

Concetti Generali

Corso di *Misure Elettriche*

<http://sms.unipv.it/misure/>

Piero Malcovati

Dipartimento di Ingegneria Elettrica

Università di Pavia

piero.malcovati@unipv.it

Indice

- 1 Scopo di una Misurazione
- 2 Sistema Internazionale di Unità di Misura
- 3 Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati
- 4 Alcune Nozioni di Statistica
 - Distribuzione Normale (o Gaussiana)
 - Distribuzione di Student
 - Distribuzione Uniforme
- 5 Incertezza di Misura
 - Incertezza di Misura di Tipo A
 - Incertezza di Misura di Tipo B
 - Incertezza Composta
 - Incertezza Estesa
 - Espressione dei Risultati
 - Riferibilità delle Misure

Scopo di una Misurazione

- Misurare significa stabilire il rapporto fra la grandezza in esame e la sua unità di misura, cioè fra una grandezza e una quantità di riferimento, con essa omogenea
- La misurazione è il processo utilizzato per determinare la misura
- La misura è il risultato della misurazione
- Per esprimere una misura si usano due simboli: un numero e una lettera
 - La lettera rappresenta il simbolo dell'unità di misura
 - Il numero è il rapporto tra la grandezza e l'unità di misura
- Le diverse unità di misura necessarie per le diverse grandezze formano un sistema di unità di misura
- In un sistema di unità di misura vengono assunte come assolute o fondamentali alcune grandezze, indipendenti tra loro, definendone le unità di misura, mentre tutte le altre unità di misura del sistema, che vengono dette unità derivate, si ricavano da quelle fondamentali

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

- Le unità del SI sono unità legali in Italia, in forza del Decreto del Presidente della Repubblica n° 802 del 12/08/1982, emanato in attuazione della Direttiva n° 80/181 della CEE, di cui l'Italia è parte
- L'impiego di unità di misura di vecchi sistemi non è corretto e deve, perciò, essere abbandonato
- L'uso delle sole unità di misura del SI non risulta sempre pratico, per cui è necessario l'impiego di multipli e sottomultipli decimali, formati mediante prefissi
- Il prefisso, unito al simbolo dell'unità di misura, forma il simbolo del multiplo o sottomultiplo di quella unità
- Il prefisso può essere utilizzato direttamente, oppure combinato con i simboli di altre unità di misura

$$1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2, 1 \text{ kV} = 10^3 \text{ V}, 1 \text{ mm/s} = 10^{-3} \text{ m/s}$$

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

| Grandezza | Unità SI | |
|---------------------------|-----------------|--------------------|
| | Nome dell'Unità | Simbolo dell'Unità |
| Fondamentali | | |
| Lunghezza | metro | m |
| Massa | kilogrammo | kg |
| Intervallo di tempo | secondo | s |
| Corrente elettrica | ampere | A |
| Intervallo di temperatura | kelvin | K |
| Intensità luminosa | candela | cd |
| Quantità di sostanza | mole | mol |
| Supplementari | | |
| Angolo piano | radiante | rad |
| Angolo solido | steradiano | st |

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

| Grandezza | Unità SI | |
|--|------------------------|---------------------------|
| | Nome dell'Unità | Simbolo dell'Unità |
| Derivate | | |
| Frequenza | hertz | Hz |
| Forza | newton | N |
| Pressione, tensione meccanica | pascal | Pa |
| Lavoro, energia, quantità di calore | joule | J |
| Potenza | watt | W |
| Carica elettrica | coulomb | C |
| Potenziale elettrico, tensione elettrica, forza elettromotrice | volt | V |

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

| Grandezza | Unità SI | |
|--------------------------------------|------------------------|---------------------------|
| | Nome dell'Unità | Simbolo dell'Unità |
| Capacità elettrica | farad | F |
| Resistenza elettrica | ohm | Ω |
| Conduttanza elettrica | siemens | S |
| Flusso di induzione magnetica | weber | Wb |
| Induzione magnetica | tesla | T |
| Induttanza propria, induttanza mutua | henry | H |
| Flusso luminoso | lumen | lm |
| Illuminamento | lux | lx |

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

| Fattore di Moltiplicazione | Prefisso | |
|----------------------------|----------|---------|
| | Nome | Simbolo |
| 10^{18} | exa | E |
| 10^{15} | peta | P |
| 10^{12} | tera | T |
| 10^9 | giga | G |
| 10^6 | mega | M |
| 10^3 | kilo | k |
| 10^2 | etto | h |
| 10^1 | deca | da |

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

| Fattore di Moltiplicazione | Prefisso | |
|-----------------------------------|-----------------|----------------|
| | Nome | Simbolo |
| 10^{-1} | deci | d |
| 10^{-2} | centi | c |
| 10^{-3} | milli | m |
| 10^{-6} | micro | μ |
| 10^{-9} | nano | n |
| 10^{-12} | pico | p |
| 10^{-15} | femto | f |
| 10^{-18} | atto | a |

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

- Per esprimere il valore numerico di una grandezza è consigliabile l'uso dei multipli e sottomultipli, in modo che il valore numerico stesso risulti compreso tra 0.1 e 1000
- Per esempio, conviene scrivere 6.25 mm, oppure 6.25×10^{-3} m, invece di 0.00625 m
- Per la grafia sono valide le seguenti regole
 - I nomi delle unità di misura devono essere scritti con caratteri minuscoli, compresa la lettera iniziale, e senza punto finale (ad esempio volt e non Volt), e, quando derivano da nome proprio, restano invariati al plurale
 - L'unità di misura, quando accompagna il relativo valore numerico, deve essere espressa mediante il suo simbolo, che deve essere scritto dopo il valore numerico senza punto finale
 - L'uso dei simboli è ammesso solo quando essi sono preceduti da valore numerico, altrimenti si deve scrivere il nome dell'unità di misura per esteso

Sistema Internazionale (SI) di Unità di Misura

- Per l'uso dei multipli e sottomultipli delle unità di misura sono valide le seguenti regole
 - Il simbolo dei multipli e sottomultipli di una unità si scrive facendo precedere il prefisso al simbolo dell'unità, senza interporre un punto o uno spazio, mentre il simbolo delle unità derivate, prodotto di due o più unità, deve essere scritto interponendo, tra i simboli delle unità componenti, il punto di moltiplicazione o uno spazio

Nm oppure N · m

- Qualora l'unità derivi dal quoziente di due altre unità, il simbolo è formato interponendo fra il simbolo a numeratore e quello a denominatore un tratto obliquo o la riga di frazione o usando gli esponenti negativi

m/s^2 oppure $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ oppure $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati

- Il misurando è la specifica quantità oggetto di misurazione (ad esempio, la resistenza elettrica di un conduttore a 20° C)
- Quando si specifica un misurando, può essere necessario includere riferimenti ad altre quantità, quali tempo, temperatura, pressione e così via
- L'obiettivo della misurazione è di determinare una stima del valore del misurando nel modo più appropriato
- La scelta del metodo di misura, che può essere fatta dall'operatore o stabilita da una norma, è di fondamentale importanza
 - Anche dovendo operare sullo stesso tipo di misurando (ad esempio, una potenza elettrica o una temperatura), le sue specifiche caratteristiche possono imporre l'uso di un metodo ed escluderne altri
 - In una misura elettrica, un metodo può differire da un altro per le caratteristiche del circuito realizzato e per gli strumenti impiegati

Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati

- Il risultato di una misurazione (o misura) deve essere interpretato, in quanto generalmente esso si discosta dal “valore vero” del misurando, per ragioni legate al metodo e agli strumenti usati, nonché alle condizioni in cui la misura viene effettuata
- Il termine di “valore vero” deve essere considerato in senso lato, in quanto si deve ammettere che, essendo la sua determinazione comunque ottenuta da una misurazione, esso è in realtà sempre incognito
- Nella interpretazione dei risultati di una misurazione, si deve tenere presente che gli scarti rispetto al “valore vero” dipendono
 - Da errori grossolani commessi dall’operatore, per esempio, nella lettura di uno strumento o nella sua errata inserzione e così via
 - Da scarti di segno costante, che, se noti o determinabili mediante un processo logico, vengono definiti effetti sistematici
 - Da eventi casuali, quali l’interpretazione delle indicazioni di uno strumento a indice, l’effetto della temperatura, la presenza di disturbi non individuabili e così via

Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati

- Gli errori grossolani sono in generale di ampiezza tale da essere facilmente riconoscibili
- Quando si opera su un solo misurando, il rischio di errori grossolani può essere praticamente eliminato effettuando misure ripetute, ricorrendo, eventualmente, a operatori diversi
- Gli effetti sistematici, noti o determinabili, sono, generalmente, legati al metodo e agli strumenti usati e, molte volte, possono essere corretti
- Una volta ripuliti i risultati dagli eventuali errori grossolani e dagli effetti sistematici, si deve passare alla valutazione degli effetti degli eventi casuali
- Quando, nelle stesse condizioni, si ripete più volte la misurazione di una stessa grandezza, si ottengono, in generale, risultati diversi
 - Quale è il valore più attendibile del misurando?
 - Quale è il significato da dare agli scarti riscontrati?
- La risposta a tali domande si trova generalmente applicando metodi probabilistici, basati sull'uso della statistica

Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati

- La miglior stima del valore del misurando, che varia casualmente e per cui n osservazioni indipendenti x_k sono state ottenute nelle stesse condizioni di misura, è la media aritmetica X_m delle n osservazioni

$$X_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

- Il valore di X_m è tanto più attendibile, quanto maggiore è il numero delle misure effettuate
- Le singole misure scartano dalla media delle quantità $x_1 - X_m$, $x_2 - X_m$, eccetera, per effetto di fattori di influenza casuali
- Gli scarti assumono valori tanto più grandi, quanto più dispersi tra loro sono i dati originali

Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati

- Analizzando le condizioni e il processo di misura, ci si può rendere conto che le cause di aleatorietà del risultato finale di una misurazione sono diverse
 - Definizione incompleta del misurando
 - Conoscenza o misura inadeguata degli effetti delle condizioni ambientali
 - Effetti sistematici non noti nella indicazione degli strumenti analogici
 - Risoluzione finita di strumenti a indicazione discreta
 - Valori delle costanti e di altri parametri, ottenuti da fonti esterne ed usati nell'algoritmo di riduzione dei dati
 - Variazioni del misurando in ripetute osservazioni, effettuate in condizioni apparentemente identiche
 - Imperfetta correzione di effetti sistematici, legati al metodo di misura usato
- La qualità della misura sarà tanto migliore, quanto più piccoli sono tali scarti rispetto alla media
- Nasce la necessità di dare una valutazione quantitativa di questa qualità, utilizzando un criterio convenzionale

Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati

- L'incertezza di misura è un parametro, associato con il risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori che potrebbero essere ragionevolmente attribuiti al misurando
- In un rapporto di prova si dichiara, normalmente, un unico valore come stima del valore del misurando, a cui viene associata un'incertezza, opportunamente definita e calcolata
- In generale, si scriverà che il valore della grandezza da misurare X è dato dalla sua stima X_m , gravata dall'incertezza U (tale lettera è l'iniziale della parola inglese “uncertainty”, che significa per l'appunto “incertezza”)

$$X = X_m \pm U$$

- L'incertezza di misura U può anche essere espressa in forma relativa

$$\dot{U} = \frac{U}{X_m}$$

Impostazione di una Misurazione e Interpretazione dei Risultati

- Nell'incertezza del risultato di una misura possono generalmente individuarsi diversi componenti, che per comodità possono essere raggruppati in due categorie, a seconda del modo in cui l'incertezza stessa viene stimata
 - Quelli che vengono valutati applicando metodi statistici, partendo da una serie di misure ripetute (incertezza di tipo A)
 - Quelli che vengono valutati con altri mezzi (incertezza di tipo B)
- Non esiste alcuna corrispondenza tra la classificazione dei componenti nelle categorie A o B, se non quella di indicare due diversi criteri di valutazione dell'incertezza
- Il livello di accuratezza nella stima dell'incertezza e l'incertezza stessa possono variare, a seconda dello scopo e del livello della misura

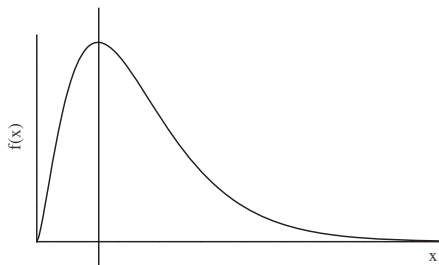
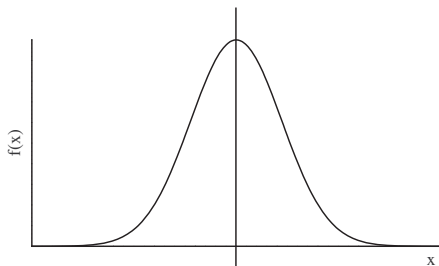
Alcune Nozioni di Statistica

- Per poter applicare i metodi statistici, necessari alla determinazione dell'incertezza di misura, è opportuno introdurre alcune definizioni
- Si definisce probabilità di un evento, il rapporto tra il numero di casi favorevoli a tale evento e il numero di casi possibili
- Più precisamente, si definisce probabilità di ottenere da un esperimento un certo risultato, definito da un certo valore y , assunto dalla variabile casuale che caratterizza l'esperimento stesso, il rapporto tra la misura dell'insieme dei risultati che forniscono il valore y e la misura dell'insieme comprendente tutti i risultati possibili relativi all'esperimento
- Se si lancia un dado da gioco, la probabilità di ottenere il numero quattro è $1/6$
- Se si lanciano due dadi, il numero quattro ha probabilità di verificarsi pari a $1/12$ (combinazioni $2 + 2$, $3 + 1$, $1 + 3$)

Alcune Nozioni di Statistica

- Se si effettua un numero di lanci ripetuti di un solo dado, ad esempio un centinaio, si constata che tutti i possibili valori (da 1 a 6) si presentano con la stessa frequenza
- Nel caso di lancio ripetuto di due dadi, i possibili valori (da 2 a 12) hanno diverse probabilità di verificarsi
- Un qualunque evento casuale è, quindi, caratterizzato da una distribuzione probabilistica, che ne determina le proprietà statistiche
- Ad una distribuzione probabilistica è sempre associata una funzione densità di probabilità, che esprima la probabilità che la variabile casuale che caratterizza l'evento assuma un determinato valore
- Se l'evento ha come variabile casuale una grandezza misurabile, che può assumere, almeno in linea teorica, tutti i valori possibili, la densità di probabilità assume andamento continuo, anziché discreto
- La funzione densità di probabilità dell'evento definito dalla variabile casuale x si indica con $f(x)$

Alcune Nozioni di Statistica



Alcune Nozioni di Statistica

- La funzione $F(x)$, detta probabilità cumulata, rappresenta la probabilità di ottenere tutti i valori inferiori o uguali a x ed è analiticamente rappresentata da

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

- Si noti che $f(x)$ tende a zero sia per $x \rightarrow \infty$, sia per $x \rightarrow -\infty$ e, quindi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

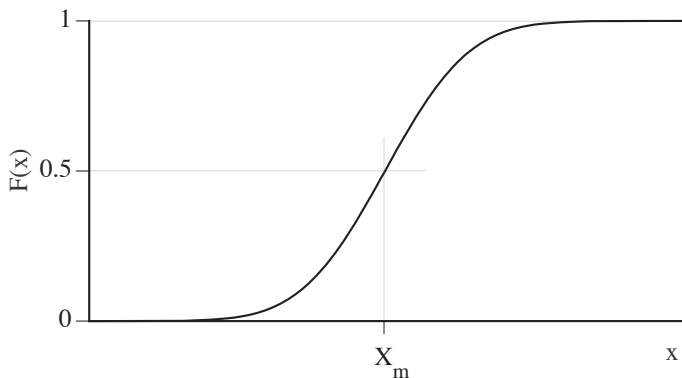
- Alternativamente, si può definire la funzione $G(x)$, che rappresenta la probabilità di ottenere tutti i valori superiori o uguali a x ed è analiticamente rappresentata da

$$G(x) = \int_x^{\infty} f(x) dx$$

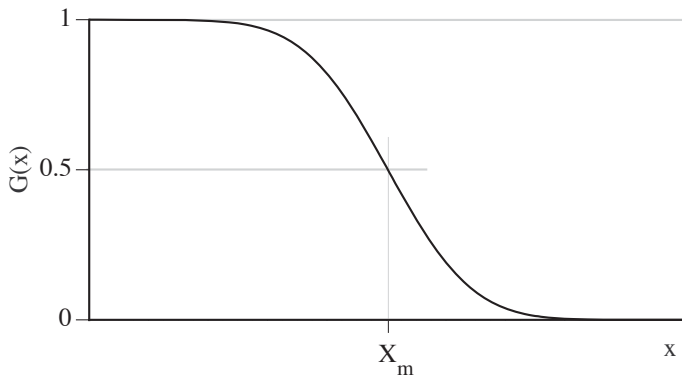
- È ovvia la relazione

$$G(x) = 1 - F(x)$$

Alcune Nozioni di Statistica

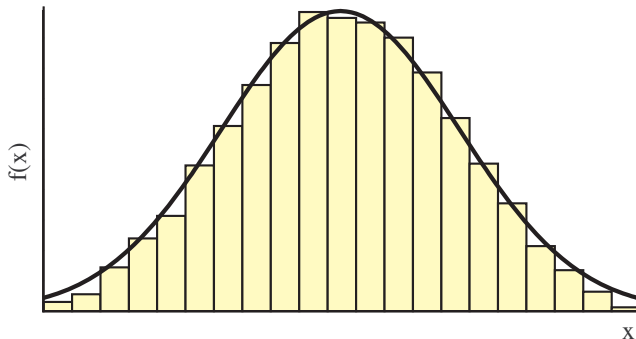


Alcune Nozioni di Statistica



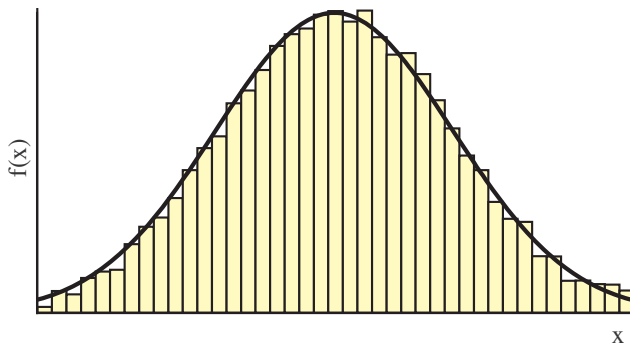
Alcune Nozioni di Statistica

- Sotto l'aspetto applicativo, si può osservare che, normalmente, si ha a disposizione un numero limitato di risultati e che la loro rappresentazione grafica può essere fatta ricorrendo ad istogrammi
- La curva reale si ottiene per interpolazione tra le altezze delle canne che costituiscono l'istogramma



Alcune Nozioni di Statistica

- Se si prende un campione più grande, l'istogramma risulta più prossimo alla distribuzione reale



Alcune Nozioni di Statistica

- Si presenta ora il problema di caratterizzare una distribuzione probabilistica con il minimo numero di parametri
- Vengono definite le seguenti grandezze
 - *Media*: rappresenta la somma delle varie osservazioni divise per il numero delle osservazioni stesse; la media μ per una certa distribuzione probabilistica viene ottenuta pesando ogni valore x con la corrispondente densità di probabilità $f(x)$

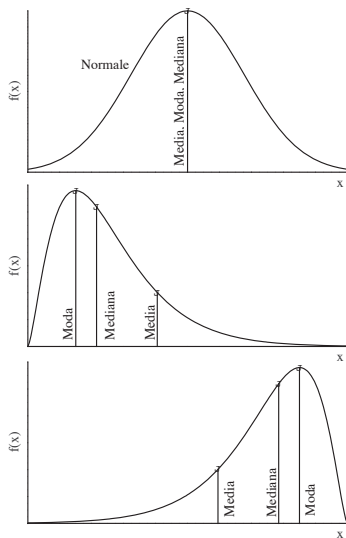
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

- *Mediana*: è definita dal valore dell'osservazione che divide in due parti uguali l'insieme ordinato delle osservazioni (se il numero delle osservazioni è pari, è la media dei due valori più vicini, se il numero è dispari, il valore dell'osservazione centrale), ovvero, il valore della variabile casuale x , per cui

$$F(x) = G(x) = 0.5$$

- *Moda*: è il valore dell'osservazione che si verifica più frequentemente

Alcune Nozioni di Statistica



Alcune Nozioni di Statistica

- Dal punto di vista pratico, avendo a disposizione un numero limitato di risultati, la media μ della distribuzione, che caratterizza la variabile casuale x , può essere stimata utilizzando la media aritmetica X_m delle osservazioni x_k

$$X_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

- Si può dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_m = \mu$$

- Un altro parametro interessante di una distribuzione probabilistica caratterizza, invece, la dispersione della distribuzione attorno al valore medio μ
- È ovvio che, quanto meno la distribuzione sarà dispersa, tanto più i risultati dell'esperimento saranno raggruppati attorno a μ

Alcune Nozioni di Statistica

- Per quantificare la dispersione si utilizza il parametro σ^2 , ottenuto pesando ogni valore di $(x - \mu)^2$ con la funzione densità di probabilità $f(x)$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

- Il parametro σ^2 è detto varianza della distribuzione
- La sua radice quadrata prende il nome di deviazione standard della distribuzione

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx}$$

- Dal punto di vista pratico, avendo a disposizione un numero limitato di risultati, la varianza σ^2 della distribuzione, che caratterizza la variabile casuale x , può essere stimata utilizzando lo scarto quadratico medio s^2 delle osservazioni x_k attorno alla media aritmetica X_m

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - X_m)^2$$

Alcune Nozioni di Statistica

- Analogamente, la deviazione standard σ della distribuzione può essere stimata usando lo scarto tipo s , definito come la radice quadrata positiva dello scarto quadratico medio

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - X_m)^2}$$

- Si può dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s^2 = \sigma^2 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} s = \sigma$$

- Quando si ha a disposizione un numero limitato di risultati, assumono particolare interesse lo scarto quadratico medio s_μ^2 e lo scarto tipo s_μ della media aritmetica X_m , dati, rispettivamente, da

$$s_\mu^2 = \frac{s^2}{n}$$

$$s_\mu = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Alcune Nozioni di Statistica

- Questi parametri sono indicativi degli scarti tra le stime X_m della media μ , ottenute da diverse sequenze di dati, appartenenti ad una stessa distribuzione probabilistica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_\mu^2 = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} s_\mu = 0$$

- Il parametro σ_μ rappresenta la deviazione standard della distribuzione probabilistica delle medie X_m e, analogamente a quanto visto per s_μ , è dato da

$$\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Risulta immediato verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_\mu = 0$$

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

- Tra le varie distribuzioni, ha un posto particolarmente rilevante la così detta distribuzione normale (o di Gauss), la cui funzione densità di probabilità è definita da

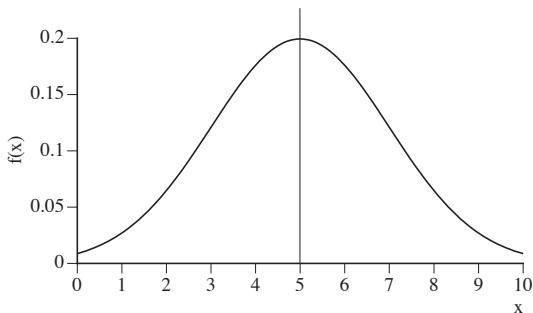
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Questa distribuzione ha valore medio μ , deviazione standard σ ed è simmetrica rispetto a μ
- Essa è caratterizzata dalle seguenti probabilità cumulate
 - $F(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.683$
 - $F(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.957$
 - $F(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.997$
- Si assume comunemente che il valore x di una variabile casuale, distribuita secondo la distribuzione normale, è, in generale, compreso nell'intervallo $\pm 3\sigma$ attorno al valore medio
- La distribuzione normale è, quindi, completamente definita da due parametri: la media e la varianza o la deviazione standard

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

- La distribuzione di probabilità in cui $\mu = 5$ e $\sigma = 2$ equivale alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$$



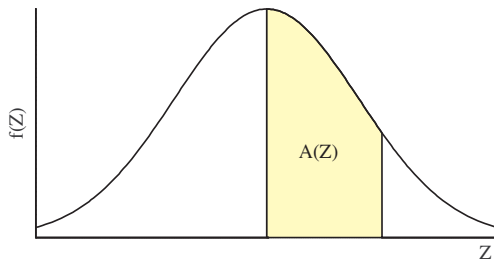
Distribuzione Normale (o Gaussiana)

- L'importanza della distribuzione normale risiede nel fatto che un notevole numero di fenomeni naturali sono normalmente distribuiti
- Si citano, ad esempio, l'altezza ed il peso degli individui, gli errori nella misura della lunghezza di un'asta metallica o di una tensione elettrica
- La complessità della espressione della densità di probabilità per la distribuzione normale ha suggerito il ricorso a tabelle in cui sono riportati parametri di validità generale
- Una variabile casuale è detta normalizzata, quando essa è stata trasformata in modo da avere media nulla e deviazione standard unitaria
- Uno dei più importanti teoremi della statistica dimostra che, se x è una variabile casuale con media μ e deviazione standard σ , allora la variabile Z presenta valore medio nullo e deviazione standard uguale a 1

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Una variabile con queste caratteristiche è detta normalizzata

Distribuzione Normale (o Gaussiana)



| Z | $A(Z)$ | Z | $A(Z)$ | Z | $A(Z)$ | Z | $A(Z)$ |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0 | 0.00000 | 1 | 0.34134 | 2 | 0.47725 | 3 | 0.49865 |
| 0.01 | 0.00399 | 1.01 | 0.34375 | 2.01 | 0.47778 | 3.01 | 0.49869 |
| 0.02 | 0.00798 | 1.02 | 0.34614 | 2.02 | 0.47831 | 3.02 | 0.49874 |
| 0.03 | 0.01197 | 1.03 | 0.34849 | 2.03 | 0.47882 | 3.03 | 0.49878 |

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

| Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.04 | 0.01595 | 1.04 | 0.35083 | 2.04 | 0.47932 | 3.04 | 0.49882 |
| 0.05 | 0.01994 | 1.05 | 0.35314 | 2.05 | 0.47982 | 3.05 | 0.49886 |
| 0.06 | 0.02392 | 1.06 | 0.35543 | 2.06 | 0.48030 | 3.06 | 0.49889 |
| 0.07 | 0.02790 | 1.07 | 0.35769 | 2.07 | 0.48077 | 3.07 | 0.49893 |
| 0.08 | 0.03188 | 1.08 | 0.35993 | 2.08 | 0.48124 | 3.08 | 0.49896 |
| 0.09 | 0.03586 | 1.09 | 0.36214 | 2.09 | 0.48169 | 3.09 | 0.49900 |
| 0.1 | 0.03983 | 1.1 | 0.36433 | 2.1 | 0.48214 | 3.1 | 0.49903 |
| 0.11 | 0.04380 | 1.11 | 0.36650 | 2.11 | 0.48257 | 3.11 | 0.49906 |
| 0.12 | 0.04776 | 1.12 | 0.36864 | 2.12 | 0.48300 | 3.12 | 0.49910 |
| 0.13 | 0.05172 | 1.13 | 0.37076 | 2.13 | 0.48341 | 3.13 | 0.49913 |
| 0.14 | 0.05567 | 1.14 | 0.37286 | 2.14 | 0.48382 | 3.14 | 0.49916 |
| 0.15 | 0.05962 | 1.15 | 0.37493 | 2.15 | 0.48422 | 3.15 | 0.49918 |
| 0.16 | 0.06356 | 1.16 | 0.37698 | 2.16 | 0.48461 | 3.16 | 0.49921 |
| 0.17 | 0.06749 | 1.17 | 0.37900 | 2.17 | 0.48500 | 3.17 | 0.49924 |

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

| Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.18 | 0.07142 | 1.18 | 0.38100 | 2.18 | 0.48537 | 3.18 | 0.49926 |
| 0.19 | 0.07535 | 1.19 | 0.38298 | 2.19 | 0.48574 | 3.19 | 0.49929 |
| 0.2 | 0.07926 | 1.2 | 0.38493 | 2.2 | 0.48610 | 3.2 | 0.49931 |
| 0.21 | 0.08317 | 1.21 | 0.38686 | 2.21 | 0.48645 | 3.21 | 0.49934 |
| 0.22 | 0.08706 | 1.22 | 0.38877 | 2.22 | 0.48679 | 3.22 | 0.49936 |
| 0.23 | 0.09095 | 1.23 | 0.39065 | 2.23 | 0.48713 | 3.23 | 0.49938 |
| 0.24 | 0.09483 | 1.24 | 0.39251 | 2.24 | 0.48745 | 3.24 | 0.49940 |
| 0.25 | 0.09871 | 1.25 | 0.39435 | 2.25 | 0.48778 | 3.25 | 0.49942 |
| 0.26 | 0.10257 | 1.26 | 0.39617 | 2.26 | 0.48809 | 3.26 | 0.49944 |
| 0.27 | 0.10642 | 1.27 | 0.39796 | 2.27 | 0.48840 | 3.27 | 0.49946 |
| 0.28 | 0.11026 | 1.28 | 0.39973 | 2.28 | 0.48870 | 3.28 | 0.49948 |
| 0.29 | 0.11409 | 1.29 | 0.40147 | 2.29 | 0.48899 | 3.29 | 0.49950 |
| 0.3 | 0.11791 | 1.3 | 0.40320 | 2.3 | 0.48928 | 3.3 | 0.49952 |
| 0.31 | 0.12172 | 1.31 | 0.40490 | 2.31 | 0.48956 | 3.31 | 0.49953 |

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

| Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.32 | 0.12552 | 1.32 | 0.40658 | 2.32 | 0.48983 | 3.32 | 0.49955 |
| 0.33 | 0.12930 | 1.33 | 0.40824 | 2.33 | 0.49010 | 3.33 | 0.49957 |
| 0.34 | 0.13307 | 1.34 | 0.40988 | 2.34 | 0.49036 | 3.34 | 0.49958 |
| 0.35 | 0.13683 | 1.35 | 0.41149 | 2.35 | 0.49061 | 3.35 | 0.49960 |
| 0.36 | 0.14058 | 1.36 | 0.41308 | 2.36 | 0.49086 | 3.36 | 0.49961 |
| 0.37 | 0.14431 | 1.37 | 0.41466 | 2.37 | 0.49111 | 3.37 | 0.49962 |
| 0.38 | 0.14803 | 1.38 | 0.41621 | 2.38 | 0.49134 | 3.38 | 0.49964 |
| 0.39 | 0.15173 | 1.39 | 0.41774 | 2.39 | 0.49158 | 3.39 | 0.49965 |
| 0.4 | 0.15542 | 1.4 | 0.41924 | 2.4 | 0.49180 | 3.4 | 0.49966 |
| 0.41 | 0.15910 | 1.41 | 0.42073 | 2.41 | 0.49202 | 3.41 | 0.49968 |
| 0.42 | 0.16276 | 1.42 | 0.42220 | 2.42 | 0.49224 | 3.42 | 0.49969 |
| 0.43 | 0.16640 | 1.43 | 0.42364 | 2.43 | 0.49245 | 3.43 | 0.49970 |
| 0.44 | 0.17003 | 1.44 | 0.42507 | 2.44 | 0.49266 | 3.44 | 0.49971 |
| 0.45 | 0.17364 | 1.45 | 0.42647 | 2.45 | 0.49286 | 3.45 | 0.49972 |

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

| Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.46 | 0.17724 | 1.46 | 0.42785 | 2.46 | 0.49305 | 3.46 | 0.49973 |
| 0.47 | 0.18082 | 1.47 | 0.42922 | 2.47 | 0.49324 | 3.47 | 0.49974 |
| 0.48 | 0.18439 | 1.48 | 0.43056 | 2.48 | 0.49343 | 3.48 | 0.49975 |
| 0.49 | 0.18793 | 1.49 | 0.43189 | 2.49 | 0.49361 | 3.49 | 0.49976 |
| 0.5 | 0.19146 | 1.5 | 0.43319 | 2.5 | 0.49379 | 3.5 | 0.49977 |
| 0.51 | 0.19497 | 1.51 | 0.43448 | 2.51 | 0.49396 | 3.51 | 0.49978 |
| 0.52 | 0.19847 | 1.52 | 0.43574 | 2.52 | 0.49413 | 3.52 | 0.49978 |
| 0.53 | 0.20194 | 1.53 | 0.43699 | 2.53 | 0.49430 | 3.53 | 0.49979 |
| 0.54 | 0.20540 | 1.54 | 0.43822 | 2.54 | 0.49446 | 3.54 | 0.49980 |
| 0.55 | 0.20884 | 1.55 | 0.43943 | 2.55 | 0.49461 | 3.55 | 0.49981 |
| 0.56 | 0.21226 | 1.56 | 0.44062 | 2.56 | 0.49477 | 3.56 | 0.49981 |
| 0.57 | 0.21566 | 1.57 | 0.44179 | 2.57 | 0.49492 | 3.57 | 0.49982 |
| 0.58 | 0.21904 | 1.58 | 0.44295 | 2.58 | 0.49506 | 3.58 | 0.49983 |
| 0.59 | 0.22240 | 1.59 | 0.44408 | 2.59 | 0.49520 | 3.59 | 0.49983 |

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

| Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.6 | 0.22575 | 1.6 | 0.44520 | 2.6 | 0.49534 | 3.6 | 0.49984 |
| 0.61 | 0.22907 | 1.61 | 0.44630 | 2.61 | 0.49547 | 3.61 | 0.49985 |
| 0.62 | 0.23237 | 1.62 | 0.44738 | 2.62 | 0.49560 | 3.62 | 0.49985 |
| 0.63 | 0.23565 | 1.63 | 0.44845 | 2.63 | 0.49573 | 3.63 | 0.49986 |
| 0.64 | 0.23891 | 1.64 | 0.44950 | 2.64 | 0.49585 | 3.64 | 0.49986 |
| 0.65 | 0.24215 | 1.65 | 0.45053 | 2.65 | 0.49598 | 3.65 | 0.49987 |
| 0.66 | 0.24537 | 1.66 | 0.45154 | 2.66 | 0.49609 | 3.66 | 0.49987 |
| 0.67 | 0.24857 | 1.67 | 0.45254 | 2.67 | 0.49621 | 3.67 | 0.49988 |
| 0.68 | 0.25175 | 1.68 | 0.45352 | 2.68 | 0.49632 | 3.68 | 0.49988 |
| 0.69 | 0.25490 | 1.69 | 0.45449 | 2.69 | 0.49643 | 3.69 | 0.49989 |
| 0.7 | 0.25804 | 1.7 | 0.45543 | 2.7 | 0.49653 | 3.7 | 0.49989 |
| 0.71 | 0.26115 | 1.71 | 0.45637 | 2.71 | 0.49664 | 3.71 | 0.49990 |
| 0.72 | 0.26424 | 1.72 | 0.45728 | 2.72 | 0.49674 | 3.72 | 0.49990 |
| 0.73 | 0.26730 | 1.73 | 0.45818 | 2.73 | 0.49683 | 3.73 | 0.49990 |

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

| Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.74 | 0.27035 | 1.74 | 0.45907 | 2.74 | 0.49693 | 3.74 | 0.49991 |
| 0.75 | 0.27337 | 1.75 | 0.45994 | 2.75 | 0.49702 | 3.75 | 0.49991 |
| 0.76 | 0.27637 | 1.76 | 0.46080 | 2.76 | 0.49711 | 3.76 | 0.49992 |
| 0.77 | 0.27935 | 1.77 | 0.46164 | 2.77 | 0.49720 | 3.77 | 0.49992 |
| 0.78 | 0.28230 | 1.78 | 0.46246 | 2.78 | 0.49728 | 3.78 | 0.49992 |
| 0.79 | 0.28524 | 1.79 | 0.46327 | 2.79 | 0.49736 | 3.79 | 0.49992 |
| 0.8 | 0.28814 | 1.8 | 0.46407 | 2.8 | 0.49744 | 3.8 | 0.49993 |
| 0.81 | 0.29103 | 1.81 | 0.46485 | 2.81 | 0.49752 | 3.81 | 0.49993 |
| 0.82 | 0.29389 | 1.82 | 0.46562 | 2.82 | 0.49760 | 3.82 | 0.49993 |
| 0.83 | 0.29673 | 1.83 | 0.46638 | 2.83 | 0.49767 | 3.83 | 0.49994 |
| 0.84 | 0.29955 | 1.84 | 0.46712 | 2.84 | 0.49774 | 3.84 | 0.49994 |
| 0.85 | 0.30234 | 1.85 | 0.46784 | 2.85 | 0.49781 | 3.85 | 0.49994 |
| 0.86 | 0.30511 | 1.86 | 0.46856 | 2.86 | 0.49788 | 3.86 | 0.49994 |
| 0.87 | 0.30785 | 1.87 | 0.46926 | 2.87 | 0.49795 | 3.87 | 0.49995 |

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

| Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) | Z | A (Z) |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0.88 | 0.31057 | 1.88 | 0.46995 | 2.88 | 0.49801 | 3.88 | 0.49995 |
| 0.89 | 0.31327 | 1.89 | 0.47062 | 2.89 | 0.49807 | 3.89 | 0.49995 |
| 0.9 | 0.31594 | 1.9 | 0.47128 | 2.9 | 0.49813 | 3.9 | 0.49995 |
| 0.91 | 0.31859 | 1.91 | 0.47193 | 2.91 | 0.49819 | 3.91 | 0.49995 |
| 0.92 | 0.32121 | 1.92 | 0.47257 | 2.92 | 0.49825 | 3.92 | 0.49996 |
| 0.93 | 0.32381 | 1.93 | 0.47320 | 2.93 | 0.49831 | 3.93 | 0.49996 |
| 0.94 | 0.32639 | 1.94 | 0.47381 | 2.94 | 0.49836 | 3.94 | 0.49996 |
| 0.95 | 0.32894 | 1.95 | 0.47441 | 2.95 | 0.49841 | 3.95 | 0.49996 |
| 0.96 | 0.33147 | 1.96 | 0.47500 | 2.96 | 0.49846 | 3.96 | 0.49996 |
| 0.97 | 0.33398 | 1.97 | 0.47558 | 2.97 | 0.49851 | 3.97 | 0.49996 |
| 0.98 | 0.33646 | 1.98 | 0.47615 | 2.98 | 0.49856 | 3.98 | 0.49997 |
| 0.99 | 0.33891 | 1.99 | 0.47670 | 2.99 | 0.49861 | 3.99 | 0.49997 |

Distribuzione di Student

- Nella pratica, per ragioni di tempo e di costo, le misurazioni presentano sempre una serie limitata di valori
- La variabile, che razionalizza esattamente i valori di serie limitate, è stata studiata da Student ed è data da

$$t = \frac{X_m - x}{s / \sqrt{n}}$$

dove X_m rappresenta la media aritmetica delle n misurazioni ed è una stima della media μ della distribuzione, mentre s è lo scarto tipo della serie di misurazioni ed è una stima della deviazione standard σ della distribuzione

- L'espressione a denominatore è lo scarto tipo della media s_μ

Distribuzione di Student

- La funzione densità di probabilità della distribuzione t di Student $f(t, \nu)$ è data da

$$f(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

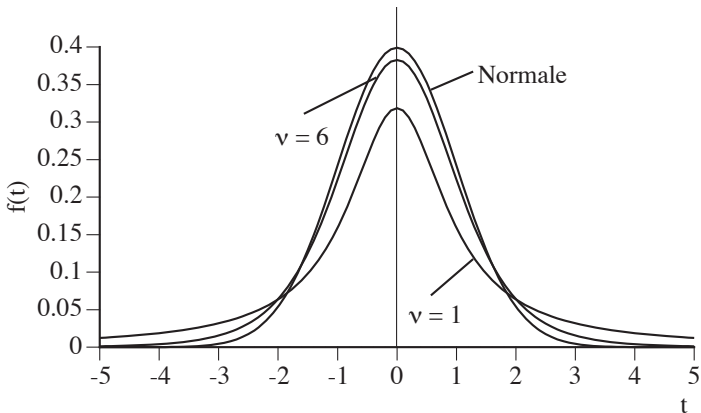
dove $-\infty < t < \infty$, $\nu > 0$ sono i gradi di libertà e

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

con $n > 0$

- La distribuzione t di Student ha andamento analogo alla distribuzione normale, ma è meno appuntita
- Per ogni valore di $\nu = n - 1$, con $n \geq 2$, esiste una curva di distribuzione della probabilità di t

Distribuzione di Student



Distribuzione di Student

| ν | Valori di t con Probabilità p | | | | | |
|-------|--|--------|--------|--------|--------|---------|
| | 68.27% | 90.00% | 95.00% | 95.45% | 99.00% | 99.73% |
| 1 | 1.840 | 6.310 | 12.710 | 13.970 | 63.660 | 235.800 |
| 2 | 1.320 | 2.920 | 4.300 | 4.530 | 9.920 | 19.210 |
| 3 | 1.200 | 2.350 | 3.180 | 3.310 | 5.840 | 9.220 |
| 4 | 1.140 | 2.130 | 2.780 | 2.870 | 4.600 | 6.620 |
| 5 | 1.110 | 2.020 | 2.570 | 2.650 | 4.030 | 5.510 |
| 6 | 1.090 | 1.940 | 2.450 | 2.520 | 3.710 | 4.900 |
| 7 | 1.080 | 1.890 | 2.360 | 2.430 | 3.500 | 4.530 |
| 8 | 1.070 | 1.860 | 2.310 | 2.370 | 3.360 | 4.280 |
| 9 | 1.060 | 1.830 | 2.260 | 2.320 | 3.250 | 4.090 |

Distribuzione di Student

| ν | Valori di t con Probabilità p | | | | | |
|-------|--|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 68.27% | 90.00% | 95.00% | 95.45% | 99.00% | 99.73% |
| 10 | 1.050 | 1.810 | 2.230 | 2.280 | 3.170 | 3.960 |
| 15 | 1.030 | 1.750 | 2.130 | 2.180 | 2.950 | 3.590 |
| 20 | 1.030 | 1.720 | 2.090 | 2.130 | 2.850 | 3.420 |
| 30 | 1.020 | 1.700 | 2.040 | 2.090 | 2.750 | 3.270 |
| 40 | 1.010 | 1.680 | 2.020 | 2.060 | 2.700 | 3.200 |
| 50 | 1.010 | 1.680 | 2.010 | 2.050 | 2.680 | 3.160 |
| | 1.000 | 1.645 | 1.960 | 2.000 | 2.576 | 3.000 |

Distribuzione Uniforme

- Un caso particolare di distribuzione probabilistica è rappresentato dalla distribuzione uniforme
- Per la distribuzione uniforme, vale

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\Delta} & \text{per } |x - \mu| \leq \Delta \\ f(x) = 0 & \text{per } |x - \mu| > \Delta \end{cases}$$

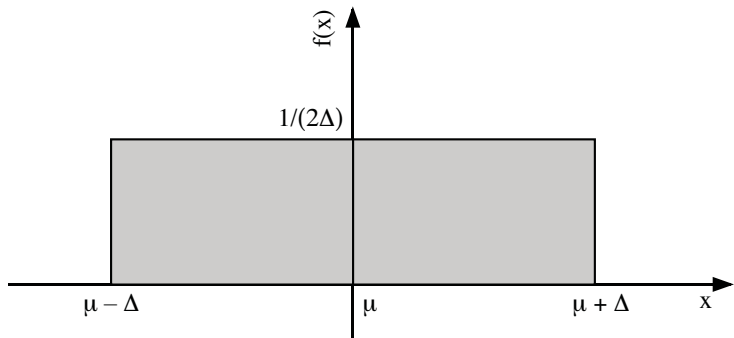
- Pertanto, la distribuzione uniforme avrà media μ e varianza pari a

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{(x - \mu)^2}{2\Delta} dx = \frac{\Delta^2}{3}$$

- La deviazione standard, quindi, sarà data da

$$\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Distribuzione Uniforme



Incertezza di Misura

- Il valore della grandezza da misurare X è dato dalla sua stima X_m , gravata dall'incertezza U

$$X = X_m \pm U$$

- L'incertezza di misura U può anche essere espressa in forma relativa

$$\dot{U} = \frac{U}{X_m}$$

- L'incertezza di misura può essere determinata in due modi
 - Incertezza di tipo A
 - Incertezza di tipo B
- La differenza fra incertezza di tipo A e incertezza di tipo B risiede solo nella procedura con cui l'incertezza stessa viene stimata, mentre il significato da attribuire all'incertezza stessa è lo stesso nei due casi

Incertezza di Misura di Tipo A

- L'incertezza di tipo A prevede la determinazione dell'incertezza in base alla interpretazione, con metodi statistici, di una serie di misure ripetute dello stesso misurando
- Per quantificare le differenze fra le diverse misure x_k e, quindi, l'incertezza di misura da associare alla singola misura x_k , si ricorre alternativamente
 - Allo scarto quadratico medio s^2 , stima della varianza σ^2 della distribuzione di probabilità di x
 - Allo scarto tipo s , stima della deviazione standard σ della distribuzione di probabilità di x
- Entrambi i parametri possono essere usati per indicare l'incertezza di misura, ma, in generale, si preferisce usare lo scarto tipo, in quanto espresso nella stessa unità di misura del misurando
- Lo scarto tipo può essere espresso in valore assoluto, in valore relativo o in valore relativo percentuale: si parlerà, allora, di scarto tipo assoluto, di scarto tipo relativo e di scarto tipo percentuale

Incertezza di Misura di Tipo A

- Ai fini dei confronti tra i risultati di serie di misure ripetute, delle quali è nota la stima più attendibile del misurando X_m , risulta utile esprimere l'incertezza di misura alternativamente tramite
 - Lo scarto quadratico medio delle medie s_μ^2 , stima della varianza della distribuzione delle medie
 - Lo scarto tipo delle medie s_μ , stima della deviazione standard della distribuzione delle medie
- Si preferisce generalmente utilizzare il parametro s_μ
- L'incertezza di misura, definita tramite il parametro s oppure il parametro s_μ , prende il nome di incertezza tipo e si indica con u

$$u(x_k) = s$$

$$u(X_m) = s_\mu = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- Nel caso in cui si consideri una distribuzione probabilistica normale, l'intervallo $\pm u$ copre il 68.3% dei casi

Incertezza di Misura di Tipo B

- La stima dell'incertezza di tipo B deve essere determinata valutando tutte le informazioni ottenibili, relative alla variabilità dei risultati e, quindi, alla loro distribuzione probabilistica
- Queste informazioni possono includere precedenti dati di misura, specifiche dei costruttori degli strumenti e dati di taratura degli stessi, oltre che dati di incertezza sui materiali in uso, riscontrabili nella manualistica
- Le modalità di determinazione dell'incertezza possono, quindi, variare a seconda delle circostanze
- In ogni caso, però, l'incertezza di tipo B prevede la conoscenza a priori della distribuzione probabilistica associata ai risultati della misurazione
- Analogamente a quanto fatto per l'incertezza di tipo A, pertanto, per quantificare l'incertezza di misura, si ricorre alternativamente
 - Alla varianza della distribuzione σ^2
 - Alla deviazione standard della distribuzione σ

Incertezza di Misura di Tipo B

- Per quantificare l'incertezza di misura, si preferisce utilizzare la deviazione standard
- Nel caso di misurazioni ripetute, in cui la miglior stima del misurando è data dalla media aritmetica delle misure X_m , l'incertezza di misura viene quantificata usando il parametro σ_μ (deviazione standard della distribuzione delle medie)
- L'incertezza di misura, definita tramite il parametro σ o il parametro σ_μ , prende il nome di incertezza tipo e si indica con u

$$u(x) = \sigma$$

$$u(X_m) = \sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Se la distribuzione è normale, l'intervallo $\pm u$ copre il 68.3% dei casi
- Nel caso in cui si utilizzi una distribuzione uniforme, la deviazione standard σ è data da $\Delta / \sqrt{3}$

Incertezza Composta

- In molti casi, le incertezze di misura, ottenute sui singoli componenti di un sistema di misura complesso, devono essere combinate tra loro, per determinare l'incertezza complessiva (incertezza composta), che grava sulla misurazione

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

- L'incertezza composta è legata alle incertezze $u(x_i)$ che gravano sulle singole quantità x_i
- L'incertezza tipo composta, espressa in valore assoluto, è data da

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u(x_i)^2}$$

- L'incertezza tipo composta, espressa in valore relativo, è data da

$$\dot{u}(y) = \frac{u(y)}{y}$$

Incertezza Composta

| Funzione | Incertezza Composta Assoluta |
|-------------------|---|
| $y = A + B$ | $u(y) = \sqrt{u(A)^2 + u(B)^2}$ |
| $y = A - B$ | $u(y) = \sqrt{u(A)^2 + u(B)^2}$ |
| $y = k \cdot A$ | $u(y) = k \cdot u(A)$ |
| $y = A \cdot B$ | $u(y) = \sqrt{B^2 u(A)^2 + A^2 u(B)^2}$ |
| $y = \frac{A}{B}$ | $u(y) = \sqrt{\frac{1}{B^2} u(A)^2 + \frac{A^2}{B^4} u(B)^2}$ |
| $y = A^n$ | $u(y) = n \cdot A^{n-1} \cdot u(A)$ |
| $y = A + B + C$ | $u(y) = \sqrt{u(A)^2 + u(B)^2 + u(C)^2}$ |

Incertezza Composta

| Funzione | Incertezza Composta Relativa |
|-------------------------|---|
| $y = A + B$ | $\dot{u}(y) = \sqrt{\frac{A^2 \dot{u}(A)^2 + B^2 \dot{u}(B)^2}{(A + B)^2}}$ |
| $y = A - B$ | $\dot{u}(y) = \sqrt{\frac{A^2 \dot{u}(A)^2 + B^2 \dot{u}(B)^2}{(A - B)^2}}$ |
| $y = k \cdot A$ | $\dot{u}(y) = \dot{u}(A)$ |
| $y = A \cdot B$ | $\dot{u}(y) = \sqrt{\dot{u}(A)^2 + \dot{u}(B)^2}$ |
| $y = \frac{A}{B}$ | $\dot{u}(y) = \sqrt{\dot{u}(A)^2 + \dot{u}(B)^2}$ |
| $y = A^n$ | $\dot{u}(y) = n \cdot \dot{u}(A)$ |
| $y = A \cdot B \cdot C$ | $\dot{u}(y) = \sqrt{\dot{u}(A)^2 + \dot{u}(B)^2 + \dot{u}(C)^2}$ |

Incertezza Composta

- $Y = A + B$: $A_m = A \pm u(A)$ e $B_m = B \pm u(B)$

$$u(A + B) = \sqrt{\left[\frac{\partial Y}{\partial A} u(A)\right]^2 + \left[\frac{\partial Y}{\partial B} u(B)\right]^2} = \sqrt{u(A)^2 + u(B)^2}$$

$$\dot{u}(A + B) = \frac{u(A + B)}{A + B} = \sqrt{\frac{A^2 \dot{u}(A)^2 + B^2 \dot{u}(B)^2}{(A + B)^2}}$$

- $Y = A \cdot B$: $A_m = A \pm u(A)$ e $B_m = B \pm u(B)$

$$u(A \cdot B) = \sqrt{\left[\frac{\partial Y}{\partial A} u(A)\right]^2 + \left[\frac{\partial Y}{\partial B} u(B)\right]^2} = \sqrt{B^2 u(A)^2 + A^2 u(B)^2}$$

$$\dot{u}(A \cdot B) = \frac{u(A \cdot B)}{A \cdot B} = \sqrt{\dot{u}(A)^2 + \dot{u}(B)^2}$$

Incertezza Composta

- Nel caso in cui $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sia la media aritmetica di n misure tutte affette da incertezza $u(x)$, ovvero

$$y = X_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

si ottiene, come previsto dall'incertezza della media

$$u(y) = u(X_m) = \frac{u(x)}{\sqrt{n}}$$

- Nel caso in cui si consideri una misurazione complessa del tipo $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e si voglia utilizzare la distribuzione t di Student, la formula di Welch-Satterthwaite permette di calcolare il numero di gradi di libertà effettivi di y

$$\nu_{eff} = \frac{u(y)^4}{\sum_i \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right]^4 / \nu_i \right\}}$$

Incertezza Estesa

- Nel campo delle misure è raccomandabile che l'incertezza estesa $U(y)$, riportata in un certificato o in un rapporto, sia ottenuta moltiplicando l'incertezza tipo composta $u(y)$ per un opportuno fattore di copertura k

$$U(y) = k \cdot u(y)$$

$$\dot{U}(y) = k \cdot \dot{u}(y)$$

- L'incertezza dichiarata definisce, così un intervallo entro il quale si può ritenere compreso con probabilità elevata il “valore vero” del misurando
- Questa probabilità prende il nome di livello di confidenza
- L'associazione dell'intervallo $\pm U$ con uno specifico livello di confidenza, e, quindi, la scelta del valore di k , richiede l'assunzione implicita del tipo di distribuzione statistica delle stime y della grandezza Y
- In campo internazionale, è stato deciso di adottare, se non diversamente prescritto, il fattore di copertura $k = 2$

Incertezza Estesa

- Se, come di solito avviene, la distribuzione può essere considerata normale (gaussiana), ciò associa i limiti dell'incertezza estesa dati, da U , a un livello di confidenza approssimativamente uguale al 95%
- Nel caso in cui si utilizzi una distribuzione normale, l'incertezza estesa $U(y)$, con un dato livello di confidenza p , si determina ricavando il valore di Z che corrisponde a $p = 2A(Z)$, secondo la relazione

$$U(y) = k \cdot u(y) = Z \cdot u(y)$$

- In questo caso, risulta, quindi, un fattore di copertura dato da $k = Z$
- L'espressione dell'incertezza estesa, utilizzando la distribuzione t di Student, è data da

$$U(y) = k \cdot u(y) = t \cdot u(y)$$

- Il valore della variabile t di Student deve essere determinato in corrispondenza a $\nu = \nu_{eff}$ gradi di libertà per misurazioni complesse o $\nu = n - 1$, nel caso di misurazioni dirette
- In questo caso, risulta, quindi, un fattore di copertura dato da $k = t$

Espressione dei Risultati

- L'incertezza estesa della misura deve essere espressa con due cifre significative
- Per esempio, $U(y) = 0.10 \text{ V}$, oppure $U(y) = 3.1 \text{ A}$, oppure $U(y) = 10 \Omega$, oppure $U(y) = 110 \text{ W}$
- Espressioni come $U(y) = 114 \text{ W}$, oppure $U(y) = 13.1 \Omega$, hanno tre cifre significative e, quindi, vanno arrotondate a $U(y) = 110 \text{ W}$, oppure $U(y) = 13 \Omega$
- Il risultato della misurazione deve poi essere espresso allineando le cifre decimali del risultato stesso con quelle dell'incertezza estesa, arrotondando o aggiungendo zeri, a seconda dei casi
- Così, per esempio, facendo riferimento ai casi precedentemente riportati, si potrà avere: $V = 102.55 \pm 0.10 \text{ V}$, oppure $I = 17.3 \pm 3.1 \text{ A}$, oppure $R = 107 \pm 10 \Omega$, oppure $P = 1030 \pm 110 \text{ W}$
- Espressioni come $P = 1035 \pm 110 \text{ W}$, oppure $R = 107.3 \pm 10 \Omega$, risultano avere troppe cifre significative nel risultato e devono essere arrotondate a $P = 1030 \pm 110 \text{ W}$, oppure $R = 107 \pm 10 \Omega$

Riferibilità delle Misure

- Gli strumenti impiegati per effettuare misurazioni nei diversi campi delle attività tecniche e tecnologiche odierne sono tarati rispetto alle corrispondenti unità di misura (volt, ohm, secondo, metro, eccetera)
- Per ridurre al minimo o perlomeno entro valori accettabili, a seconda dei diversi scopi, i possibili gradi di arbitrarietà degli apparecchi di misura che si usano, nei paesi più industrializzati esistono laboratori, ai quali è stato affidato il compito di conservare, mediante campioni, materiali o esperienze rigorosamente definite, le unità di misura legali
- Queste unità di misura corrispondono a quelle definite dal SI, entro incertezze che i laboratori nazionali curano di ridurre a valori sempre più piccoli, mediante continui lavori di ricerca metrologica
- In Italia, questi compiti sono assegnati all'Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica (INRIM)
- Per fare in modo che tutti gli apparecchi usati in un paese siano tarati in unità di misura legali, o come si dice, riferite alle unità legali, occorre che essi siano confrontati con i campioni delle unità legali

Riferibilità delle Misure

- Poiché un confronto singolo diretto comporterebbe, come facilmente immaginabile, un lavoro enorme, la riferibilità alle unità legali si attua mediante catene di confronti, di cui solo il primo anello, effettuabile di tanto in tanto dallo stesso laboratorio nazionale, è un confronto diretto
- L'organizzazione di questi confronti e, quindi, la riferibilità di qualsiasi apparecchio di misura alle unità legali è affidata, in Italia, al Servizio Italiano Taratura (SIT), che consiste in una rete di centri di taratura, dei quali viene accertata, riconosciuta e verificata la capacità metrologica in settori di misura ben definiti, ad esempio, tensioni, correnti, potenze, temperature e così via
- Il compito di verificare le capacità metrologiche dei centri di taratura è affidato agli istituti metrologici nazionali (in Italia, l'INRIM)
- I centri di taratura sono riconosciuti idonei a emettere certificati garantiti dal SIT a livello nazionale, in cui sono chiaramente specificate le incertezze di misura del centro, per le varie grandezze, rispetto alle unità di misura legali