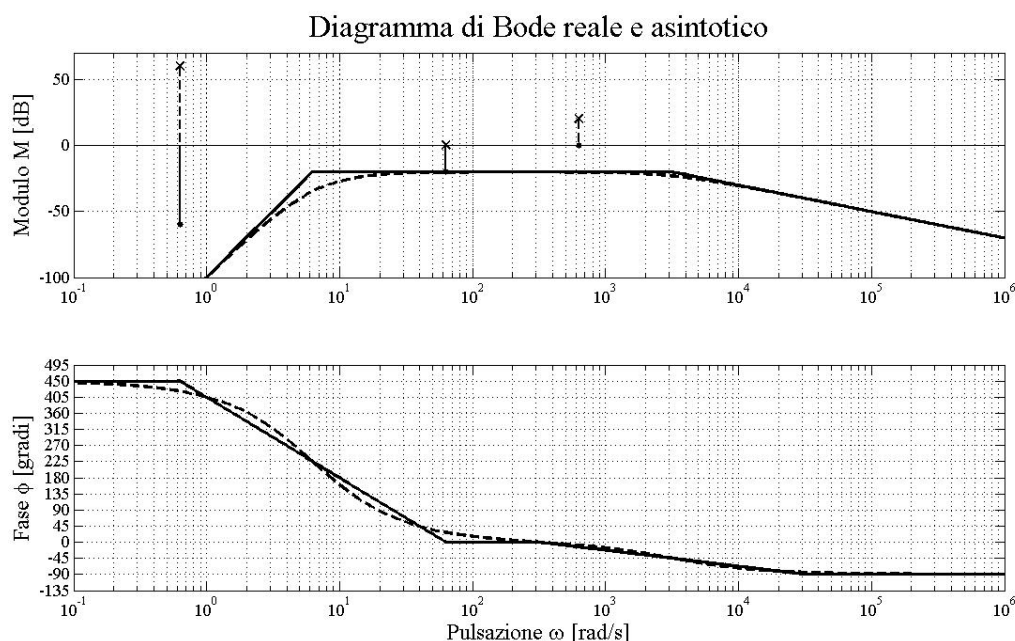


Figura 5.52

Il diagramma asintotico di Bode della funzione di trasferimento globale è in Figura 5.52. In questo stesso diagramma sono stati riportati il segnale d'ingresso (nulla è cambiato rispetto a quanto visto in precedenza) e quello d'uscita.

Per quanto riguarda la rappresentazione di quest'ultimo è necessario conoscere il valore del modulo della funzione di trasferimento per $\log \omega = -0,2$ rad/s. Tale valore si ricava facilmente impostando la proporzione $1 \text{ rad/s} : 100 \text{ dB} = 0,2 \text{ rad/s} : x \Rightarrow x = 20 \text{ dB}$ e sottraendo tale valore a -100 dB , ottenendo -120 dB . La Tabella 5.31 riassume i valori necessari per rappresentare i segnali in uscita nel diagramma di Bode.

Segnale	Ampiezza [dB]	Ascissa [rad/s]	$M(\omega)$ [dB]	$ g_u $ [dB]
(1)	0	1,8	-20	$0-20=-20$
(2)	60	-0,2	-120	$60-120=-60$
(3)	20	2,8	-20	$20-20=0$

Tabella 5.31

Anche se non richiesto, è piuttosto immediato scrivere l'uscita $g_u(t)$ nel dominio del tempo a meno della fase. Essa risulta essere

$$g_u(t) = 0,1 \sin(62,83t + \varphi_1) + 0,001 \sin(0,6283t + \varphi_2) + 1 \sin(628,3t + \varphi_3)$$

e Il rapporto segnale-rumore in uscita (si tratta chiaramente di un numero puro) viene valutato sulle ampiezze dei segnali ma, attenzione, non in scala di dB. In base ai calcoli

svolti si ottiene

$$R = \frac{0.1}{0.001 + 1} = 0.01$$

L'ipotesi di diagrammi asintotici significa non considerare il comportamento reale di un filtro, ossia le correzioni da apportare sia al diagramma del modulo che a quello della fase. In questo caso chiaramente teorico il massimo rapporto R si ottiene portando i punti di rottura in corrispondenza del valore comune di $\log \omega = 1,8$, che è la pulsazione del segnale d'interesse in ingresso (cui corrisponde la frequenza di 10 Hz). Tale segnale non subisce attenuazione sotto l'ipotesi indicata, mentre i due disturbi subiscono la massima attenuazione possibile.

Tenendo conto che a sinistra la pendenza è di 100 dB/decade, mentre a destra è di -20 dB/decade, è piuttosto semplice calcolare i valori delle ampiezze dei segnali di disturbo in questa particolare situazione. E' infatti sufficiente impostare le seguenti proporzioni

1 : 100 dB = 1,8 - (-0,2) : $x \Rightarrow x = 200$ dB (da prendere in valore negativo)

1 : -20 dB = 2,8 - 1,8 : $x \Rightarrow x = -20$ dB

grazie alle quali si ha per il disturbo a minore frequenza un'ampiezza di 60-20-200=-160 dB e per il disturbo a frequenza maggiore un'ampiezza di 20-20-20=-20 dB. Poiché il segnale d'ingresso principale per ipotesi non subisce alcuna modifica, ne segue il seguente rapporto in uscita

$$R = \frac{0.1}{10^{-8} + 0.1} = 1$$

Si tenga conto però che nella realtà l'ottimizzazione di un filtro è un'operazione piuttosto complessa, per prima cosa per il semplice fatto che si deve lavorare sul diagramma di Bode reale e non su quello asintotico.

Esercizio 50. *Mediante un trasduttore con opportuno amplificatore elettrico con costante $K=100$ si acquisisce la vibrazione sinusoidale di un sistema meccanico che oscilla con ampiezza unitaria e 300 ± 100 Hz. All'ingresso è sovrapposto un disturbo interferente dovuto alla rete con frequenza 50 ± 5 Hz e ampiezza pari a 20. E' a disposizione un set di resistenze e di condensatori che possono essere utilizzati per costruire un filtro elettrico tipo RC.*

- a) *Rappresentare la catena di misura con le relative funzioni di trasferimento.*
- b) *Determinare la caratteristica del filtro utilizzato.*
- c) *Rappresentare in un diagramma di Bode in modulo l'ingresso e l'uscita.*

Soluzione

Un problema che prevede di trovare il miglior filtro capace di attenuare i disturbi individuati, preservando al meglio il segnale d'interesse, coinvolge l'ottimizzazione dei filtri. Si tratta in generale di una questione tutt'altro che semplice.

Sulla base delle caratteristiche dei filtri passa-basso e passa-alto (vedi esercizi da 35 a 37 nelle pagine 61–65)⁷ in questo tipo di esercizi ci si limita alla scelta di primo tentativo del filtro, che chiaramente non sarà quello ottimo, tenendo conto delle correzioni legate ai termini di primo grado che possono presentarsi eventualmente elevati a una certa potenza.

[a] Poiché il disturbo è di tipo interferente, il segnale d'ingresso g_i è di fatto somma di due sinusoidi, quella del segnale d'interesse e quella del segnale di disturbo dovuto alla rete. In tabella Tabella 5.32 sono state riassunte le caratteristiche delle due sinusoidi.

	Segnale	Disturbo
$f(t)$	$1\sin[2(300\pm 100)\pi t]$	$20\sin[2(50\pm 5)\pi t]$
Ampiezza [dB]	$20\log(1)=0$	$20\log(20)=26$
Intervallo [rad/s]	$3, 1 \leq \log\omega \leq 3, 4$	$2.45 \leq \log\omega \leq 2.54$
Val. centrale [rad/s]	$\log\omega=3.3$	$\log\omega=2.5$

Tabella 5.32

Si noti che la frequenza del segnale di disturbo è inferiore a quella del segnale da acquisire. Dato che lo scopo è quello di attenuare il segnale di disturbo penalizzando il meno possibile il segnale principale, è evidente che il filtro da impiegare sia un filtro passa-alto di ordine opportuno. Ne segue che la catena di misura è

$$g_i(t) \longrightarrow [K = 100] \longrightarrow [FILTROPA] \longrightarrow g_u(t)$$

Mentre il segnale da acquisire ha ampiezza pari a 0 dB, il segnale interferente ha ampiezza di 26 dB. Inoltre i due segnali sono piuttosto vicini tra di loro, infatti distano meno di una decade (la rappresentazione dello spettro dei 2 segnali è piuttosto semplice e viene omessa per brevità). Ciò porta immediatamente a concludere che un filtro passa-alto del primo ordine, con pendenza di soli 20 dB/decade, sia ovviamente insufficiente e che ci si debba orientare verso un filtro di ordine superiore che, com'è noto, può essere facilmente realizzato mettendo in cascata vari filtri passa-alto con la stessa costante di tempo τ ossia con identico valore del prodotto RC, dove R e C sono la coppia resistenza e condensatore adottati per costruire ogni singolo modulo elettrico.

Data la posizione dei due segnali nel diagramma di spettro, sembra logico assumere pari a $\log\omega=3$ rad/s il valore del punto di rottura, cui corrisponde una costante di tempo $\tau=0.001$ s e una frequenza di taglio di 159 Hz. Dopodiché va scelto l'ordine del filtro. Qui bisognerebbe far entrare in gioco anche considerazioni di tipo economico (è evidente che ogni modulo elettrico abbia un suo costo), che qui vengono del tutto trascurate.

La presenza del fattore di amplificazione $K=100$ comporta la traslazione in alto di 40 dB di tutti i punti della funzione di trasferimento del filtro elementare (quello per $K=1$), il che significa che la porzione orizzontale del diagramma del modulo del filtro

⁷Per quanto riguarda i filtri passa-banda di tipo RC si ricorda che essi vengono realizzati mettendo in cascata un filtro passa-basso di un certo ordine con uno passa-alto di ordine opportuno, cosicché è sufficiente conoscere le caratteristiche generali dei filtri che lo compongono

è, indipendentemente dal suo ordine che influenza la pendenza del tratto obliquo, a una “quota” di appunto 40 dB. Di ciò si deve tener conto al fine di scegliere l’ordine del filtro passa-alto. Infatti si ricorda che lo scopo è possibilmente in uscita l’attenuazione del disturbo o quantomeno il suo contenuto incremento dovuto alla funzione di trasferimento del filtro stesso.

Se N è l’ordine del filtro, la pendenza del tratto obliquo è pari a $20N$ dB/decade. Essendo la pulsazione del segnale interferente a una distanza di mezza decade dalla pulsazione del punto di rottura e dovendo il tratto obliquo raggiungere i 40 dB per $\log\omega=3$, emerge che la funzione di trasferimento per filtri di ordine minore al IV ha modulo positivo in corrispondenza di $\log\omega=2,5$ il che comporta un segnale in uscita del disturbo con ampiezza maggiore di quella di 26 dB in ingresso. Con un filtro del IV ordine la pendenza del tratto obliquo è di 80 dB/decade, ossia presenta un calo di 40 dB passando da $\log\omega=3$ a $\log\omega=2,5$. Ne segue che per $\log\omega=2,5$ il modulo della funzione di trasferimento ha valore 0 dB e il segnale di disturbo viene lasciato immutato in uscita. Infine solo filtri superiori al IV ordine sono in grado di attenuare il disturbo interferente.

In base a tali considerazioni può essere conveniente quale compromesso tra effetto sul segnale interferente e complessità costruttiva scegliere di adottare un filtro passa-alto del IV ordine, cui è associata la seguente rappresentazione della catena di misura

$$g_i(t) \longrightarrow \boxed{K = 100} \longrightarrow \boxed{PA = \frac{0.001i\omega}{1 + 0.001i\omega}} \longrightarrow \boxed{PA} \longrightarrow \boxed{PA} \longrightarrow \boxed{PA} \longrightarrow g_u(t)$$

e la funzione di trasferimento globale

$$T(i\omega) = 100 \left(\frac{0.001i\omega}{1 + 0.001i\omega} \right)^4$$

Analisi dei segnali tempovarianti

L'analisi delle caratteristiche dinamiche degli strumenti con una sola variabile di ingresso $g_i(t)$ e una sola variabile di uscita $g_u(t)$ sotto l'ipotesi semplificativa di linearità e stazionarietà fa capo a un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti (reali) costanti che in generale può essere così rappresentata:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k g_u}{dt^k}}_{USCITA} = \underbrace{\sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j g_i}{dt^j}}_{INGRESSO} \quad (6.1)$$

Un qualsiasi strumento o sistema di misura a modello lineare ha le basi matematiche nella (6.1); da essa discendono, per esempio, la trattazione della funzione di trasferimento sinusoidale e la sua rappresentazione attraverso i diagrammi di Bode (Capitolo 5).

In via del tutto generale emerge che uno strumento “insegue” le variazioni del misurando (ingresso) riproducendole (uscita) con un certo “grado di approssimazione” che dipende dalle caratteristiche dinamiche dello strumento stesso, le quali vanno chiaramente teoricamente conosciute facendo riferimento a un modello e opportunamente indagate in fase di taratura, al fine d'interpretare correttamente i dati ottenuti.

Giova sottolineare che molti strumenti e componenti di sistemi di misura hanno una risposta dinamica dal modello particolarmente semplice, ossia per essi la (6.1) è decisamente meno complessa. In particolare si hanno:

- *Strumenti di ordine zero*: per essi tutti i coefficienti della (6.1) sono trascurabili rispetto ai coefficienti a_0 e b_0 . In altre parole nell'equazione non si ha alcuna derivata e di conseguenza l'equazione si riduce alla semplice equazione algebrica $a_0 g_u = b_0 g_i$. L'uscita riproduce fedelmente l'ingresso senza distorsioni di forma, né sfasamenti o ritardi, ma solo con valore modificato rispetto a $g_i(t)$ secondo il fattore costante $K = \frac{b_0}{a_0}$. Classico strumento di ordine zero è il potenziometro usato come trasduttore

di spostamento in presenza di attrito trascurabile rispetto alla forza che ne sollecita l'alberino d'ingresso¹.

- *Strumenti del primo ordine*: fanno capo all'equazione differenziale generale che deriva dalla (6.1) quando sono trascurabili tutti i coefficienti a_k e b_j delle derivate di ordine superiore al primo. Si distinguono tre casi, a seconda che b_0 e/o b_1 siano nulli o diversi da zero. Per $b_0 \neq 0$ e $b_1 = 0$, si ha l'equazione differenziale

$$a_1 \frac{dg_u}{dt} + a_0 g_u = b_0 g_i \quad (6.2)$$

la cui funzione di trasferimento risulta $T(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$ con $K = \frac{b_0}{a_0}$ (sensibilità statica) e $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ (costante di tempo). Di particolare interesse è l'analisi della risposta a una funzione di ingresso di tipo impulsivo, di tipo a gradino e di tipo sinusoidale, i cui andamenti (solitamente normalizzati in ordinata) si trovano con facilità in letteratura. Una termocoppia senza guaina è un esempio di sistema del primo ordine.

- *Strumenti del secondo ordine*: per essi l'equazione differenziale generale, derivante dalla (6.1), non presenta derivate di ordine superiore al secondo e ciò si ottiene quando sono trascurabili tutti i coefficienti a_k e b_j delle derivate dal terzo ordine in poi. Si distinguono sette casi, a seconda che b_0 e/o b_1 e/o b_2 siano nulli o diversi da zero. Per $b_0 \neq 0$ e $b_1 = b_2 = 0$, si ha l'equazione differenziale

$$a_2 \frac{dg_u^2}{dt^2} + a_1 \frac{dg_u}{dt} + a_0 g_u = b_0 g_i \quad (6.3)$$

Parametri di interesse sono $K = \frac{b_0}{a_0}$ (sensibilità statica), $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ (pulsazione naturale) e $\zeta = \frac{a_1}{\sqrt{4a_0a_2}}$ (rapporto di smorzamento). Gli andamenti parametrici in ζ (e solitamente adimensionalizzati) della risposta si trovano con facilità in letteratura. Una termocoppia con guaina è un esempio di sistema del secondo ordine.

Dunque l'analisi teorica del comportamento dinamico di un sistema porta in generale a ottenere certi diagrammi caratteristici dell'uscita $g_u(t)$ per determinati ingressi. Nel momento in cui le caratteristiche di uno strumento sono motivo di studio, è chiaro che le precedenti considerazioni teoriche indicano la via da seguire per effettuarne l'indagine sperimentale, che consiste nel sottoporre il dispositivo a un certo ingresso "canonico" e di registrare nel tempo l'uscita che si produce. Ma è bene sottolineare che, quando il modello di riferimento non è noto, ma solo supposto, "*ciò che assomiglia, non necessariamente è*". Si tratta di un punto cruciale.

In altre parole, un'uscita che assomiglia alla risposta di un sistema del primo ordine a un ingresso a gradino, necessita di una conferma sperimentale che effettivamente il sistema

¹Si ricordano tra gli strumenti dal modello particolarmente semplice anche quello detti "a tempo morto". Per essi l'uscita riproduce fedelmente l'ingresso ma con un ritardo temporale. Se l'ingresso è di tipo sinusoidale si dimostra che lo sfasamento di $g_u(t)$ rispetto $g_i(t)$ dipende linearmente dalla pulsazione ω .

sia del primo ordine ad esempio o con il metodo della pendenza oppure con quello del diagramma di Bode. Solo così la costante di tempo τ ricavata dai dati è, assieme a K (ottenuta in sede di taratura statica), il secondo parametro significativo sufficiente per la descrizione esaustiva del comportamento dinamico del dispositivo sotto esame.

Analogamente un'uscita che, per esempio, a occhio sembra essere quella di uno strumento sottosmorzato ($\zeta < 1$) del secondo ordine a un ingresso a gradino deve trovare opportuna conferma sperimentale (costanza del rapporto di smorzamento nel tempo) per potersi concludere che il dispositivo analizzato è effettivamente del II ordine e dal comportamento dinamico descrivibile attraverso i parametri caratteristici determinati sperimentalmente.

===== O ===== O ===== O =====

L'analisi armonica dei segnali tempovarianti rappresenta un potente strumento per lo studio di fenomeni dinamici di qualunque natura. Essa trova applicazione in vari campi di interesse industriale² e opera su segnali tempovarianti, intendendo con tale dizione una grandezza fisica (spesso elettrica) associata alla misurazione di un fenomeno di interesse la cui variazione, nella durata dell'osservazione, è superiore alla soglia di sensibilità dello strumento con cui essa è misurata.

Nel dominio del tempo un qualsiasi segnale si presenta sotto forma di un grafico con il tempo t in ascissa e l'ampiezza A in ordinata. Per i segnali elettrici un oscilloscopio consente di ottenere con facilità sul suo display il diagramma temporale. E' possibile classificare dal punto di vista fenomenologico un segnale, ossia cercare di individuare se esso ha caratteristiche aleatorie o deterministiche (cioè con caratteristiche di ripetitività) con eventuali sottoclassi (segnali periodici, aperiodici, quasi-periodici, pseudo-periodici, transitori, ecc.). Tuttavia i segnali acquisiti e visualizzati nel dominio del tempo, tranne poche situazioni particolari, sono difficilmente interpretabili quando addirittura la cosa non risulta essere perfino impossibile.

Un segnale tempovariante può essere meglio studiato nel dominio della frequenza, ottenendo così diagrammi, detti spettri, con in ascissa la frequenza f e in ordinata l'ampiezza (modulo) A e/o la fase. L'analisi armonica consiste proprio nella descrizione dei segnali tempovarianti nel dominio della frequenza e tipici strumenti che consentono tale analisi sono gli analizzatori di spettro, di fatto dei computer. Se infatti il cambiamento di dominio dal tempo a quelli in frequenza avviene con "strumenti" matematici introdotti nel XIX secolo dal matematico e fisico francese Jean Baptiste Fourier (1768 – 1830), la loro effettuazione con carta e penna è pressoché improponibile. La diffusione di tali tecniche di analisi ha trovato nel computer l'unico concreto esecutore dei complessi e lunghissimi calcoli necessari e nei processori sempre più veloci e potenti il contenimento dei tempi di esecuzione.

La Figura 6.1 mostra per un caso molto semplice le corrispondenze tra il diagramma temporale di un segnale periodico costituito da quattro sinusoidi e il relativo spettro del modulo (ampiezza). Nel diagramma ampiezze-tempi a ogni t l'ampiezza A del segnale deriva dalla somma delle ampiezze che presentano in quell'istante le quattro sinusoidi

²Per esempio l'analisi delle vibrazioni e del rumore, lo studio del bilanciamento di rotori e meccanismi, la diagnostica di impianti e il collaudo funzionale.

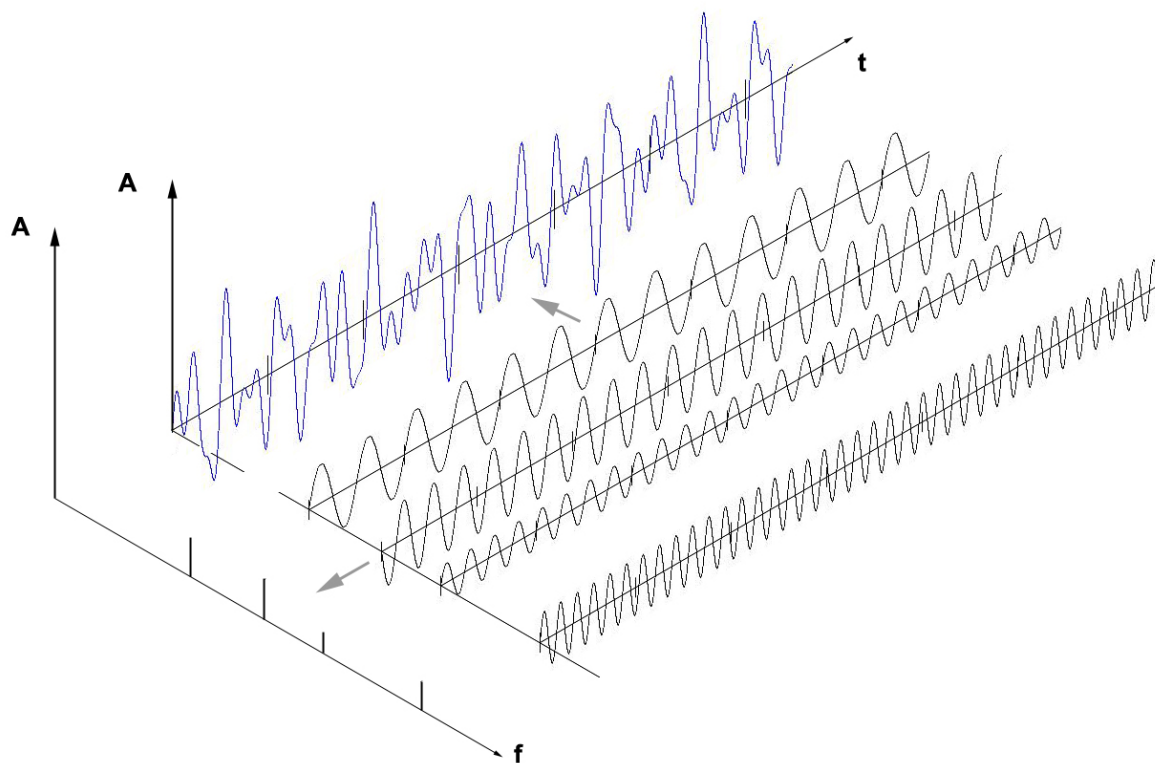


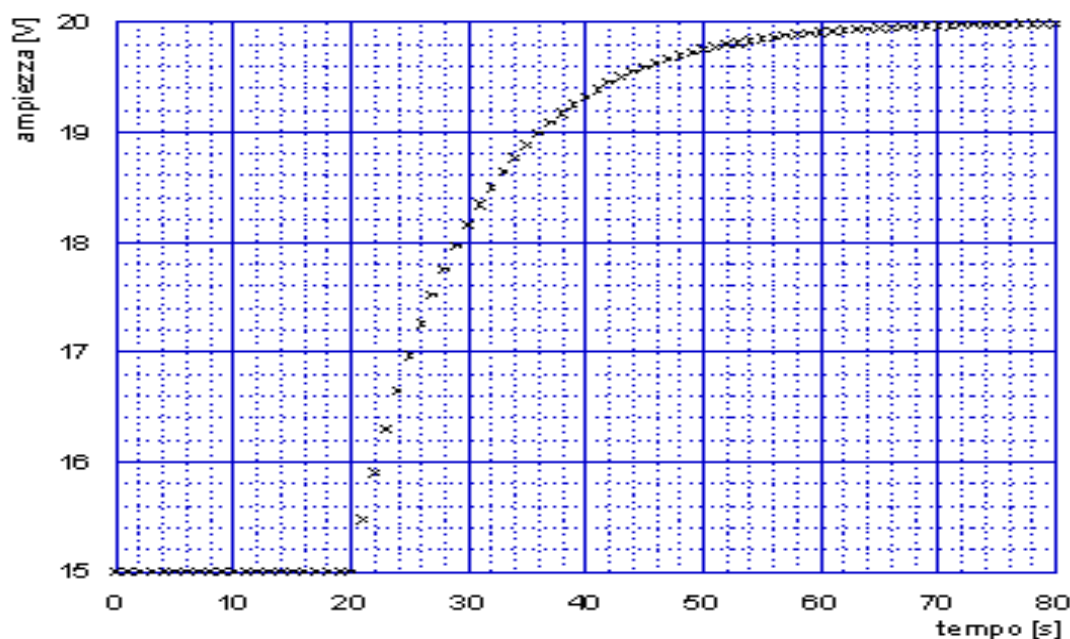
Figura 6.1

(interferenza). Lo spettro, ossia il diagramma ampiezze-frequenze, evidenzia il “contenuto armonico” o “contenuto in frequenza” del segnale analizzato.

Per la verità si dovrebbe considerare a rigore un diagramma doppio (modulo e fase in funzione della frequenza). Infatti le informazioni necessarie a identificare completamente le componenti armoniche del segnale analizzato (nel caso in esame somma di quattro sinusoidi), per poter effettuare dal dominio della frequenza la completa ricostruzione del segnale d'origine nel dominio del tempo, sono pulsazione (frequenza), modulo e fase e quindi il solo diagramma del modulo non è sufficiente. Con l'analisi di Fourier il contenuto di informazioni deve passare inalterato sia in un verso che nell'altro ossia dev'essere perfettamente reversibile. Tuttavia sperimentalmente a interessare sono più le frequenze, che le ampiezze.

Esercizio 51. Si consideri il diagramma temporale in Figura.

- a) Cosa si può dire sul comportamento dello strumento la cui uscita ha tale andamento?
- b) In base alle ipotesi fatte, determinare i parametri caratteristici dello strumento nel modo più accurato possibile con la relativa incertezza.



Soluzione

Ci si limita a dare la traccia della soluzione per non essere vincolati a un diagramma in particolare.

[a] Per rispondere al quesito è prima di tutto importante procedere all'osservazione del grafico. Ciò non solo, com'è ovvio, per individuare una qualche somiglianza con qualcuno dei classici grafici delle uscite di sistemi di un certo ordine per determinati ingressi canonici, ma anche per individuare delle anomalie rispetto al comportamento previsto dal modello che si ipotizza essere valido per il caso in esame.

Da questa osservazione la risposta nel grafico, di tipo discreto, sembra essere a tutti gli effetti quella a un ingresso a gradino unitario di uno strumento del primo ordine. Il sistema cioè sembra risponde all'equazione differenziale (6.2) a pagina 110, la cui funzione di trasferimento sinusoidale è

$$T(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

in cui K è la sensibilità statica e τ la cosiddetta costante di tempo.

[b] Supponendo allora che il sistema sia del primo ordine e che il segnale d'ingresso sia un gradino unitario, i parametri caratteristici da determinare sono K e τ .

Al fine di migliorare l'accuratezza con cui viene eseguita la lettura dei valori nel grafico, si utilizza un doppio decimetro, la cui scala è graduata a millimetri (incertezza sulle letture in mm, 0.5 mm).

L'incertezza di 0.5 mm dev'essere convertita in un'incertezza in unità di misura della scala delle ordinate del grafico attraverso un opportuno fattore di scala e che si trova andando a trovare, in questo caso, a quanti V corrisponde l'intervallo di 1 mm del righello. Ciò consente di esprimere il valore dell'incertezza i_V . In modo del tutto analogo viene determinato il valore in s della lunghezza di 1 mm e calcolata i_t .

Si decide di utilizzare il metodo dell'ordinata, data la difficoltà, a seguito dell'ispezione preliminare del diagramma, di poter determinare il punto di partenza della curva esponenziale sull'asse delle ascisse.

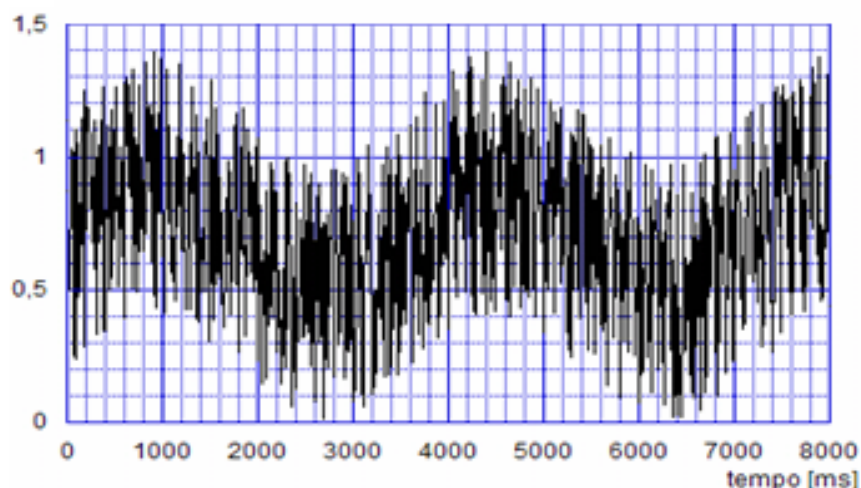
Per usare questo metodo per prima cosa si deve effettuare una traslazione del sistema di riferimento. L'asse delle x (ossia l'asse dei tempi) deve avere ordinata zero, il che evidentemente non è. Ciò si concretizza in pratica sottraendo 15 ai valori letti in ordinata. Il primo valore di interesse per la determinazione di τ è V_∞ , cioè quello dell'asintoto per $t \rightarrow +\infty$.

Il prodotto $V_\infty \cdot 0.632$ dà il valore sul diagramma reale $V^* = 15 + V_\infty \cdot 0.632$ di un punto speciale: quello la cui ascissa corrisponde è numericamente uguale alla costante di tempo τ .

E' evidente che $K = V_\infty$.

Esercizio 52. *Se si deve analizzare un segnale come quello riportato in Figura, che apparentemente non manifesta apprezzabili variazioni temporali:*

- che tipo di elaborazione si propone di eseguire per evidenziarne le sue caratteristiche?*
- che risultati si prevede di ottenere?*



Soluzione (Traccia)

[a] L'analisi dei segnali nel dominio del tempo è a volte di difficile interpretazione. In questo caso è utile eseguire il passaggio nel dominio delle frequenze attraverso la trasformata di Fourier discreta. L'operazione è eseguita da un calcolatore munito di opportuno software, il che significa però che prima il segnale va eventualmente filtrato e poi campionato per portarlo dalla forma analogica e quella digitale.

Poiché la frequenza di campionamento non può essere scelta a caso (teorema di Shannon), a grandi linee se ne può stimare l'ordine di grandezza dal grafico. La scala secondaria ha intervallo di 200 ms (0.2 s). All'interno di questo intervallo temporale la "densità" di oscillazioni non piuttosto rada, il che porta a stimare come ragionevole una frequenza di campionamento di 1000 Hz (cioè dal periodo di 1 ms).

[b] L'analisi visiva del segnale nel dominio del tempo porta a sospettare che esso sia costituito dalla somma di un'onda portante (a bassa frequenza) e almeno 2 onde a frequenza decisamente più elevata.

Con l'aiuto di un righello, per migliorare l'accuratezza con cui si possono determinare i valori delle ascisse, si può stimare la frequenza dell'oscillazione a periodo più alto, ossia a bassa frequenza. Ciò si ottiene misurando l'intervallo temporale che separa due picchi consecutivi caratterizzati dal fatto di avere il massimo valore di ampiezza. Il reciproco della differenza tra le loro ascisse dà una stima della frequenza della portante.

Dalle considerazioni svolte per la stima della frequenza di campionamento, è ragionevole aspettarsi frequenze dei segnali a minor periodo che circa 100 volte superiori a quella della portante.

Chiaramente solo l'effettuazione delle elaborazioni numeriche potrà dare indicazioni più precise sui segnali a maggior frequenza.

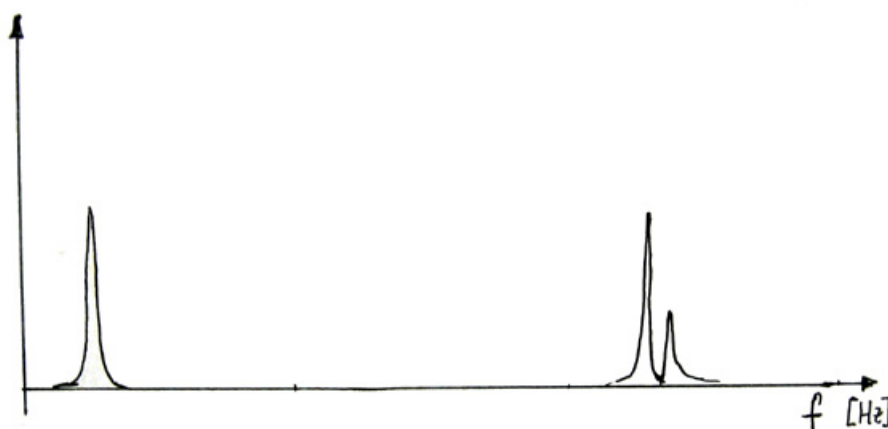


Figura 6.2

Lo spettro di ampiezza (qui solo qualitativo!) che si prevede di ottenere è rappresentato in Figura 6.2.

Elaborazione delle immagini

A un'immagine B/N digitalizzata con N x M pixel a 8 bit=1 byte (ma solitamente per le schede digitalizzatrici è M = N) può essere associata una matrice A di dimensioni N x M i cui valori vanno da 0 (nero) a 255 (bianco) per un totale di 256 livelli di grigio (l.g.).

$$A = \begin{bmatrix} 206 & 205 & 205 & 205 & 205 & 205 & \dots \\ 205 & 200 & 198 & 199 & 180 & 177 & \dots \\ 205 & 207 & 0 & 6 & 5 & 5 & \dots \\ 205 & 200 & 0 & 9 & 2 & 5 & \dots \\ 205 & 199 & 6 & 6 & 64 & 62 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Tra le varie tecniche di miglioramento della qualità dell'immagine vi sono le finestre di convoluzione di dimensioni kxk (generalmente k=3). L'operazione di convoluzione tra l'immagine A e la finestra B trasforma i l.g. di A e riduce le dimensioni di A. Indicando con il simbolo * l'operazione di convoluzione, ciò che si ottiene è una nuova matrice C = A*B.

La convoluzione si traduce operativamente nel sovrapporre la finestra B ad A, moltiplicando i valori dei pixel corrispondenti e assegnando la somma dei kxk risultati al pixel corrispondente al centro della finestra di convoluzione e ripetendo questi stessi conti traslando B pixel per pixel di ogni riga e colonna di A.

Si osservi che, mentre i valori di A sono chiaramente dei l.g., non è detto che lo siano i valori dei vari c_{ij} calcolati della matrice C. In generale può essere necessario eseguire delle trasformazioni per riportare i valori ottenuti all'interno dell'intervallo di variazione dei l.g. a 8 bit. La scelta dipende da come si presenta l'immagine A. A solo scopo didattico, per presentare C con valori numerici corrispondenti a l.g., può applicarsi la trasformazione

$$(l.g.)_{ij} = \frac{255}{MAX(|c_{ij}|)} |c_{ij}| \quad (7.1)$$

in cui si è indicato con $MAX(|c_{ij}|)$ il valore massimo presente nei termini c_{ij} . Tale operazione puntuale non fa altro che assegnare a $MAX(|c_{ij}|)$ il l.g. 255, a 0 il l.g. nullo e a trasformare in proporzione tutti gli altri $|c_{ij}|$ in l.g.

Nella determinazione manuale dei valori c_{ij} dell'immagine risultante applicando una finestra di convoluzione è utile tenere a mente alcune proprietà delle più comuni finestre di convoluzione.

1. SOBEL

- Proprietà SH - Essendo il filtro Sobel orizzontale S_h un operatore basato sul gradiente in direzione verticale, esso è insensibile ai gradienti puramente orizzontali della luminanza. Di conseguenza, se tutti gli a_{ij} corrispondenti alla prima colonna di S_h hanno stesso valore di l.g. e pure gli a_{ij} corrispondenti alla seconda e alla terza colonna di S_h condividono rispettivamente lo stesso valore di l.g. (non necessariamente uguale per tutte le colonne), allora il pixel corrispondente al centro della finestra di convoluzione assume valore zero.
- Proprietà SV - Essendo il filtro Sobel verticale S_v un operatore basato sul gradiente in direzione orizzontale, esso è insensibile ai gradienti puramente verticali della luminanza. Di conseguenza, se tutti gli a_{ij} corrispondenti alla prima riga di S_v hanno stesso valore di l.g. e pure gli a_{ij} corrispondenti alla seconda e terza riga di S_h condividono rispettivamente lo stesso valore di l.g. (non necessariamente uguale per tutte le righe), allora il pixel corrispondente al centro della finestra di convoluzione assume valore zero.
- Proprietà SD - Se traslando una finestra Sobel diagonale i 3 elementi a_{ij} che cadono sopra la diagonale degli zeri restano invariati e se la stessa cosa accade per i 3 a_{ij} che cadono sotto la diagonale degli zeri, allora il valore del pixel corrispondente al centro della finestra di convoluzione resta immutato.
- Proprietà S - Quando una qualunque finestra tipo Sobel S è sovrapposta a zone di A di luminanza uniforme (ossia i 9 l.g. di A sono uguali), il pixel corrispondente al centro della finestra di convoluzione ha valore zero.

Queste proprietà sono molto utili per velocizzare i conti.

2. LAPLACIANO

- Proprietà L - Quando una finestra laplaciana L è sovrapposta a zone di A di luminanza uniforme (ossia i 9 l.g. di A sono uguali), il pixel corrispondente al centro della finestra di convoluzione ha valore zero¹.

¹Questa stessa proprietà vale anche per l'operatore Sharp enhancer.

Esercizio 53. Dopo elaborazione dell'immagine per evidenziare i contorni dell'oggetto, nella tabella che segue sono stati riportati i valori di intensità di l.g. e la posizione X del pixel dove una particolare linea orizzontale incontra il bordo verticale dell'oggetto. Determinare la distanza d con relativa incertezza che si ottiene senza adottare particolari accorgimenti di miglioramento della risoluzione e invece utilizzando tecniche di tipo sub-pixel. Si assuma in $0,175$ mm la dimensione media l_p del pixel.

Posizione X pixel	l.g.
147	40
148	160
149	250
150	185
151	42

Soluzione

Se non si adottano particolari tecniche volte a ridurre l'incertezza di misura, la distanza d cercata è

$$d = (q - 0.5)l_p \pm 0.5l_p$$

Essendo in questo caso $q = 149$, si ottiene $d = 25,988 \pm 0.088$ mm.

Adottando tecniche di tipo sub-pixel, per esempio quella basata sul calcolo del momento del primo ordine, si ha

$$S = 147 \times 40 + 148 \times 160 + 149 \times 250 + 150 \times 185 + 151 \times 42 = 100902$$

$$F = 40 + 160 + 250 + 185 + 42 = 677$$

$$q = 100902 / 677 = 149,043$$

$$d = 149,043 \times 0,175 \pm 0,1 \times 0,175 = 26,083 \pm 0,018 \text{ mm}$$

Il risultato è 5 volte migliore del precedente.

Esercizio 54. Determinare l'immagine risultante dalla convoluzione dell'immagine A con un filtro Sobel orizzontale.

$$A = \begin{bmatrix} 215 & 215 & 215 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 215 & 215 & 215 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 215 & 215 & 215 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 215 & 215 & 215 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 115 & 115 & 115 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 115 & 115 & 115 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 115 & 115 & 115 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione

La finestra associata a un filtro tipo Sobel orizzontale è

$$S_h = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si devono calcolare gli elementi c_{ij} della matrice 5x5 $C = A * S_h$. Per velocizzare i conti, oltre a tener conto delle proprietà del filtro Sobel (vedi pag. 118), si effettuano prima i seguenti conti ricorrenti: $215*2=430$, $115*2=230$, $5*2=10$. I risultati sono i seguenti:

Calcoli / Proprietà	c_{ij}
per SH	$c_{ij} = 0$ (i=1,2,5; j=1,4,5)
per S	$c_{ij} = 0$ (i=1,2,5; j=2,3)
per S	$c_{ij} = 0$ (i=3,4; j=4,5)
$c_{ij} = -215 - 430 - 215 + 0 + 0 + 0 + 115 + 230 + 115$	$c_{ij} = -400$ (i=3,4; j=1)
$c_{ij} = -215 - 430 - 5 + 0 + 0 + 0 + 115 + 230 + 5$	$c_{ij} = -300$ (i=3,4; j=2)
$c_{ij} = -215 - 10 - 5 + 0 + 0 + 0 + 115 + 10 + 5$	$c_{ij} = -100$ (i=3,4; j=3)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -400 & -300 & -100 & 0 & 0 \\ -400 & -300 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I valori ottenuti sono incompatibili con il campo di digitalizzazione di un'immagine B/N a 8 bit. Si deve allora applicare la trasformazione (7.1) con $MAX(|c_{ij}|) = 400$. Si ottiene

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255 & 191 & 64 & 0 & 0 \\ 255 & 191 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 55. *Determinare l'immagine risultante dalla convoluzione dell'immagine A con un filtro Sobel scelto in modo tale da evidenziare la discontinuità.*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 \\ 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 \\ 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 \\ 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 \\ 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 & 115 \end{bmatrix}$$

Soluzione

La variazione di l.g. in A indica chiaramente la presenza di una discontinuità (bordo) orizzontale. Per evidenziare una discontinuità orizzontale si deve scegliere il filtro Sobel basato su un gradiente in direzione verticale e questo è il filtro Sobel orizzontale, la cui finestra è

$$S_h = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si devono calcolare gli elementi c_{ij} della matrice 7×5 $C = A * S_h$. Per velocizzare i conti, oltre a tener conto delle proprietà del filtro Sobel (vedi pag. 118), si effettuano prima i seguenti conti ricorrenti: $8*2=16$, $115*2=230$. I risultati sono i seguenti:

Calcoli / Proprietà	c_{ij}
per S	$c_{ij} = 0$ (i=1,2,5,6,7; j=1,2,3,4,5)
$c_{ij} = -8-16-8+0+0+0+115+230+115$	$c_{ij} = 428$ (i=3,4; j=1,2,3,4,5)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 428 & 428 & 428 & 428 & 428 \\ 428 & 428 & 428 & 428 & 428 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I valori ottenuti sono incompatibili con il campo di digitalizzazione di un'immagine B/N a 8 bit. Si deve allora applicare la trasformazione (7.1) con $MAX(|c_{ij}|) = 428$.

Si ottiene

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 56. *Determinare l'immagine risultante dalla convoluzione dell'immagine A con un filtro Sobel scelto in modo tale da evidenziare la discontinuità verticale.*

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 210 & 210 & 210 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 210 & 210 & 210 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 210 & 210 & 210 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 210 & 210 & 210 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 110 & 110 & 110 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 110 & 110 & 110 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 110 & 110 & 110 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Per evidenziare una discontinuità orizzontale si deve scegliere il filtro Sobel basato su un gradiente in direzione orizzontale e questo è il filtro Sobel verticale, la cui finestra è

$$S_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si devono calcolare gli elementi c_{ij} della matrice 5x5 $C = A * S_h$. Per velocizzare i conti, oltre a tener conto delle proprietà del filtro Sobel (vedi pag. 118), si effettuano prima i seguenti conti ricorrenti: $15*2=30$, $110*2=220$, $210*2=420$. I risultati sono i seguenti:

Calcoli / Proprietà	c_{ij}
per S	$c_{ij} = 0$ (i=1,2,3,4,5; j=1,2)
per S	$c_{ij} = 0$ (i=1,2; j=5)
per S	$c_{55} = 0$
per SV	$c_{ij} = 0$ (i=3,4; j=5)
$c_{ij} = -15-30-15+0+0+0+210+420+210$	$c_{ij} = 780$ (i=1,2; j=3,4)
$c_{ij} = -15-30-15+0+0+0+210+420+110$	$c_{ij} = 680$ (i=3; j=3,4)
$c_{ij} = -15-30-15+0+0+0+210+220+110$	$c_{ij} = 480$ (i=4; j=3,4)
$c_{ij} = -15-30-15+0+0+0+110+220+110$	$c_{ij} = 380$ (i=5; j=3,4)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 780 & 780 & 0 \\ 0 & 0 & 780 & 780 & 0 \\ 0 & 0 & 680 & 680 & 0 \\ 0 & 0 & 480 & 480 & 0 \\ 0 & 0 & 380 & 380 & 0 \end{bmatrix}$$

I valori ottenuti sono incompatibili con il campo di digitalizzazione di un'immagine B/N a 8 bit. Si deve allora applicare la trasformazione (7.1) con $MAX(|c_{ij}|) = 780$. Si ottiene

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & 222 & 222 & 0 \\ 0 & 0 & 157 & 157 & 0 \\ 0 & 0 & 124 & 124 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 57. *Determinare l'immagine risultante dalla convoluzione dell'immagine A con un filtro Sobel scelto in modo tale da evidenziare la discontinuità.*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 140 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 140 & 140 \\ 10 & 10 & 10 & 140 & 140 & 140 \\ 10 & 10 & 140 & 140 & 140 & 140 \\ 10 & 140 & 140 & 140 & 140 & 140 \\ 140 & 140 & 140 & 140 & 140 & 140 \end{bmatrix}$$

Soluzione

E' evidente che si tratta di una discontinuità diagonale con inclinazione di 45° . Per evidenziare una discontinuità di questo tipo il filtro tipo Sobel adatto è quello diagonale, la cui finestra è

$$S_d = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si devono calcolare gli elementi c_{ij} della matrice 4×4 $C = A * S_d$. Per velocizzare i conti, oltre a tener conto delle proprietà del filtro Sobel (vedi pag. 118), si effettuano prima i seguenti conti ricorrenti: $10 * 2 = 20$, $140 * 2 = 280$. I risultati sono i seguenti:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 260 & 520 & 520 \\ 260 & 520 & 520 & 260 \\ 520 & 520 & 260 & 0 \\ 520 & 260 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I valori ottenuti sono incompatibili con il campo di digitalizzazione di un'immagine B/N a 8 bit. Si deve allora applicare la trasformazione (7.1) con $MAX(|c_{ij}|) = 520$. Si

Calcoli / Proprietà	c_{ij}
per S	$c_{11} = c_{34} = c_{43} = c_{44} = 0$
$c_{21} = -20 - 10 - 10 + 0 + 0 + 0 + 10 + 10 + 280$	$c_{21} = 260$
$c_{31} = -20 - 10 - 10 + 0 + 0 + 0 + 140 + 140 + 280$	$c_{31} = 520$
$c_{42} = -20 - 140 - 140 + 0 + 0 + 0 + 140 + 140 + 280$	$c_{31} = 260$
per SD	$c_{12} = c_{21} = 260$
per SD	$c_{22} = c_{13} = c_{41} = c_{32} = c_{23} = c_{14} = c_{31} = 520$
per SD	$c_{33} = c_{24} = c_{42} = 260$

ottiene

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 127 & 255 & 255 \\ 127 & 255 & 255 & 127 \\ 255 & 255 & 127 & 0 \\ 255 & 127 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 58. *Determinare l'immagine risultante dalla convoluzione dell'immagine A con il più semplice operatore laplaciano.*

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 25 & 50 & 50 & 50 \\ 25 & 25 & 25 & 50 & 50 & 50 \\ 25 & 25 & 25 & 50 & 50 & 50 \\ 25 & 25 & 25 & 50 & 50 & 50 \\ 25 & 25 & 25 & 50 & 50 & 50 \\ 25 & 25 & 25 & 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Soluzione

L'operatore laplaciano più semplice è caratterizzato dalla seguente finestra

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si devono calcolare gli elementi c_{ij} della matrice 4x4 $C = A * L$. Per velocizzare i conti, oltre a tener conto della proprietà dell'operatore laplaciano (vedi pag. 118), si effettuano prima i seguenti calcoli ricorrenti: $25 * 4 = 100$, $50 * 4 = 200$.

E' conveniente notare che nel laplaciano nella forma più semplice a contare nel computo del valore del pixel centrale sono solo gli elementi a_{ij} che cadono in corrispondenza della 'croce'. Da ciò si ha:

- Proprietà +1 - Se tutti gli elementi a_{ij} che cadono in corrispondenza della 'croce' sono uguali, il valore da attribuire al pixel centrale è nullo.

- Proprietà +2 - Sottomatrici con i termini a_{ij} in corrispondenza della ‘croce’ che, a *parità di elemento centrale*, si presentano identiche oppure differiscono per la sola differente collocazione dell’unico identico valore diverso dagli altri tre, danno origine allo stesso valore del pixel centrale. Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 25 & \mathbf{25} & 50 \\ \mathbf{25} & 25 & \mathbf{50} \\ 25 & \mathbf{25} & 50 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 25 & \mathbf{25} & 25 \\ \mathbf{25} & 25 & \mathbf{25} \\ 50 & \mathbf{50} & 50 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 50 & \mathbf{25} & 25 \\ \mathbf{50} & 25 & \mathbf{25} \\ 50 & \mathbf{25} & 50 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 50 & \mathbf{50} & 50 \\ \mathbf{25} & 25 & \mathbf{25} \\ 25 & \mathbf{25} & 25 \end{bmatrix}$$

danno tutte lo stesso risultato e ciò semplifica i calcoli.

Sulla base di tali considerazioni, i risultati sono i seguenti:

Calcoli / Proprietà	c_{ij}
per L	$c_{ij} = 0$ (i=1,2,3,4; j=1,4)
$c_{12} = -25 - 25 - 25 - 50 + 0 + 0 + 0 + 0 + 100$	$c_{12} = -25$
per +2	$c_{ij} = c_{12} = -25$ (i=2,3,4; j=2)
$c_{13} = -25 - 50 - 50 - 50 + 0 + 0 + 0 + 0 + 200$	$c_{13} = 25$
per +2	$c_{ij} = c_{13} = 25$ (i=2,3,4; j=3)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -25 & 25 & 0 \\ 0 & -25 & 25 & 0 \\ 0 & -25 & 25 & 0 \\ 0 & -25 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

I valori ottenuti sono incompatibili con il campo di digitalizzazione di un’immagine B/N a 8 bit. Si deve allora applicare la trasformazione (7.1) con $MAX(|c_{ij}|) = 25$. Si ottiene

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 0 \\ 0 & 255 & 255 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 59. Date le seguenti finestre di convoluzione

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

dire di quali operatori si tratta e determinare l'immagine risultante dalla convoluzione dell'immagine A con B_2 .

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 80 & 80 & 80 & 80 & 80 & 80 \\ 80 & 80 & 80 & 80 & 80 & 80 \\ 80 & 80 & 80 & 80 & 80 & 80 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Gli operatori sono nell'ordine: una finestra di convoluzione di media, lo Sharp enhancer semplice e una forma di laplaciano più efficiente.

Si devono calcolare gli elementi c_{ij} della matrice 4×4 $C = A * B_2$. Per velocizzare i conti, oltre a tener conto della proprietà dell'operatore (vedi nota a pag. 118), si effettuano prima i seguenti calcoli ricorrenti: $20*5=100$, $80*5=400$.

Come osservato per l'operatore laplaciano nella sua forma più semplice (vedi pagina 124) pure per lo Sharp enhancer semplice a contare nel computo del valore del pixel centrale sono solo gli elementi a_{ij} che cadono in corrispondenza della 'croce'. Di conseguenza valgono per esso le stesse proprietà $+1$ e $+2$ del laplaciano. Sulla base di tali considerazioni, i risultati sono i seguenti:

Calcoli / Proprietà	c_{ij}
per L	$c_{ij} = 0$ ($i=1,4; j=1,2,3,4$)
$c_{12} = -20-20-20-80+0+0+0+0+100$	$c_{12} = -40$
per $+2$	$c_{ij} = c_{12} = -40$ ($i=2; j=2,3,4$)
$c_{13} = -80-80-80-20+0+0+0+0+400$	$c_{13} = 140$
per $+2$	$c_{ij} = c_{13} = 140$ ($i=3; j=2,3,4$)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & -40 & -40 & -40 \\ 140 & 140 & 140 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I valori ottenuti sono incompatibili con il campo di digitalizzazione di un'immagine B/N a 8 bit. Si deve allora applicare la trasformazione (7.1) con $MAX(|c_{ij}|) = 140$. Si ottiene

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 73 & 73 & 73 & 73 \\ 255 & 255 & 255 & 255 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estensimetri elettrici a resistenza metallici

Negli esercizi di questa sezione si fa l'ipotesi di perfetto incollaggio degli estensimetri elettrici a resistenza metallici (e.r.m.) alla superficie dell'oggetto.

Si ricorda infatti che un estensimetro è uno strumento in grado di convertire un segnale in ingresso (una deformazione lineare) in un segnale d'uscita di natura diversa (nel caso specifico degli e.r.m. in una variazione di resistenza). Ma la misurazione con estensimetri e.r.m. degli spostamenti relativi fra due punti generici di una superficie di un corpo sottoposto a carichi statici o dinamici richiede che il supporto dell'estensimetro sia strettamente connesso alla superficie e a tal fine si utilizzano opportuni adesivi.

E' evidente che il buon incollaggio è fondamentale per l'attendibilità dei dati misurati. In questo contesto fa parte del buon incollaggio anche il corretto posizionamento dell'estensimetro o degli estensimetri rispetto alle tipiche direzioni previste dalle disposizioni in letteratura per misure di flessione, sforzo normale o torsione. Anche questa condizione di ottima disposizione si suppone perfettamente soddisfatta nelle applicazioni numeriche che seguono unita al non danneggiamento della griglia a seguito dell'operazione di incollaggio, cosicché l'estensimetro e.r.m. resta caratterizzato anche da incollato dalla resistenza nominale dichiarata dal costruttore.

Si richiama la formula generale degli estensimetri e.r.m. collegati a un ponte di Wheatstone (nota anche come formula generale del ponte di Wheatstone) ossia la relazione che esprime il legame fra deformazioni misurate e la differenza di tensione misurata nel circuito a ponte:

$$\frac{\Delta V_m}{V_0} \cong \frac{K}{4}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4) \quad (8.1)$$

Sebbene vi siano varie disposizioni tipiche degli estensimetri e.r.m., nelle applicazioni numeriche si fa riferimento solo alle configurazioni consigliate per la flessione, per lo sforzo normale e per la torsione. In queste particolari disposizioni con il ponte completo o con il mezzo ponte si ottiene la cancellazione degli effetti dalla temperatura, nonché la cancellazione di eventuali effetti dovuti alla presenza di forze di compressione o di trazione. Ciò però non significa affatto che le altre configurazioni possibili siano "sbagliate".

===== O ===== O ===== O =====

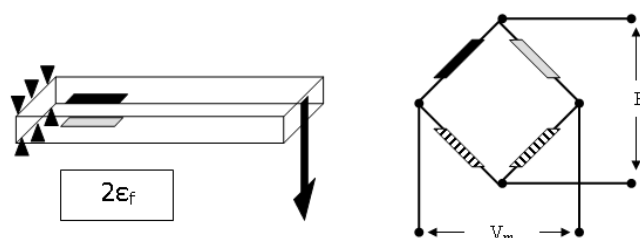


Figura 8.1: Flessione: posizionamento degli e.r.m. e schema a mezzo ponte

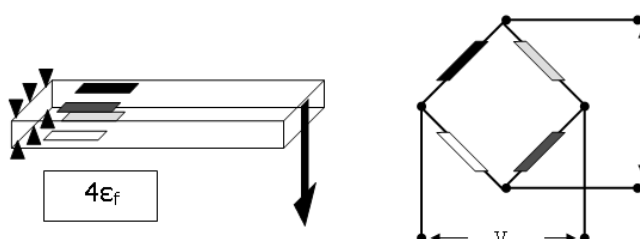


Figura 8.2: Flessione: posizionamento degli e.r.m. e schema a ponte completo

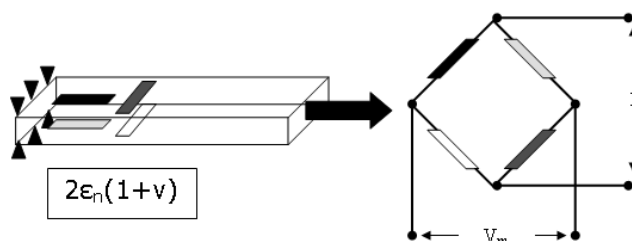


Figura 8.3: Trazione: posizionamento degli e.r.m. e schema a ponte completo

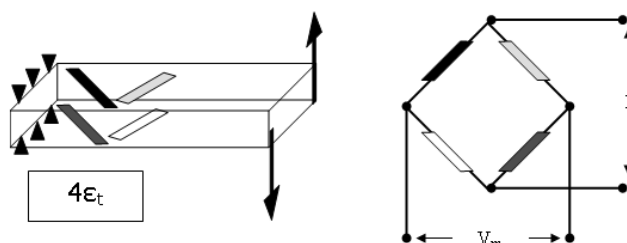


Figura 8.4: Torsione: posizionamento degli e.r.m. e schema a ponte completo

Nell'introduzione agli esercizi del Capitolo 3 si è messo in evidenza il fatto che l'inserimento di uno strumento di misura reale comporta che il misuratore perturbi il sistema, poiché lo strumento assorbe dell'energia. Tale fenomeno viene valutato calcolando l'errore di inserzione (detto anche di carico), errore la cui espressione, nel caso degli estensimetri e.r.m. inseriti all'interno di un ponte di Wheatstone, è dato dalla relazione (8.2) a pagina 127.

La (8.2) è un caso particolare, relativo all'analogia elettromeccanica (si hanno infatti resistenze elettriche nel ponte di Wheatstone!), delle relazioni che consentono di calcolare l'errore di inserzione laddove sia da misurare una grandezza di sforzo (v o \dot{v}) oppure una variabile di portata (F o M).

Per effettuare una misura di deformazione mediante estensimetri e.m.r. si ricorre a un particolare circuito elettrico (noto come ponte di Wheatstone) e a un voltmetro per quantificare l'entità dello sbilanciamento del ponte. Il voltmetro introduce ovviamente un effetto di carico e le letture vanno quindi opportunamente corrette e, se possibile, sarebbe opportuno scegliere preliminarmente il voltmetro adatto al ponte di Wheatstone che si è realizzato¹.

Nel caso degli estensimetri e.m.r., perché lo strumento voltmetro incida sul misurando (tensione) con effetti di inserzione contenuti, la sua resistenza interna (sarebbe più corretto parlare di impedenza interna) dev'essere sufficientemente elevata (almeno 100 volte) rispetto a quella che nel suo complesso caratterizza il ponte.

Per il calcolo della resistenza equivalente R_g che caratterizza il ponte di Wheatstone si ricorre a noti teoremi dell'elettrotecnica. Di fatto tale resistenza equivalente è quella complessiva vista dal voltmetro ai capi dei morsetti cui è collegato. Essa viene operativamente ricavata staccando il voltmetro e staccando inoltre il generatore di tensione che alimenta il ponte. Quindi si ricava la resistenza equivalente rispetto ai capi dei morsetti di collegamento del voltmetro con il ponte secondo le regole delle resistenze elettriche relativamente al circuito così modificato.

Se R_u è la resistenza interna del voltmetro, si può facilmente dimostrare che l'errore di inserzione ϵ è dato dalla relazione

$$\epsilon = -\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} \quad (8.2)$$

¹In realtà, poiché le resistenze degli estensimetri e.r.m. acquistabili sul mercato sono standardizzate su un intervallo limitato di valori (da 100 a 1000 Ω), vengono messe a disposizione delle specifiche centraline estensimetriche con ponte di Wheatstone incorporato e che danno in uscita non già valori in volt, ma direttamente delle deformazioni impostando un opportuno fattore di taratura.

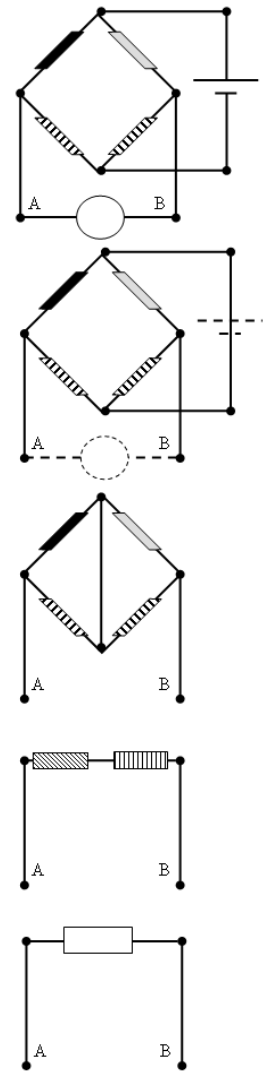


Figura 8.5: Determinazione di R_g

Dunque il voltmetro misura una tensione V_m minore di quella effettiva a causa dell'errore di inserzione.

Per ottenere l'effettivo valore V_m^* della tensione di sbilanciamento del ponte si utilizza l'espressione

$$V_m^* = \frac{V_m}{1 + \epsilon} \quad (8.3)$$

in cui ϵ è preso con il suo segno.

Esercizio 60. Una cella di carico è costituita da quattro estensimetri elettrici a resistenza incollati su un cilindro di diametro D e misura il carico N in direzione assiale, come schematizzato in Figura.

a) Si indichi la collocazione e l'orientazione degli estensimetri sulla cella di carico e la disposizione sul ponte si misura giustificando la scelta;

b) Si determini la sensibilità della cella;

c) Si determini l'errore relativo di inserzione dovuto all'utilizzo di un voltmetro con impedenza di 1000Ω .

Siano:

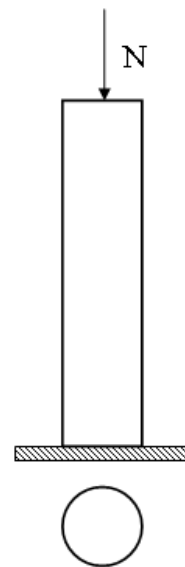
Diametro $D=2,00$ in

Modulo di Young $E=205$ GPa

Coefficiente di Poisson $\nu=0,30$

Fattore di taratura $K=2,055\pm 0,5\%$

Resistenza dell'estensimetro $R_0=120\pm 0,3\% \Omega$



Soluzione

[a] La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.3 a pagina 128. Con questa configurazione si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti dalla temperatura nonché la cancellazione di eventuali effetti dovuti alla flessione.

[b] La sensibilità S della cella è data dal rapporto $S = \frac{\Delta V_m}{N}$.

Sotto il carico N la struttura subisce una deformazione assiale pari a $\epsilon_n = \frac{N}{EA}$ e una contrazione (deformazione) trasversale $\epsilon_t = -\nu\epsilon_n = -\nu\frac{N}{EA}$. Sostituendo queste espressioni nella (8.1) a pagina 127 tenendo conto della disposizione fisica degli estensimetri sul corpo e della loro collocazione circuitale nel ponte di Wheatstone, si ha (indicando con V_0 la tensione che alimenta il ponte):

$$\frac{\Delta V_m}{V_0} = \frac{K}{4} \left(\frac{N}{EA} + \nu \frac{N}{EA} + \frac{N}{EA} + \nu \frac{N}{EA} \right) = \frac{K}{2} \frac{N}{EA} (1 + \nu)$$

da cui segue

$$S = \frac{\Delta V_m}{N} = \frac{K}{2} \frac{V_0}{EA} \frac{1 + \nu}{EA}$$

funzione di V_0 , che è una grandezza in questo caso non nota.

Poiché $1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$, si ha $A = \frac{\pi}{4} D^2 = 0,00203 \text{ m}^2$. Sostituendo questo valore con gli altri nella relazione che consente di calcolare la sensibilità della cella si ottiene

$$S = \frac{\Delta V_m}{N} = \frac{2,055}{2} \frac{1 + 0,3}{205 \cdot 10^9 \cdot 2,03 \cdot 10^{-3}} = 3,21 \cdot 10^{-9} V_0 \text{ V/N}$$

[c] Per calcolare l'errore per effetto di carico si deve per prima cosa determinare il valore

della resistenza equivalente R_g vista ai capi del voltmetro secondo la procedura schematicamente illustrata in Figura 8.5. Poiché lo schema circuitale è a ponte completo, le resistenze su ogni lato sono uguali. Pertanto si ha:

$$R_g = \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} + \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} = 2 \frac{R_0^2}{2R_0} = R_0 = 120 \, \Omega$$

Inserendo i valori nella (8.2) a pagina 127 si ottiene

$$\epsilon_V = -\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} = -\frac{1}{1 + \frac{1000}{120}} = -0,107 \Rightarrow -10,7\%$$

Esercizio 61. Si consideri una barra cilindrica piena e ad asse rettilineo soggetta a sola torsione. Per la misura della deformazione si vuole utilizzare degli estensimetri e.r.m. da incollare sull'elemento meccanico e da inserire opportunamente in un ponte di Wheatstone: a) indicare la collocazione degli estensimetri sulla barra e la loro disposizione sul ponte di misura;

b) calcolare la resistenza R_u interna del voltmetro per la misura dello sbilanciamento del ponte se si vuole un errore d'inserzione minore dello 0,5%;

Caratteristiche degli estensimetri:

Fattore di taratura: $K=2,5$

Resistenza nominale: $R_0=600\Omega$

c) calcolare l'errore di inserzione qualora venissero impiegati per la misura estensimetri con resistenza nominale $R_0=120\Omega$ e un voltmetro con resistenza interna $R_u=20000 \, \Omega$.

Soluzione

[a] La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.4. Con questa configurazione a ponte completo si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti della temperatura e la misura della deformazione conseguente alla sola torsione.

[b] Operando sul ponte secondo la procedura schematicamente illustrata in Figura 8.5 al fine di calcolare la resistenza equivalente R_g , si ha:

$$R_g = \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} + \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} = 2 \frac{R_0^2}{2R_0} = R_0 = 600 \, \Omega$$

Un errore di inserzione minore dello 0,5%, implica che (considerando la (8.2) a pagina 127)

$$\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} < 0.005$$

ossia

$$\frac{1 - 0.005}{0.005} R_g < R_u$$

e quindi $R_u > 119400 \, \Omega$ (ovvero per semplicità $R_u > 120 \, \text{k}\Omega$).

[c] In base ai risultati ottenuti in precedenza, la resistenza equivalente del ponte in questo caso è $R_g = 120 \, \Omega$. Utilizzando questa volta direttamente la (8.2), si ottiene

$$\epsilon_V = -\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} = -\frac{1}{1 + \frac{20000}{120}} = -0.00596 \Rightarrow -0.6\%$$

Esercizio 62. Si consideri una barra in acciaio retta di lunghezza utile $L=1,32 \, \text{ft}$ e sezione rettangolare di dimensioni rispettivamente $b=2 \, \text{inch}$ e $h=5 \, \text{mm}$ vincolata con incastro considerabile perfetto in modo tale che b sia parallelo al suolo. Su tale elemento meccanico agisce all'estremità libera una forza concentrata F che tende a fletterla. Per misurare la deformazione conseguente alla flessione si decide di utilizzare 2 estensimetri e.r.m. e un ponte di Wheatstone: a) indicare la collocazione degli estensimetri sulla barra e la loro disposizione sul ponte di misura;

b) calcolare il valore delle due resistenze R uguali tra loro che dovrebbero essere scelte per completare il ponte qualora si utilizzasse un voltmetro con resistenza interna $R_u=50,0 \, \text{k}\Omega$ per la misura dello sbilanciamento e volendo limitare l'errore d'inserzione a meno dell'0,1%;

Caratteristiche degli estensimetri:

Fattore di taratura: $K=2,055$

Resistenza nominale: $R_0=120\Omega$

c) assumendo $R=120 \, \Omega$ e del tutto trascurabile l'errore di inserzione, determinare la tensione di sbilanciamento del ponte alimentato a $10.0 \, \text{V}$ conseguente a una forza F di $20,0 \, \text{N}$.

Soluzione

[a] Il modello è chiaramente quello di una trave incastrata con forza F applicata all'estremo. La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.1 e tale per cui la distanza della mezzzeria della griglia degli estensimetri dall'estremo libero della mensola sia pari a L . Con questa configurazione si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti della temperatura.

[b] Operando sul ponte secondo la procedura schematicamente illustrata in Figura 8.5 a pagina 129 al fine di calcolare la resistenza equivalente R_g , si ha:

$$R_g = \frac{R_0 R}{R_0 + R} + \frac{R_0 R}{R_0 + R} = 2 \frac{R_0 R}{R_0 + R}$$

Un errore di inserzione minore dello 0,1%, implica che (considerando la (8.2) a pagina 127)

$$\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} < 0.001$$

ossia, tenendo conto che l'incognita è nel termine R_g ,

$$R_g < \frac{0.001}{1 - 0.001} R_u$$

$$2 \frac{R_0 R}{R_0 + R} < 500.5$$

cioè $R < 31,6 \, \Omega$ (ovvero per semplicità $R < 30,0 \, \Omega$).

[c] Con procedimento già illustrato in altri esercizi e tenendo conto della (8.1) a pagina 127 nel caso di misura a mezzo ponte di Wheatstone della flessione, si ha (indicando con V_0 la tensione che alimenta il ponte):

$$\frac{\Delta V_m}{V_0} = \frac{K}{2} \epsilon = \frac{K}{2} \frac{6FL}{Ebh^2} = \frac{3FL}{KEbh^2}$$

Quindi l'espressione dello sbilanciamento V_m è

$$\Delta V_m = \frac{3FL}{KEbh^2} V_0$$

Ora, per l'acciaio si può assumere come modulo di Young $E=205 \text{ MPa}$ e, poiché

$$1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$$

$$\text{allora } L=1,32 \text{ ft } 0,3048 \text{ m/ft} = 0,4023 \text{ m}$$

$$b=2 \text{ in } 0,0254 \text{ m/in} = 0,0508 \text{ m}$$

$$\text{Inserendo i valori numerici si ottiene } V_m=4,51 \times 10^{-4} = 0,451 \text{ mV}.$$

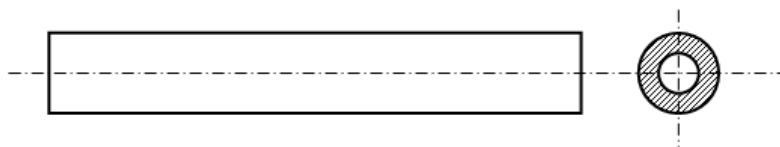
Esercizio 63. Sull'asta di una struttura reticolare schematizzata in Figura vengono collocati quattro estensimetri elettrici a resistenza per la misura del carico N in direzione assiale.

a) Si indichi la collocazione e l'orientazione degli estensimetri sul tirante e la disposizione sul ponte si misura giustificando la scelta;

b) Se si utilizza un voltmetro a resistenza interna $1,00 \text{ k}\Omega$ per la misura dello sbilanciamento del ponte, determinare l'errore di inserzione e quindi la correzione da apportare alla lettura;

c) Determinare lo sforzo normale N corrispondente a una lettura di $10,0 \text{ mV}$ di sbilanciamento con il ponte alimentato a $10,0 \text{ V}$.

Caratteristiche del tirante:	Caratteristiche dell'estensimetro:
Diametro esterno $D=1,0$ in;	Fattore di taratura $K=2,055\pm 0,5\%$
Diametro interno $d=0,9$ in;	Resistenza dell'estensimetro $R_0=120\pm 0,3\% \Omega$
Modulo di Young $E=205$ GPa;	
Coefficiente di Poisson $\nu=0,30$	



Soluzione

a La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.3 a pagina 128. Con questa configurazione si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti della temperatura nonché la cancellazione di eventuali effetti dovuti alla flessione.

b Per calcolare l'errore per effetto di carico si deve per prima cosa determinare il valore della resistenza equivalente R_g vista ai capi del voltmetro secondo la procedura schematicamente illustrata in Figura 8.5 a pagina 129. Poiché lo schema circuitale è a ponte completo, le resistenze su ogni lato sono uguali. Pertanto si ha:

$$R_g = \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} + \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} = 2 \frac{R_0^2}{2R_0} = R_0 = 120 \Omega$$

Inserendo i valori nella (8.2) a pagina 127 si ottiene

$$\epsilon_V = -\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} = -\frac{1}{1 + \frac{1000}{120}} = -0.107 \Rightarrow -10.7\%$$

La correzione da apportare alla lettura del voltmetro al fine di tener conto dell'effetto di carico si ottiene applicando la (8.3) a pagina 130, ossia la relazione

$$V = \frac{V_m}{0.983} \quad (8.4)$$

poiché in questo caso $\epsilon=-0,107$.

c Poiché $1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$, si ha che $0,9 \text{ in} = 0,0229 \text{ m}$, trasformazione necessaria per poter lavorare solo con grandezze del Sistema Internazionale.

Nota la lettura V_m data dal voltmetro, essa va opportunamente corretta in base alle precedenti considerazioni relative all'errore di inserzione, ottenendo il valore

$$V_m^* = \frac{10.0}{0.983} = 10.17 \text{ mV} \quad (8.5)$$

(facendo parte di un calcolo intermedio rispetto al valore finale da calcolare, si è tenuta una cifra significativa in più).

Sotto il carico N il tirante subisce una deformazione assiale pari a $\epsilon_n = \frac{N}{EA}$ e una contrazione (deformazione) trasversale $\epsilon_t = -\nu\epsilon_n = -\nu\frac{N}{EA}$. Sostituendo queste espressioni nella (8.1) a pagina 127 tenendo conto della disposizione fisica degli estensimetri sul corpo e della loro collocazione circuitale nel ponte di Wheatstone, si ha (indicando con V la tensione che alimenta il ponte per non confonderla simbolicamente con il modulo di Young E):

$$\frac{\Delta V_m^*}{V} = \frac{K}{4} \left(\frac{N}{EA} + \nu \frac{N}{EA} + \frac{N}{EA} + \nu \frac{N}{EA} \right) = \frac{K}{2} \frac{N}{EA} (1 + \nu)$$

da cui segue

$$N = \frac{\Delta V_m^*}{V} \frac{2EA}{K(1 + \nu)} = \frac{\Delta V_m^*}{V} \frac{2E}{K(1 + \nu)} \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 14802,2 \text{ N}$$

Per quanto riguarda l'incertezza i_N , per prima cosa si ha

$$\vartheta_K = \frac{\partial N}{\partial K} = -\frac{\Delta V_m^*}{V} \frac{2E}{K^2(1 + \nu)} \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

Essendo $i_K = 2,055 \cdot 0,005 = 0,01$, si ottiene

$$i_N = \sqrt{(\vartheta_K i_K)^2} = 72,03 \text{ N}$$

Il risultato è quindi $N = 14,80 \pm 0,07 \text{ kN}$.

Esercizio 64. Su un tirante struttura reticolare schematizzata in Figura vengono collocati quattro estensimetri elettrici a resistenza per la misura del carico N in direzione assiale.

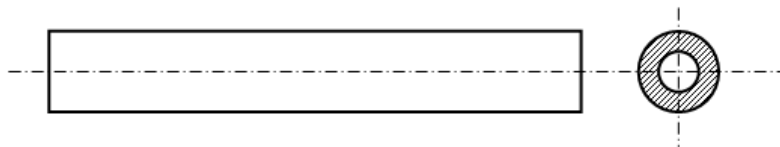
a) Si indichi la collocazione e l'orientazione degli estensimetri sul tirante e la disposizione sul ponte si misura giustificando la scelta;

b) Prevedendo di utilizzare un voltmetro di resistenza interna $1,00 \text{ M}\Omega$ per la misura dello sbilanciamento del ponte, determinare l'errore di inserzione;

c) Determinare lo sforzo normale N corrispondente a una lettura di $1,00 \text{ mV}$ di sbilanciamento con il ponte alimentato a $4,00 \text{ V}$.

Caratteristiche del tirante:
 Diametro esterno $D = 1,10 \text{ in}$;
 Diametro interno $d = 0,915 \text{ in}$;
 Modulo di Young $E = 205 \text{ GPa}$;
 Coefficiente di Poisson $\nu = 0,30$

Caratteristiche dell'estensimetro:
 Fattore di taratura $K = 2,055 \pm 0,5\%$
 Resistenza dell'estensimetro $R_0 = 120 \pm 0,3\% \Omega$



Soluzione

L'esercizio proposto è sostanzialmente identico all'esercizio 63 a pagina 134; pertanto qui di seguito vengono solamente riportati i passaggi risolutivi in modo sintetico.

[a] La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.3 a pagina 128.

[b] Operando sul ponte secondo la procedura schematicamente illustrata in Figura 8.5 a pagina 129 si ha:

$$R_g = \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} + \frac{R_0 R_0}{R_0 + R_0} = 2 \frac{R_0^2}{2R_0} = R_0 = 120 \, \Omega$$

e dalla (8.2) a pagina 127 si ottiene

$$\epsilon_V = -\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} = -\frac{1}{1 + \frac{1000000}{120}} = -1.1999 \cdot 10^{-4} \Rightarrow -0.012\%$$

Non è quindi necessario correggere le letture del voltmetro, essendo l'errore per effetto di carico del tutto irrilevante ai fini pratici. Ciò è dovuto in questo caso all'elevato valore della resistenza interna dello strumento rispetto a quella globale caratteristica del ponte di Wheatstone.

[c] Poiché 1 in = 0,0254 m, si ha che

$$D = 1,10 \text{ in} = 0,0279 \text{ m}$$

$$d = 0,915 \text{ in} = 0,02324 \text{ m}$$

$$N = \frac{\Delta V_m}{V_0} \frac{2E}{K(1+\nu)} \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 7181.3 = 7.18 \text{ kN}$$

$$\vartheta_K = \frac{\partial N}{\partial K} = -\frac{\Delta V_m}{V_0} \frac{2E}{K^2(1+\nu)} \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

Essendo $i_K = 2,055 \cdot 0,005 = 0,01$, si ottiene

$$i_N = \sqrt{(\vartheta_K i_K)^2} = 34.9 = 0.03 \text{ kN}$$

Il risultato è $N = 7,18 \pm 0,03 \text{ kN}$.

Esercizio 65. Una cella di carico è costituita da quattro estensimetri elettrici a resistenza incollati su un cilindro di diametro D e misura il carico N in direzione assiale, come schematizzato in Figura.

a) Si indichi la collocazione e l'orientazione degli estensimetri sulla cella di carico e la disposizione sul ponte si misura giustificando la scelta;

b) Si determini la sensibilità della cella;

c) Si determini l'errore relativo di inserzione dovuto all'utilizzo di un voltmetro con impedenza di 1000Ω .

Siano:

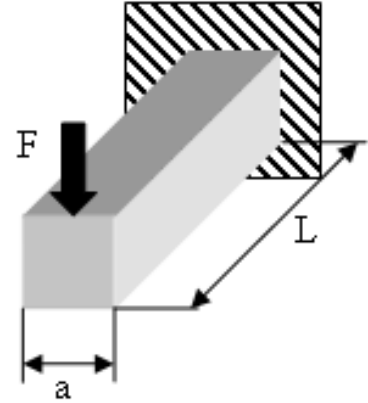
Diametro $D=2,00$ in

Modulo di Young $E=205$ GPa

Coefficiente di Poisson $\nu=0,30$

Fattore di taratura $K=2,055\pm 0,5\%$

Resistenza dell'estensimetro $R_0=120\pm 0,3\% \Omega$



Soluzione

[a] La collocazione degli estensimetri e la loro disposizione sul ponte di Wheatstone è simile a quella illustrata in Figura 8.1. Con questa configurazione si ottiene la cancellazione degli effetti interferenti della temperatura.

Il modello è chiaramente quello di una trave incastrata con forza F applicata all'estremo e gli estensimetri vengono incollati simmetricamente sulla forcina in modo che la superficie sia ortogonale alla direzione della forza che sollecita l'elemento meccanico in esame.

[b] Indicando con $R_0=600 \Omega$ le resistenze associate ai due estensimetri e con $R=1000 \Omega$ quelle uguali del ponte di Wheatstone e operando sul ponte secondo la procedura schematicamente illustrata in Figura 8.5 al fine di calcolare la resistenza equivalente R_g , si ha:

$$R_g = \frac{R_0 R}{R_0 + R} + \frac{R_0 R}{R_0 + R} = 2 \frac{R_0 R}{R_0 + R} = 2 \frac{600 \cdot 1000}{1600} = 750 \Omega$$

Un errore di inserzione minore dello $0,1\%$, implica che (considerando la (8.2) a pagina 127)

$$\frac{1}{1 + \frac{R_u}{R_g}} < 0.001$$

ossia

$$\frac{1 - 0.001}{0.001} R_g < R_u$$

e quindi $R_u > 749250 \Omega$ (ovvero per semplicità $R_u > 750 \text{ k}\Omega$).

□ Richiamando le formule che governano la flessione di una trave e i parametri caratterizzanti la sua sezione, per il caso in esame si ha

$$I = \frac{1}{12}a^4$$
$$\sigma = \frac{M_f}{I}y = \frac{FL}{I} \frac{a}{2} = \frac{FL}{\frac{1}{12}a^4} \frac{a}{2} = \frac{6FL}{a^3}$$
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{6FL}{Ea^3}$$

Tenendo conto della (8.1) a pagina 127 nel caso di misura a mezzo ponte di Wheatstone della flessione, si ha (indicando con V_0 la tensione che alimenta il ponte):

$$\frac{\Delta V_m}{V_0} = \frac{K}{2} \epsilon = \frac{K}{2} \frac{6FL}{Ea^3} = \frac{3FL}{KEa^3}$$

Quindi l'espressione dello sbilanciamento V_m è

$$\Delta V_m = \frac{3FL}{KEa^3} V_0$$

funzione della tensione di alimentazione del ponte. Inserendo i valori numerici (5 kg-f 9,80665 N/kg-f = 49 N), si ottiene $V_m = 1,34 \cdot 10^{-5} V_0$ V.

Appendice A

Esempi di domande di teoria

Schema delle operazioni fondamentali del processo di misurazione.

Schema delle fasi di programmazione e di esecuzione di un esperimento con brevi commenti.

Differenza con esempi pratici fra ripetibilità, riproducibilità e riferibilità.

Accorgimenti per raccogliere un campione statistico di dati. Come ci si comporta se si ritiene che qualche dato sia da scartare?

Incertezza tipo di categoria A e B; incertezza estesa e procedura per ottenerla.

Incertezza secondo la Guida ISO: propagazione di grandezze correlate e scorrelate; determinazione dell'incertezza estesa.

Sia data una funzione $z=F(x,y)$; x sia misurato n_x volte e y sia misurato n_y volte ottenendo i rispettivi valori medi m_x e m_y e scarti quadratici s_x e s_y .

Si spieghi sinteticamente come si può valutare il parametro z con un livello di confidenza del 95% e quali ipotesi devono essere assunte.

Definizione di sensibilità e di risoluzione. Come si determinano durante un esperimento?

Disposizione degli estensimetri per le misure di flessione e per trazione e corrispondenti collegamenti nel circuito a ponte di Wheatstone.

Metodi statistici per il trattamento di segnali tempovarianti.

Descrivere, con esempi, gli effetti di aliasing ed illustrare i provvedimenti per la loro riduzione.

Leakage, descrizione del fenomeno e dei provvedimenti per la sua riduzione.

La convoluzione in generale ed applicata ai sistemi di visione. Esempio pratico.

Descrizione della tecnica sub-pixel.

- a) Scopo dell'esperienza riguardante il dinamometro;
- b) Modello teorico del sistema fisico e limiti del modello;
- c) Elencare le tre fonti di incertezza prevalenti riscontrate nella prova.

- a) Scopo dell'esperienza riguardante il termometro;
- b) Modello teorico del sistema fisico e limiti del modello;
- c) Elencare le tre fonti di incertezza prevalenti riscontrate nella prova.

Descrivere sinteticamente:

- 1) scopo
 - 2) procedura sperimentale
 - 3) risultati principali (non necessariamente numerici)
- dell'esperienza di laboratorio riguardante la statistica.

Realizzazione dei diagrammi di Bode con Matlab

I diagrammi di Bode in questo esercizionario sono realizzati con il programma Matlab. Va però osservato che sulla sola base delle funzioni predefinite del Matlab questo potente e versatile programma di calcolo fornisce solamente i diagrammi di Bode del modulo e della fase reali, non quelli asintotici.

Essendo invece richiesto il tracciamento dei diagrammi asintotici di Bode per composizione di quelli, sempre asintotici, delle funzioni elementari che a numeratore e a denominatore costituiscono la funzione di trasferimento $T(s)$, a tale scopo si rende necessario implementare un funzione scritta *ad hoc*. Tra le tante reperibili in rete, si è fatto uso della funzione “asbode” il cui script in linguaggio Matlab è comodamente scaricabile dal seguente URL:

<http://www.diee.unica.it/~giua/ANSIS/asbode.m> .

Tale funzione, con alcuni semplici adattamenti nello stile delle linee dei grafici, è stata salvata in un apposito file esterno poi richiamato una sola volta nella Command Window di Matlab all’inizio della sessione di lavoro.

In rete vi sono diversi siti e/o documenti in cui sono spiegate in dettaglio le modalità di immissione dei parametri della funzione $T(s)$ quando essa è nella forma standard per Matlab, ossia

$$T(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \dots + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

e le funzioni da utilizzare nel momento in cui la $T(s)$ è scritta in forma fattorizzata. Infatti, grazie alla funzione Matlab “conv”, sia che si utilizzi la funzione predefinita in Matlab per il tracciamento dei diagrammi di Bode che la funzione “asbode”, non è necessario ricavare ogni volta la forma polinomiale della funzione di trasferimento che si intende rappresentare, ma si possono immettere direttamente i parametri caratteristici dei vari suoi fattori con innegabili vantaggi.

A titolo esemplificativo si riporta l'utilizzo della funzione "asbode" per il tracciamento dei vari diagrammi di Bode della funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{0.016(1 + 0,33i\omega)}{(1 + 0,05i\omega)(1 + \frac{0,5}{80}i\omega + (\frac{i\omega}{80})^2)}$$

Per semplicità non si riportano né il simbolo "»" che precede le righe di comando nella Command Window né le risposte date dal programma Matlab dopo le varie immissioni. Sono stati invece aggiunti dei commenti alle righe di codice da digitare nella Command Window di Matlab al fine di facilitare l'eventuale utilizzo di questo programma per la verifica delle soluzioni ottenute a mano.

```
% Si immagina di aver salvato lo script della funzione "asbode" nel
% file asbode.m e di averlo inserito all'interno del progetto di lavoro
% Apertura del file asbode.m

open asbode.m

% Immissione dei parametri delle funzioni elementari del numeratore e
% loro conversione per mezzo della funzione intrinseca "conv" nei
% coefficienti b_j ospitati nel vettore num_p.
% Si osservi che i vari termini delle funzioni elementari vanno ordinati
% in modo decrescente rispetto alla potenza s.

num_p = conv([0 0.016],[0.33 1])

% Immissione dei parametri delle funzioni elementari del denominatore e
% loro conversione per mezzo della funzione intrinseca "conv" nei
% coefficienti a_j ospitati nel vettore den_p.
% Si osservi che i vari termini delle funzioni elementari vanno ordinati
% in modo decrescente rispetto alla potenza s.
% 80^-2=1.5625e-004 e 0.5/80=6.25e-003

den_p = conv([0.05 1],[1.5625e-004 6.25e-003 1])

% Utilizzo della funzione "asbode" per ottenere il grafico asintotico
% (module e fase) delle varie funzioni elementari di T(s).
% Se non si vuole che compaiano nello stesso grafico anche i diagrammi
% completi asintotici e reali è sufficiente disattivare nello script le
% righe indicate con => mettendoci davanti il simbolo %.
% TRACCIO IL DIAGRAMMA COMPLESSIVO DEI MODULI REALE E ASINTOTICO
=> semilogx(omega,gain(:,1),'k--',omega,gain(:,2),'k','LineWidth',2);
[...]
% TRACCIO IL DIAGRAMMA DELLE FASI REALE E ASINTOTICO
=> semilogx(omega,phase(:,1),'k--',omega,phase(:,2),'k','LineWidth',2);
% I parametri di scala (ascissa e ordinate) sono da intendersi come
% di primo tentativo.

asbode(num_p,den_p,[-6,6],[-100,100],[-180,180])
```

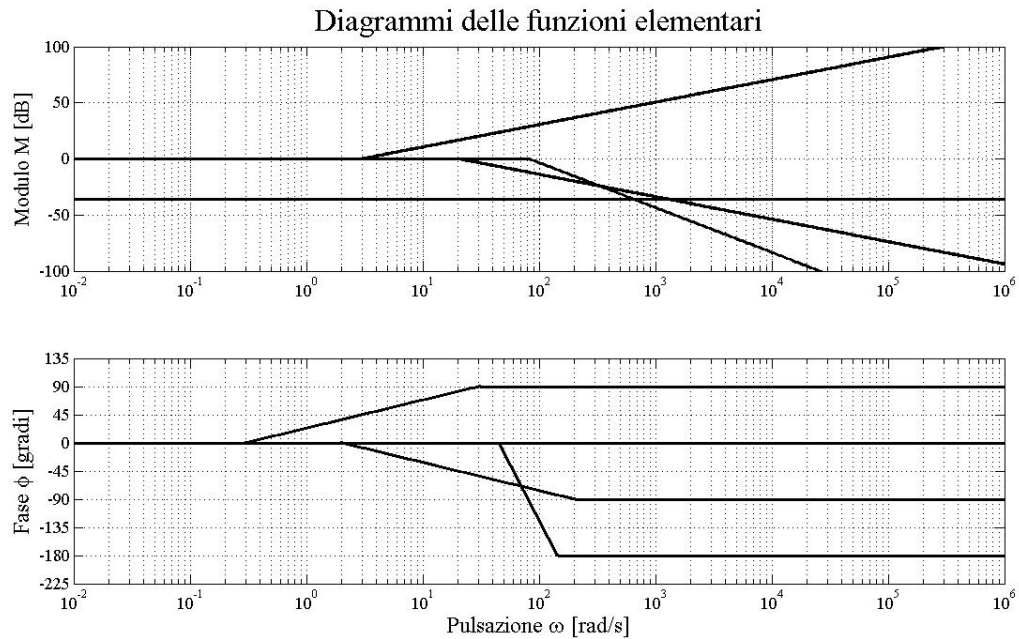



Figura B.1

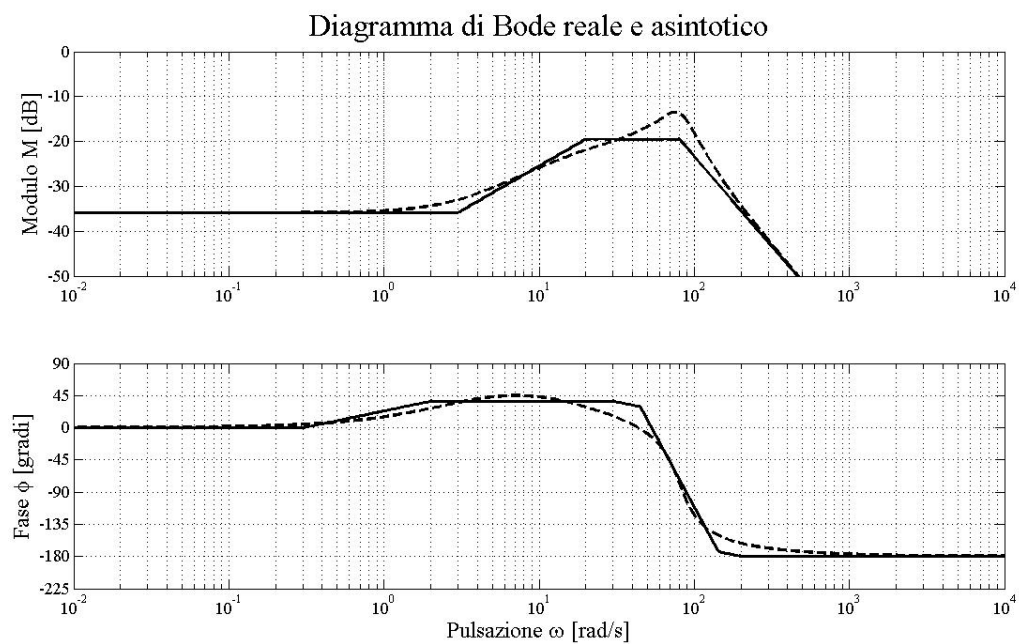


Figura B.2

Il risultato di tali comandi è l'ottenimento di due diagrammi. Con opportuni aggiustamenti di scala si ha la coppia di grafici in Figura B.1.

E' da notare che Matlab, oltre a generare i grafici, fornisce allo stesso tempo nella Command Window le caratteristiche salienti delle funzioni elementari di $T(s)$. Nell'esempio specifico si ha:

```
Guadagno di Bode:      K = 0.016, K_db =   -36
Zero reale:           z = -3.0303      tau = 0.3300
Polo reale:           p = -20.0000      tau = 0.0500
Coppia di poli complessi: p = -20.0000+j77.4597, p' = -20.0000-j77.4597
                        omega_n = 80.0000, zeta = 0.25
                        omega_s = 44.9873, omega_d = 142.2624
```

Per quanto riguarda l'ottenimento del diagramma di Bode della funzione di trasferimento $T(s)$ sia asintotico che reale per modulo e fase è sufficiente aggiungere l'ultima variabile prevista nella funzione "asbode" e assegnarle valore pari a 3. La riga di codice da digitare nella Command Window di Matlab è la seguente.

```
% Utilizzo della funzione "asbode" per ottenere il grafico asintotico
% e reale per modulo e fase della funzione di trasferimento T(s).
% Anche in questo caso i parametri di scala (ascissa e ordinate) sono
% da intendersi come di primo tentativo.
```

```
asbode(num_p,den_p,[-6,6],[-100,100],[-180,180],3)
```

Dopo gli opportuni aggiustamenti di scala, i grafici che si ottengono sono in Figura B.2.

Indice degli esercizi

Esercizio 1	3	Esercizio 23	37	Esercizio 45	86
Esercizio 2	4	Esercizio 24	41	Esercizio 46	88
Esercizio 3	5	Esercizio 25	42	Esercizio 47	91
Esercizio 4	6	Esercizio 26	43	Esercizio 48	96
Esercizio 5	7	Esercizio 27	45	Esercizio 49	100
Esercizio 6	8	Esercizio 28	47	Esercizio 50	105
Esercizio 7	8	Esercizio 29	48	Esercizio 51	113
Esercizio 8	9	Esercizio 30	50	Esercizio 52	114
Esercizio 9	9	Esercizio 31	55	Esercizio 53	119
Esercizio 10	10	Esercizio 32	56	Esercizio 54	119
Esercizio 11	13	Esercizio 33	57	Esercizio 55	120
Esercizio 12	13	Esercizio 34	58	Esercizio 56	122
Esercizio 13	15	Esercizio 35	61	Esercizio 57	123
Esercizio 14	15	Esercizio 36	65	Esercizio 58	124
Esercizio 15	17	Esercizio 37	65	Esercizio 59	125
Esercizio 16	20	Esercizio 38	70	Esercizio 60	131
Esercizio 17	21	Esercizio 39	70	Esercizio 61	132
Esercizio 18	23	Esercizio 40	76	Esercizio 62	133
Esercizio 19	29	Esercizio 41	78	Esercizio 63	134
Esercizio 20	31	Esercizio 42	80	Esercizio 64	136
Esercizio 21	34	Esercizio 43	82	Esercizio 65	138
Esercizio 22	36	Esercizio 44	84			