

① INTRODUZIONE

Cos'è la Meccatronica? Ci sono molte definizioni ma la più odetta è:

"Combinazione di software ed hardware per la progettazione e l'analisi di controlli / tecniche di controllo avanzate"

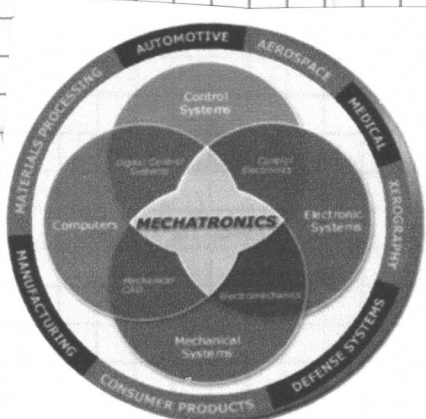
Clemson University

Non c'è la parola "Meccanica"!

In sostanza "è la filosofia di progettazione che utilizza una integrazione sinergica di meccanica, elettronica e informatica per produrre prodotti avanzati, processi e sistemi".

Da non confondersi: se arricchisco una macchina utensile con un motore per la movimentazione, invece di una manovella parlo di elettromeccanica, è un'altra cosa. Anche se rendo ^{de} manodopera automatici, dei processi domestici, ancora non parlo di meccatronica.

La meccatronica è a monte: anche l'elemento meccanico viene progettato per essere attuato, controllato da sensori.



Sistemi di controllo: sono in genere retti da equazioni differenziali lineari. Anche se in un caso descrivono il comportamento di una termocoppia, in un altro di una pompa ecc. ...

Nel settore automotive si usa una combinazione vincente di sensori e attuatori per migliorare le condizioni di guida.

Si pensi alle sospensioni:

Attive: Sono in grado di rilevare lo sfilarsi rispetto al veicolo (Pini elettronici). Immettono energia nel sistema

Semi-attive: Sono in grado di cambiare lo σ dello smorzatore. Possongli esempio, aprire o chiudere alcuni fori riservati al passaggio di fluido nello smorzatore.

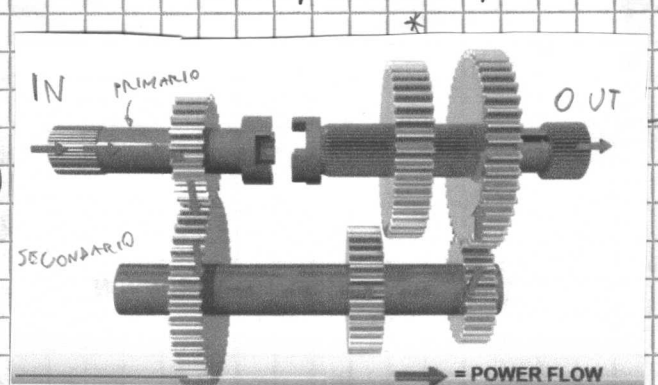
Se invece si decide di lasciare il fluido il compito di smorzare in maniera più o meno pronunciata le variazioni di velocità si usa un attuatore magneto-reologico: sono particolari fluidi che contengono magnetite infusa, che quando sottoposti a campi magnetici (con una bobina coassiale) possono passare dalla densità di un olio a quella di un solido.

CAMBIO

Per mere informazione si vuole spiegare il funzionamento del cambio automobilistico. Lo scopo è quello di ottenere, a parità di potenza, o più momento o meno momento alle ruote variando il rapporto di trasmissione.

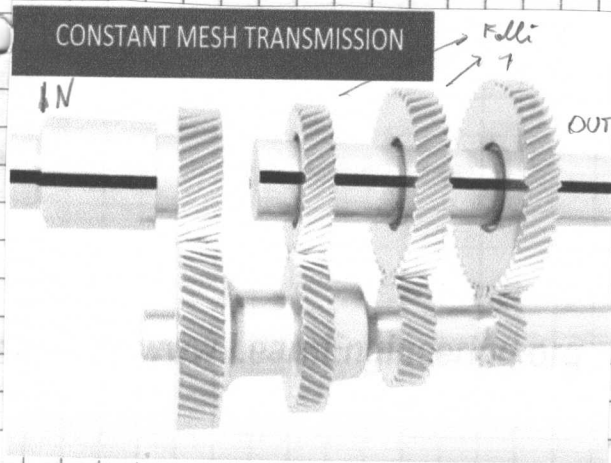
$$P = M \cdot \omega \quad \text{Se riduco } \omega \text{ ho più coppia (a } P \text{ costante)}$$

Quindi in sostanza è caratterizzato da una batteria di ruote dentate e nel caso più semplice da due alberi paralleli. I vecchi cambi avevano le ruote dentate



Se sposta le ruote * sull'albero che è scivolato di proposito) ha un altro rapporto di trasmissione

moliti ^{lungo l'asse} Tale soluzione era molto rumorosa e pericolosa per la trasmissione, a causa del moto di ingranamento.



I cambi moderni hanno le ruote tutte costantemente ingrenate tra loro (rumore costante) e tramite dispositivi, detti sincronizzatori, rendono le ruote solide (che girano folli) solidali all'albero di uscita (che altrimenti è fermo).

Quindi sul primario ho una batteria di ruote folli e una batteria di ruote solidali, ed cambio faccio solo rendere le ruote folli solidali grazie ai sincronizzatori.

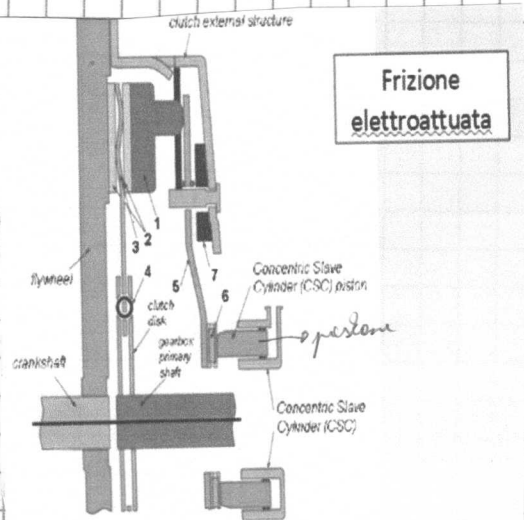
Perché i sincronizzatori? Vedere cambio pagine successive.

Onche se si vuole rendere una ruota da folle a solidale, essa e l'albero OUT hanno differenti velocità. Il sincronizzatore essendo all'interno di forma conica aiuta il manicotto (mosso dal cambio), usato per collegare una ruota dentata sull'albero e una ruota dentata collegata alla ruota folle, a trasferire la velocità in modo più graduale.

Per capire meglio vedere video "Manual Transmission, how it works?" su youtube.

FRIZIONE

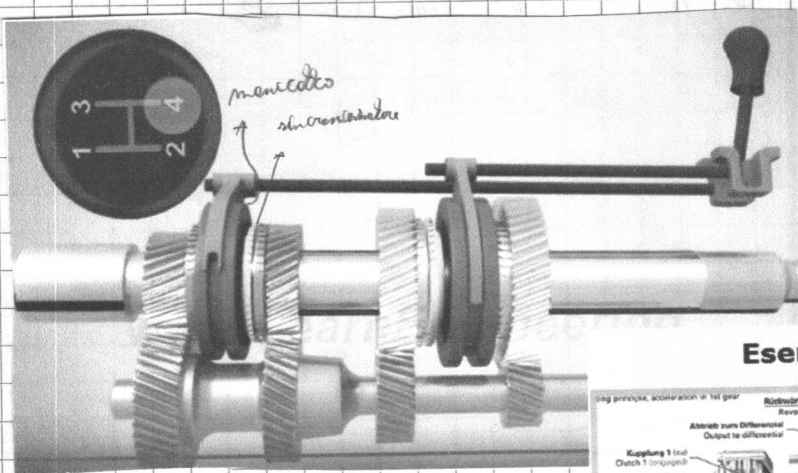
Per sganciare quest'ultima si utilizza un pistone che grazie ad una leva fulcro allontana i dischi.



Si possono aumentare le superficie d'attrito per ottenere più coppia trasmessa.

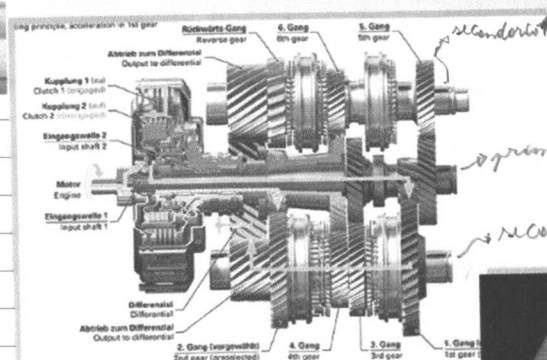
Inoltre quelle più efficienti sono a bagno d'olio: si è dimostrato che una frizione a bagno d'olio può strisciare anche 2 ore mantenendo la temperatura a livelli accettabili.

Nelle frizioni robotizzate (combi automatici) il tutto è sempre a bagno d'olio. Essi sono dotati di due ^{opuli} frizioni (mai disaccata contemporaneamente). Inoltre posso avere due secondari di modo che, essendo riservato uno alle marce pari e l'altro alle marce dispari: quando cammino in seconda su un albero delle marce dispari ho già innestato la terza (l'altro era fermo perché la sua frizione era disaccata) così, quando viene richiesto la terza, il controllore fa solo un gioco di frizioni (stacca il motore, poi stacca il secondario delle marce pari e stacca quello delle marce dispari). Quindi non ho bisogno di sincronizzatori.



dentro
Sotto il manicotto scorrevole vi è calata
una ruota dentata solidale all'albero
ruota dentata girevole all'esterno
del manicotto

Esempi di trasmissione robotizzata



I cambi robotizzati
"doppia frizione"
(o dual-clutch)



② MODELLI DI SISTEMI

In genere, nella mecatronica, partendo sistemi meccanici già consolidati (si pensi l'auto) e cerco di progettare sistemi di automazione che possano aiutare a migliorarne il funzionamento.

Questo ha dei limiti: alle azioni umane sostituisco degli attuatori, ma mai mi sognerei di rendere la frizione automatica (ad esempio) nel senso di lasciar scegliere alla macchina quando disinnestarlo. Per questo ho bisogno di un controllore, che usufruendo di sensori possa rendersi intelligente.

Segnali: Connessioni, cavi, che conducono le informazioni da un blocco all'altro.

Ad esempio la centralina ^{o controllore} può essere output per un sensore ma input per un attuttore, ma il segnale è quello che collega i due componenti in entrambi i casi.

Essi sono proprio le connessioni dei blocchetti simulink!

Ogni blocchetto adoperare in un determinato modo già programmato. Niente mi impedirebbe di scrivere le linee di codice in Matlab! Simulink presenta una interfaccia con un livello di astrazione più alto.

Inoltre scrivere il codice per trovare le equazioni da integrare, implica che devo conoscere molti metodi di integrazione e modelli matematici. Queste cose il simulink invece le fa da solo!

Ma vediamo

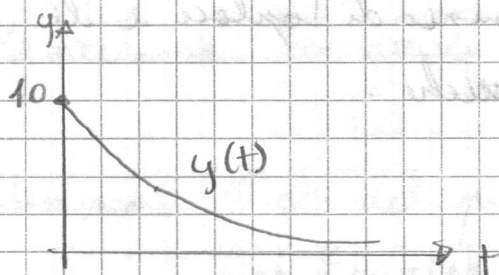
$$y_0 = y(0) = C e^{a \cdot 0} = C = y_0$$

$$y(t) = y_0 e^{-at}$$

Integrale generale

che possiamo particolareggiare con questa condizione iniziale (ad esempio)

Supponiamo $y_0 = 10$ e $a = 1$



Fingiamo di non sapere questa soluzione e possiamo il METODO NUMERICO.

SOLUZIONE PER VIA NUMERICA

1. METODO DI EULERO (o delle tangenti)

* Il trucco è di confondere la derivata con il rapporto incrementale.

Cosa si fa: si sceglie un passo d'integrazione, un intervallo (Δt) in cui decide di ignorare cosa fa questa funzione però agli estremi di questo passo ha due punti dove sa quanto vale la funzione. Sto discretizzando il segnale nel dominio del tempo (più il passo è piccolo meno è discreto il segnale).

In questo metodo il passo è fisso → a passo fisso è anche forward, in avanti, non procede indietro.

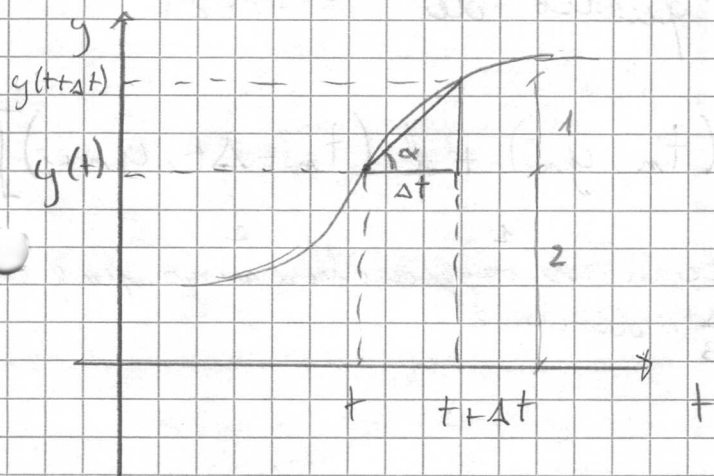
$$* \quad y'(t) \approx \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \quad \text{Derivate} *$$

Nediamo a cosa è uguale il passo successivo

$$y(t+\Delta t) = \underbrace{\dot{y}(t) \Delta t}_1 + \underbrace{y(t)}_2$$

Ora è chiaro perché si chiama metodo delle tangenti:

Prendiamo il nuovo punto $y(t+\Delta t)$ a partire da $y(t)$. In che modo?
Sommando due contributi 1 e 2 (immaginando di conoscere la tangente $\dot{y}(t)$). Vediamolo graficamente



$$\dot{y}(t) = \tan \alpha$$

cateto triangolo

$$1 = \Delta t \cdot \tan \alpha$$

IMP #

Ma dobbiamo immaginare di conoscere $\dot{y}(t)$ ma come lo so?

Esempio equazione di primo: $y'(t) + a y = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow y' = -a y$$

Interrogo ed ottengo da y la moltiplico per $-a$ ed ho la derivata. #

Formule di Eulero generali:

$$\left[y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n) \right]$$

È scritto un po' strano ma raccogliendo otteniamo *

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y_n) = y'$$

$$y_1 + a_1 y(t_1 + a_2 t) = 0$$

$f(t, y)$ #

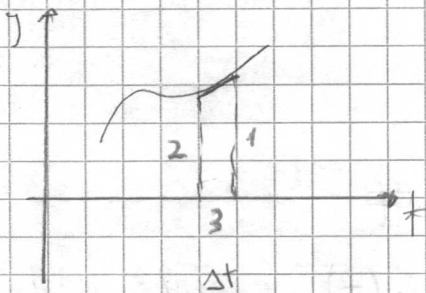
Ci sono metodi Backward (all'indietro) dove si usano processi iterativi

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_{n+1}, y_n)$$

Costruisco il termine successivo sommando all' y_n una funzione valutata allo stesso passo del termine successivo. Siccome lo devo fare per tutti i passi, questo si tradurrà in un processo iterativo.

Altro metodo backward è quello dei TRAPEZI

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$



non è altro che base maggiore + base minore per l'altrezza (Δt) diviso 2

Let's assume that the system is in a state ψ at time $t=0$.

($\psi = \sum c_n \phi_n$) where ϕ_n are the eigenfunctions of the Hamiltonian H .

Then the time evolution of the state is given by:

$$\psi(t) = \sum c_n \phi_n e^{-i E_n t / \hbar}$$

$$= \left(\sum c_n \frac{e^{-i E_n t / \hbar}}{E_n} \right) \left(\sum \phi_n E_n \right) = \sum c_n \phi_n$$

$$\left(\left(\sum c_n \frac{e^{-i E_n t / \hbar}}{E_n} \right) \left(\sum \phi_n E_n \right) \right) \left(\sum \phi_n E_n \right) =$$

which is the same as the initial state ψ .

($\psi = \sum c_n \phi_n$) where ϕ_n are the eigenfunctions of the Hamiltonian H .

$$\left(\sum c_n \frac{e^{-i E_n t / \hbar}}{E_n} \right) \left(\sum \phi_n E_n \right) = \sum c_n \phi_n$$

which is the same as the initial state ψ .

$$\left(\sum c_n \frac{e^{-i E_n t / \hbar}}{E_n} \right) \left(\sum \phi_n E_n \right) = \sum c_n \phi_n$$

which is the same as the initial state ψ .

$$\left(\sum c_n \frac{e^{-i E_n t / \hbar}}{E_n} \right) \left(\sum \phi_n E_n \right) = \sum c_n \phi_n$$

$$\left[\sum c_n \frac{e^{-i E_n t / \hbar}}{E_n} \right] \left(\sum \phi_n E_n \right) = \sum c_n \phi_n$$

which is the same as the initial state ψ .

Uno dei metodi forward più importanti è il

RUNGE - KUTTA (si mette in l'ODES)
(runge)

Partiamo dal metodo del II ordine RK2

$$\tilde{y} = y_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, y_n)$$

Punto di riferimento a
mezzo passo ($\frac{\Delta t}{2}$) in
avanti

Passo intero

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \tilde{y}\right) = \rightarrow \text{sostituisco } \tilde{y}$$
$$= y_n + \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

passo unificato

È un Euler semplificato di un passo intermedio

RK4 ha quattro passi intermedi (4 termini $k_1, k_2, \dots$)

$$K_1 = f(t_n, y_n)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + K_1 \frac{\Delta t}{2}\right)$$

In coseno

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + K_2 \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$K_4 = f\left(t_n + \Delta t, y_n + K_3 \Delta t\right)$$

Ogni K usa informazioni
dei termini precedenti

finale

$$\left[y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \right]$$

Se più peso ai termini centrali che sono moltiplicati per 2

③ ANALISI CINEMATICA DEI MECCANISMI

Cos'è un meccanismo?

Mecchane: trasforma un tipo di energia in un'altra forma (utilizzatrici, operatrici ecc...)

Meccanismo: trasforma energia meccanica in energia meccanica trasformando solo i parametri del moto. (SISO: single input, single output)

Lo studio si basa sull'identificazione di tre cose: posizione $\rightarrow$ velocità $\rightarrow$ accelerazione.

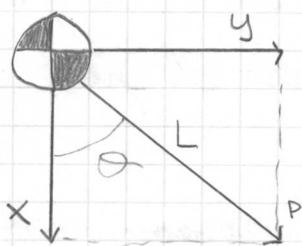
Passaggio progettuale e quello sopra è la determinazione dei GRADI DI LIBERTÀ.

Praticamente gradi di libertà significa numero di coordinate indipendenti, ossia il numero di coordinate che esistono e caratterizzano le posizioni del meccanismo in ogni istante:

$$\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Devo assegnarne n per definire la posizione in maniera univoca. Se ne assegno $n-1$ non ho bloccato il meccanismo.

Devo stare attento se so scelgo $M > n$ parametri per descrivere il problema, ^{alcuni di} questi sono dipendenti tra loro (combinazioni lineari). Esempio:



Se scelgo x, y come sist. di riferimento sembra che ho 2 gradi di libertà ma ne ho solo 1 perché x e y sono legati. Allora scelgo spesso θ come coordinata

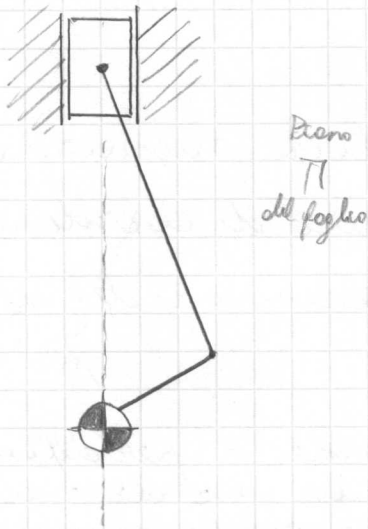
x e y sono legati $\rightarrow x^2 + y^2 = L^2$ ed essendo l'asta rigida L è costante.

Quindi siamo attenti e non assegnarne $n+1$ per non complicarci la vita ma nemmeno $n-1$ perché non sono sufficienti.

MECCANISMI

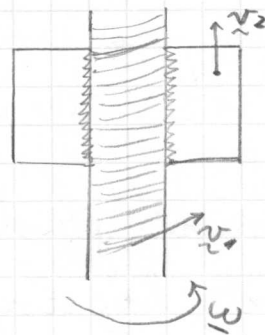
PIANO

Tutti i punti di quel meccanismo hanno vettore velocità parallelo ad un fissato piano (Onde un oggetto 3D quindi può essere piano). Esempio pistone e biella.



SPAZIALE

Non tutti i punti di quel meccanismo hanno vettore velocità parallelo ad uno stesso piano. Esempio vite - madre-vite



CALCOLO DEL NUMERO DI GRADI DI LIBERTA (DOF: Degrees of freedom)

Nel calcolo dei GDL non devo guardare i singoli componenti, perché magari me ne trovo di più, ma devo stare attento ai vincoli.

Ad esempio nel pistone-cilindro ho 3 gradi di libertà in movimento ma non mi metto solidale a nessuno, il resto di ref. è fisso sul basamento.

Come iniziare: determinare il

= numero

di vincoli :

In che modo i vincoli impediscono il moto relativo tra i membri e quali moti lasciano liberi. Incestro: 0 GDL.

di membri :

i membri sono i mettonconi, i vincoli sono il legante.

Vincoli = coppie cinematiche: chiamati così perché accoppiano cinematicamente due membri.

Le coppie cinematiche si dicono di classe C_K

dove C è il numero di coppie

ovvero K è il numero di moti permessi = non impediti.

Esempi :

Un corpo rigido nello spazio ha 6 GDL, quindi se ho m membri, ho in totale $6 \cdot m$ GDL

Pero consideriamo che ognuno è vincolato all'altro

Un corpo rigido nel piano ha 3 GDL. Quindi ho in totale $3 \cdot m$ GDL

Tuttavia noi considereremo il telaio in moto ma

nel nostro sist. di riferimento sarà fisso $\rightarrow$ sottraiamo

un membro ($m-1$) che è il telaio solido del nostro sistema di riferimento.

FORMULA DI GRÜBLER

$$n = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

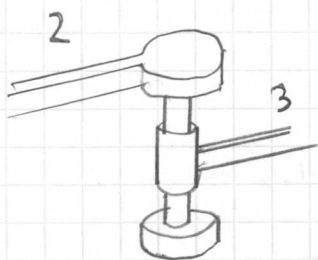
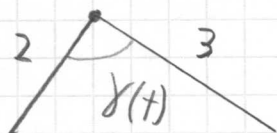
$2 \cdot C_1$ perché C_1 ne consente 1 $\rightarrow$ ne impedisce 2 (nel piano)

C_2 sono più deboli, ne consentono 2

COPPIE CINEMATICHE PIANE

- Coppia rotoidale (al massimo cerniera piana) R ^{simbolo}

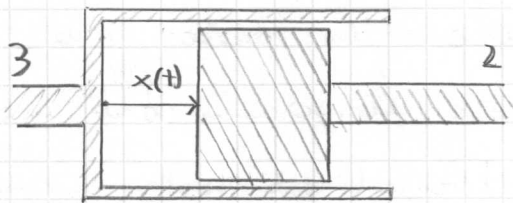
Permette esclusivamente il moto di rotazione. Si indica con un puntino. Diamo i nomi 2 e 3 perché l'1 lo riserviamo al telaio. Ciò che conta è l'angolo relativo.



Teniamo sempre a mente che la schematizzazione è diversa dal tipo di reale costruttivo. (seconda figura)
Quindi facciamo sempre delle approssimazioni: 2 e 3 molto vicini verticalmente, asse di rotaz. coincidente (niente giochi), niente attriti ecc.... È di classe C_1 .

- Coppia prismatica

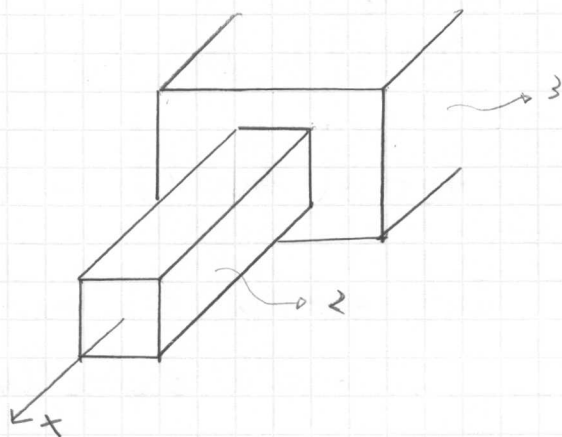
Vi è un membro che fa da guida ad un altro.



È sempre di classe C_1
Le coordinate potrebbero essere $x(t)$

Questa invece la vediamo costruttivamente.

Prismatica perché possiamo vederla come due prismi uno dentro l'altro (non può ruotare se le caviglie sono prismatiche)



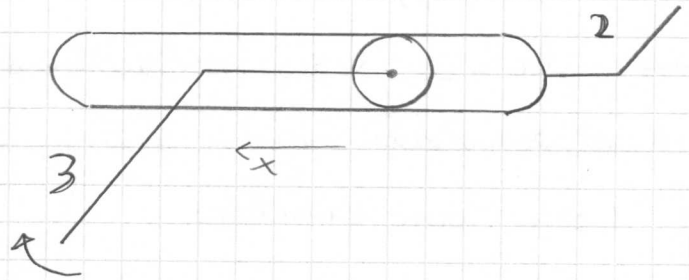
• (AMMA PIANA (COPPIA)

C_a

Da non confondere con le cemme delle valvole, da sola essa non è una coppia; valvola + cemma costituiscono invece la coppia cemma piena.

È la collaborazione di un moto di traslazione e rotazione.

A destra vi è un'isola con un disco all'interno (con diametro uguale allo spessore dell'isola) che può ruotare



e traslare (rispetto ad un asse normale all'asse x)

lungo x. Quindi è di classe C₂.

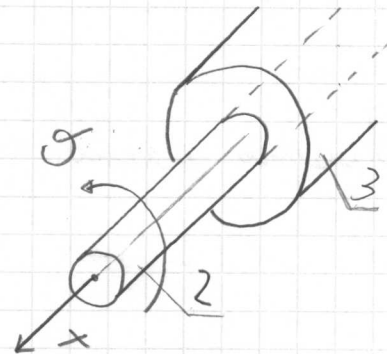
• Coppia cilindrica

C

È imparentata alla coppia cemma piena. Classe C₂.

Le asse di rotazione e di traslazione sono coincidenti. Motore

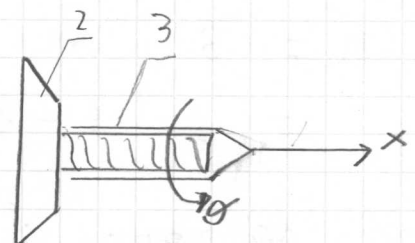
che non è una coppia piena!



• Coppia elicoidale S (screw)

Classe C₁. Prevede l'orientamento x e la rotazione θ tra loro accoppiati da una relazione.

Le coordinate lagrangiane è x o θ.



Le orientamento è:

$$x = \frac{\theta p}{2\pi} \quad \text{per } p \text{ passo} \quad \text{2 Ruota e 3 orientate}$$

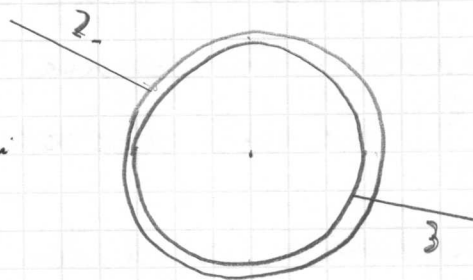
• Coppie sferiche

G (globular)

È una coppia con punto fisso; è una sfera piena in una sfera cava. Il vincolo è che le sfere hanno centri coincidenti.

3 moti relativi possibili sono 3 rotazioni (intorno a x, y, z) e impedisco 3 traslazioni

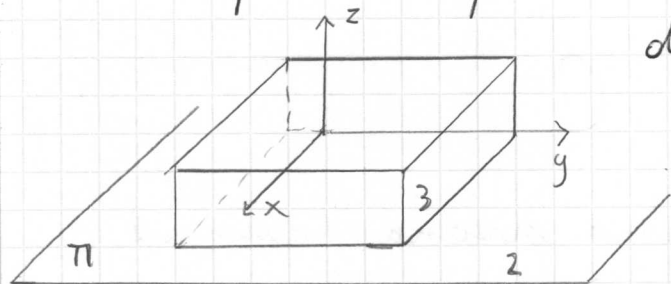
→ Classe C_3 . Costituitivamente è irriducibile come a destra. Serve dello spazio per far entrare 3! Come un combac



• Coppie piane

F (flat)

Il prisma può muoversi sul piano, realizzando due traslazioni (x, y) e una rotazione (intorno a z). L'asse z , di rotazione è normale rispetto a quelli di traslazione. Quindi → Classe C_3



Vediamo quindi di effettuare il:

CALCOLO DEI GDL DI ALCUNI MECCANISMI

• Meccanismo di spinta rotativa

33

$$n = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

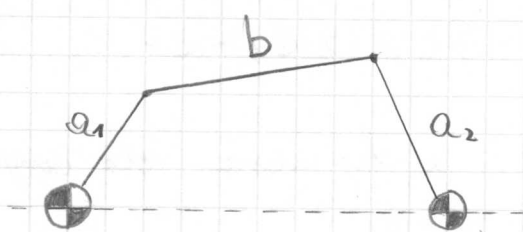
delego solo C_1

$$= 3(4-1) - 2 \cdot 4 = 1$$

Dove vi sono 4 membri; biella, manovella, pistone cilindro (biella e manovella) e 4 coppie cinematiche (3 rotoidali e 1 prismatica).

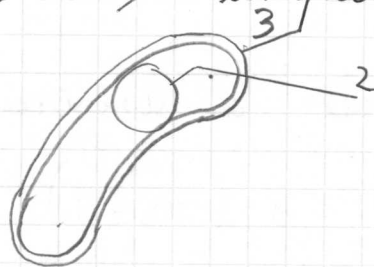
Allo stesso risultato si arriva per il:

• Quadrilatero articolato



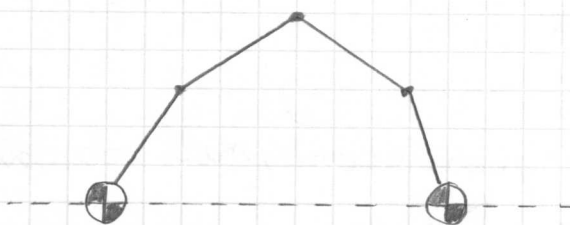
È formato da due aste (a_1 e a_2) e una biella (b). Le formule di Grubler è identica al pistone.

Perché si usano simboli diversi per "cerniera piano e coppia rotoidale"? Perché la cerniera è fissa sul telaio, così capiamo univocamente dove è il telaio. Il tratteggio non è casuale, è un punto e a un potenziale preciso ("terreno").



Stiamo attenti a distinguere i vari meccanismi da varie brachette a partire da meccanismo. Quello a destra è ancora una cerniera piano.

• Pentoltero

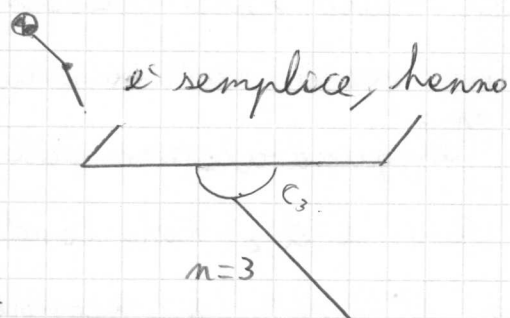


ha un'asta in più ma anche una coppia rotoidale in più quindi:

$$n = 3(5 - 1) - 2 \cdot 5 = 2$$

• Pendolo sferico

Per il pendolo e doppio pendolo rispettivamente $n=1$ e $n=2$. Mentre per il pendolo sferico (fissato al soffitto con coppia sferica). Non ho elementi per definirlo perché la coppia sferica ha classe C_3 .



Si introduce allora una equazione per un meccanismo spaziale o sia non piano. Le posso chiamare:

EQUAZIONE DI STRUTTURA

$$n = 6(m-1) - 5C_1 - 4C_2 - 3C_3 - 2C_4 - C_5$$

Per il pendolo $m = 2$ (asta e teleso) e ho una sola coppia di classe C_3 : $n = 6(2-1) - 3 \cdot 1 = 3$

E se non so a priori se il meccanismo è piano? O ingenerale?

FORMULA DI KUTZBACH

Le porte a sinistra non cambia (Provando a sostituire) ecco le formule precedenti

$$n = \begin{cases} \text{PIANO} & 3(m-1) - \sum_{j=1}^2 (3-j)C_j \\ \text{SPAZIO} & 6(m-1) - \sum_{j=1}^5 (6-j)C_j \end{cases}$$

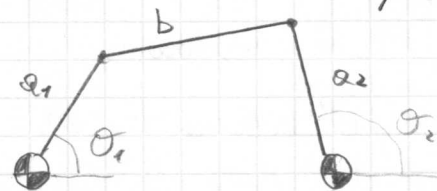
ANALISI DI MOBILITA'

Permette di capire quali sono le posizioni ^{che} nell'articolazione del meccanismo, verranno occupate. Prendiamo come esempio il quadrilatero articolato (Nel software si fa in modo che il moto lasci tracce del passaggio di un elemento così da capire che spazi, volumi occuperà il meccanismo).

Nel quadrilatero articolato chiamiamo aste a_1 e a_2 sono candidate ad essere manovella

o bilanciere a seconda che possono realizzare o meno rotazioni complete.

Non è scontato perché potrebbe essere che le aste si impuntano e raggiungono il vincolo di rigidità. Noi considereremo:

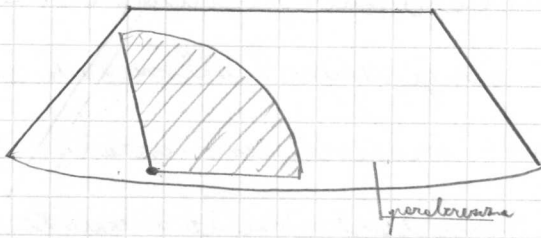
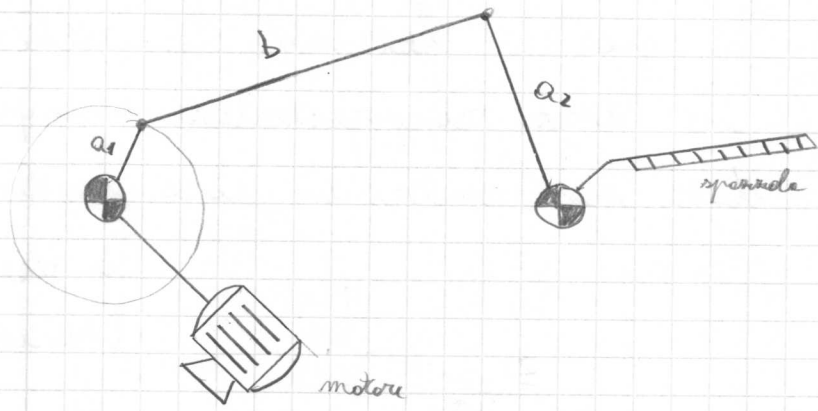


$$a_1 \rightarrow \text{manovella} \longleftrightarrow \theta_1 \in [0, 2\pi]$$

$$a_2 \rightarrow \text{bilanciere} \longleftrightarrow \theta_2 \in [0, \pi]$$

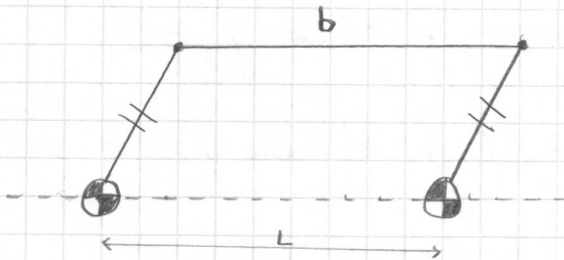
Per avere un esempio fisico si pensi al meccanismo del tergicristallo dell'auto.

La spazzola è collegata al bilanciere, il tutto viene posizionato "ad arte" sul parabrezza. Ad arte perché viene fatta una attenta analisi degli spazi.



L'area spazzata è quella propria. Quella è l'analisi di mobilità.
Il motore è con asse normale al foglio ma sopra l'elabiamo rappresentato così.

• Sistema manovella - manovella (PARALLELOGRAMMA ARTICOLATO)



Occorre se le manovelle hanno la stessa lunghezza: entrambe le aste (anche per la definizione di manovella)

spazzano angoli di 360° ma la biella rimane orizzontale!

In generale per il quadrilatero articolato vale la:

FORMULA DI GRASHOF

$$s + l \leq a + b \Rightarrow \exists \text{ manovella (almeno 1)}$$

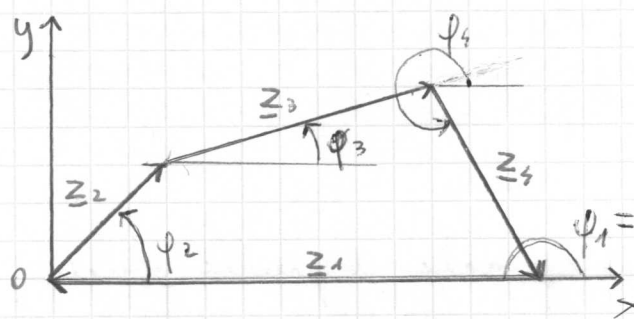
s = short, lato più corto l = long, lato più lungo

a e b sono i lati rimanenti. Allora perché sono 2? C'è anche il teleio! s potrebbe essere anche la distanza tra le cerniere! (Sopra l'ho chiamata L). Se no non è zero, ho bilanciere - bilanciere. Il viceversa non vale ($ho \Rightarrow non \Leftarrow$)

ANALISI DI POSIZIONE



Si parte facendo lo schema cinematico: non è altro che una rappresentazione semplificata (aste come linee ecc...) dove non entra in gioco la dinamica (bilanciamento, forze d'inerzia ecc...)



Poi viene introdotto un sist. di riferimento (sicuramente sul telaio) dove è più comodo fino ad avere il poligono di chiusura. Chiusura perché è indipendente dal fatto che il meccanismo è chiuso o meno. perché si collega sempre l'ultimo punto con il primo.

Perché mediante vettori orientati nella maniera come sopra ($\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3, \underline{z}_4$) si realizza un sistema di vettori a risultante nullo e questo porta a trovare una equazione generale per lo studio, estremamente compatta:

$$\begin{cases} z_1 \cos \varphi_1 + z_2 \cos \varphi_2 + z_3 \cos \varphi_3 + z_4 \cos \varphi_4 = 0 \\ z_1 \sin \varphi_1 + z_2 \sin \varphi_2 + z_3 \sin \varphi_3 + z_4 \sin \varphi_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^N \underline{z}_k = \underline{0}$$

EQUAZIONE DI LOOP (vettoriale)

Si può dire anche equazioni perché ha più componenti scalari come esemplificato sopra.

Nel caso di sopra vediamo come è semplice la forma. Scelgo come coordinate di configurazione $\underline{q} = \{\varphi_2\}$ (infatti ho $n=1$ GDL per quadrilatero) ovviamente $|\underline{z}_k| = \text{cost}$ perché aste rigide, e non potrei scegliere come $\underline{q}$, φ_4 perché costante e pari a π .

Devo capire se il sistema sopra ammette soluzioni: z_1, z_2, z_3, z_4 sono scalari costanti, quindi guardiamo le φ (coseni e seni).

Sostituiamo $\varphi_1 = \pi$

$$\begin{cases} Z_1 \cdot (-1) + Z_2 \cos \varphi_2 + Z_3 \cos \varphi_3 + Z_4 \cos \varphi_4 = 0 \\ 0 + Z_2 \sin \varphi_2 + Z_3 \sin \varphi_3 + Z_4 \sin \varphi_4 = 0 \end{cases}$$

φ_2 è la mia coordinata lagrangiana quindi ho due incognite (φ_3 e φ_4). Ma ho due incognite in due equazioni quindi una soluzione c'è. Il problema è che il sistema non è lineare (ho sin e cos, non posso sostituire) e niente mi può aiutare.

È un problema algebrico indeterminato $\rightarrow$ si ricorre a metodi numerici.

ANALISI DI VELOCITÀ:

Si fa derivando rispetto al tempo la prima e la seconda equazione. Siamo fortunati che le Z sono costanti, il tempo è in $\rightarrow \varphi(t)$

$$\begin{cases} -Z_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - Z_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - Z_4 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4 = 0 \\ Z_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + Z_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3 + Z_4 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4 = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo problema, oltre alla coordinata lagrangiana φ_2 devo assegnare anche la velocità $\dot{\varphi}_2$, la sua derivata.

Assegno istante per istante: $\underline{q}, \dot{\underline{q}}$

Chiamiamo il vettore delle nostre coordinate lagrangiane $\underline{q}$ (vettore se $n^{abdl} > 1$) e quello delle incognite $\underline{\varphi}$. Nel nostro caso:

$$\underline{q} = q = \varphi_2 \quad \text{e} \quad \underline{\varphi} = \{\varphi_3; \varphi_4\}$$

Allora risolvere il sistema di sopra significa trovare:

$$f(\underline{q}; \underline{\varphi}) = 0$$

Con $\underline{q}$ e $\dot{\underline{q}}$ assegnate

ANALISI
DI POSIZ

Quando andiamo a derivare (analisi di velocità / secondo sistema) :

$$\frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = 0$$

Dobbiamo risolvere questa

queste deve essere una matrice quadrata (nel piano) due equazioni esistono nel caso piano. Nel pentolario ho $n=$ ma se ho da risolvere precedentemente le incognite restano sempre 2.

Rappresentiamolo in maniera compatta, forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -z_2 \sin \varphi_2 \\ z_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} -z_3 \sin \varphi_3 & -z_4 \sin \varphi_4 \\ z_3 \cos \varphi_3 & z_4 \cos \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} \quad \underline{\dot{q}} \quad + \quad \underline{\underline{A}} \quad \underline{\dot{\varphi}} = \underline{0}$$

Quindi ho:

$$\underline{\underline{B}} \dot{q} + \underline{\underline{A}} \dot{\varphi} = 0$$

Derivando per $\underline{\underline{A}}$ e lo porto a destra

$$\dot{\varphi} = - \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \dot{q}$$

ho reso lineare il problema dell'analisi di velocità *

$\underline{\underline{A}}$ è delle dimensioni $n \times m$ dove n è il numero di incognite e m il numero di equazioni (2 nel piano)

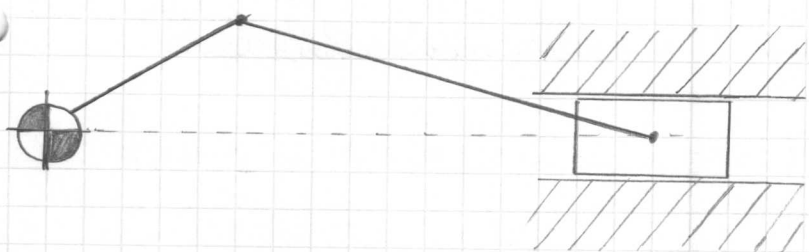
Se come in genere (per essere risolvibile) $n=m$ ovvero matrice quadrata 2×2 nel piano e 3×3 nello spazio.

Perché l'equazione * è lineare?

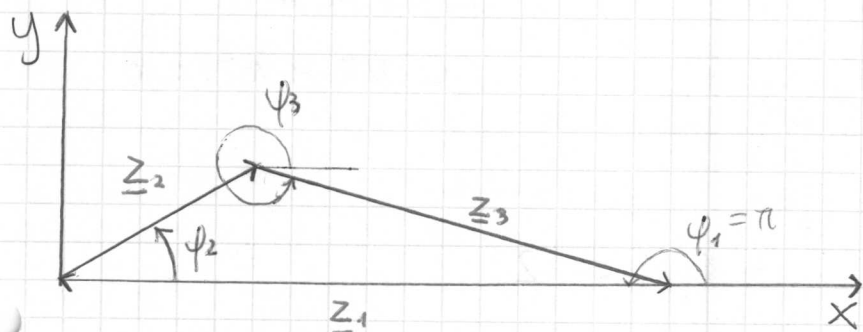
Perché dall'analisi di posizione si può solo la relazione tra coordinate lagrangiane e le due incognite.

Quindi posizione per posizione la coppia $\dot{\varphi}$ la trovo tramite inversione di $\underline{\underline{A}}$ e moltiplicazione per $\underline{\underline{B}}$

APPLICAZIONE A MANOVELLISMO DI SPINTA ROTATIVO:



SCHEMA
CINEMATICO



POLIGONO DI
CHIUSURA

$$\begin{cases} -z_1 + z_2 \cos \varphi_2 + z_3 \cos \varphi_3 = 0 \\ 0 + z_2 \sin \varphi_2 + z_3 \sin \varphi_3 = 0 \end{cases}$$

ANALISI
DI POSIZIONE

Si nota che $|z_1|$ non è costante come prima. Infatti ora:

$$\underline{q} = \{ \varphi_2 \} \quad \text{e} \quad \underline{\varphi} = \{ \varphi_3, z_1 \}$$

Le costanti sono: $z_2, z_3, \varphi_1 = \pi$; le variabili: $\varphi_2 \rightarrow \varphi_3, z_1$ ^{$\underline{q}$ la scelgo}

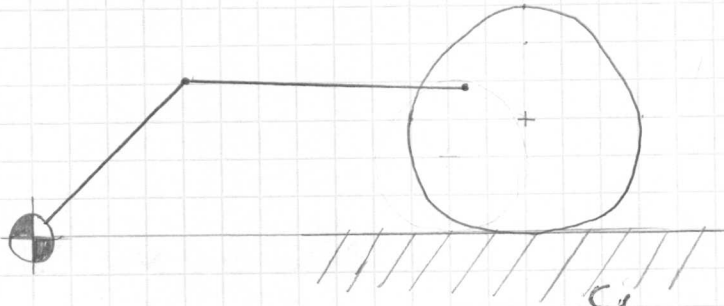
$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_3 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_3 \sin \varphi_3 & -1 \\ z_3 \cos \varphi_3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -z_2 \sin \varphi_2 \\ z_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2$$

ANALISI
DI VELOCITÀ

È uscita da $\dot{\underline{\varphi}} = -\underline{A}^{-1} \underline{B} \dot{q}$. Motore che la matrice $\underline{A}$ secondo $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ ha come 1 termine la derivata della prima eq. dell'analisi di posiz. rispetto alla prima variabile φ_3 e così via...

Il tutto è un conteggio perché ad esempio $\dot{\varphi}_3$, qui trovato semplicemente, si dovrebbe calcolare analiticamente sapendo il centro di istantanea rotazione ecc... ($\dot{\varphi}_3$ è la velocità angolare della biella)

• APPLICAZIONE A SISTEMA CAMMA PIANA

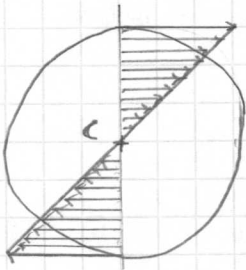


SCHEMA
CINEMATICO

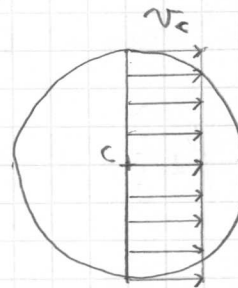
$$n = 3(4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2$$

Dobbiamo stare attenti perché il disco non è collegato all'asse nel suo centro e, inoltre, vi è un vincolo che sfugge a GRUBLER, e succede spesso nella camma piana:

VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO: viene anche detto "equivalenza cinematica della coppia camma piana". Ho due estremi:



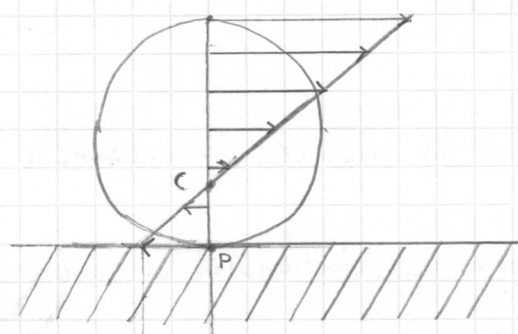
$\downarrow \dot{\varphi}_3$



C fisso $\rightarrow$ PURA ROTAZIONE
Disegno fatto rispetto ai punti sul diametro verticale.

Tutti i punti traslano con stessa velocità:

Il caso intermedio è quello di roto-traslazione che è combinazione dei due moti. Sommando i due profili potrei ottenere:



Ho sovrapposto una rotazione oraria ad una traslazione. Il puro rotolamento è quando si realizza una velocità nel punto di contatto (P) $\underline{v}_S = 0$ (velocità di sliding)

Ma a noi serve anche nella analisi di posizione quindi lo integriamo:

$$z_1 - z_{1,0} = -R(\varphi_4 - \varphi_{4,0})$$

Non ho introdotto nuove incognite perché le condizioni iniziali sono note.

Le mettiamo a sistema con le due di prima:

$$\begin{cases} z_1 \cos \varphi_1 + \dots + z_5 \cos \varphi_5 = 0 \\ z_1 \sin \varphi_1 + \dots + z_5 \sin \varphi_5 = 0 \\ z_1 - z_{1,0} + R(\varphi_4 - \varphi_{4,0}) = 0 \end{cases}$$

Facciamo il conto delle incognite: (ovviamente con il puro rotol. $n=1$)

C (costanti)	V (variabili)
z_2	φ_2
z_3	φ_3
z_4	φ_4
$R = z_5$	z_1
$\frac{3}{2}\pi = \varphi_5$	
$\pi = \varphi_1$	

$\varphi_2 \rightarrow \underline{q} = \{\varphi_2\}$
 $\left. \begin{matrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ z_1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \underline{\Phi} = \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ z_1 \end{Bmatrix}$

Quindi la matrice uscirà 3×3

Nella realtà potremmo mettere una cremagliera per garantire il puro rotolamento, ma comunque il tutto non è semplice: il sistema è lineare ma di certo il legame (ad esempio) tra φ_2 e φ_4 non è lineare (o lo capisco), ossia non è detto che se raddoppio φ_2 raddoppio φ_4 , se inoltre voglio assegnare una coppia alternata sull'asse di φ_2 le cose si complicano e quindi si ricorre a software.

Vediamo un caso in cui la catena è aperta:

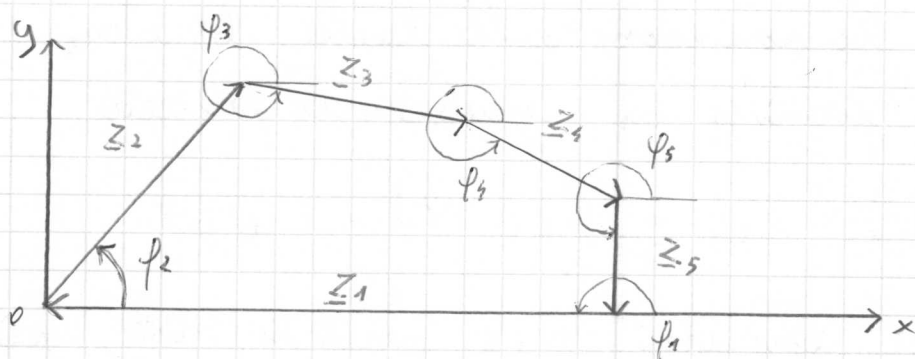
• TRIPLIO PENDOLO (lo mettiamo orizzontale per comodità)



SCHEMA
CINEMATICO

$m=3$ GDL

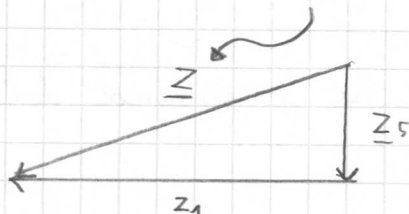
È aperto perché l'ultimo estremo non si chiude sul primo, ma lo studio del poligono di chiusura è a prescindere! è un metodo che vale per tutti i meccanismi perché guarda la cinematica! Se non si chiude, lo chiudiamo noi:



POLIGONO
DI CHIUSURA

Lo abbiamo chiuso con l'aggiunta di z_5 e z_1 .

Perché non così? Perché non ho collegato P e O direttamente?



Per comodità! perché usando z avrei comunque dovuto scomporre ⁱⁿ due componenti uguali a z_1 e z_5 e non sarebbe cambiato nulla.

$$\begin{cases} z_1 \cos \varphi_1 + z_2 \cos \varphi_2 + z_3 \cos \varphi_3 + z_4 \cos \varphi_4 + z_5 \cos \varphi_5 = 0 \\ z_1 \sin \varphi_1 + z_2 \sin \varphi_2 + z_3 \sin \varphi_3 + z_4 \sin \varphi_4 + z_5 \sin \varphi_5 = 0 \end{cases}$$

ANALISI
DI
POSIZIONE

C	V
φ_1	z_1
z_2	φ_2
z_3	φ_3
z_4	φ_4
z_5	z_5

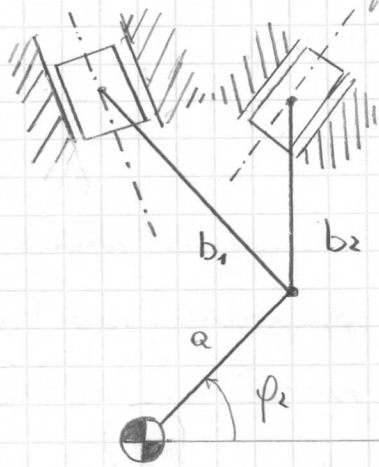
$$\underline{q} = \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \underline{\Phi} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_5 \end{Bmatrix}$$

Le due incognite sono proprio le x e le y del punto P.

Quindi assegnando le 3 rotazioni ho posizioni e velocità di P.

ALCUNI MECCANISMI

- Pistoni con doppie bielle e singole manovella



È un meccanismo nel quale, per motivi più vari (costi, ingombro ecc...), si usufruisce di una sola manovella alla quale effluiscono 2 o più bielle. Da evidenza di disegno, mi aspetto che conoscendo la φ_2 (Posizione manovella)

io conosca anche la posizione delle bielle b_1 e b_2 .

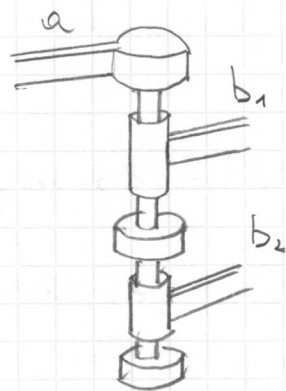
Vediamo se la formula di Grubler lo prevede:

$$n = 3(m-1) - 2C_1 = 3(6-1) - 2 \cdot 6 = 3$$

Codeamo un errore eppure: $m=6$ perché ho 3 aste, 2 pistoni e il telaio, $C_1=6$ perché ho due coppie rotoidali sui pistoni (1 su ogni pistone), *1 che collega le tre aste, una sul telaio e due coppie prismatiche (guide pistoni).

Lo è errore dovuto dallo schema cinematico che prescinde dalla effettiva esigenza costruttiva.

Non vedo quanto mostrato nella immagine a destra. In realtà quindi ho due coppie rotoidali! Lo errore era qui *, ne dovevo contare due:

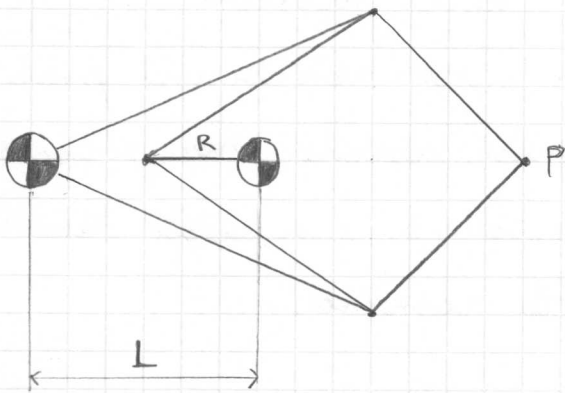


$$n = 3(m-1) - 2C_1 = 3(6-1) - 2 \cdot 7 = 1$$

Esistono più meccanismi che sfruttano un ragionamento simile e ne vedremo alcuni.

• Inversore di Peaucellier (peaucellier: pronuncia)

Viene usato per tracciare tessuti e creare incisioni sfruttando la sua particolare traiettoria.



Se $R = \frac{L}{2}$; P segue una traiettoria rettilinea.

Se invece si gioca con il rapporto tra L e R si ottengono traiettorie curvilinee del punto P.

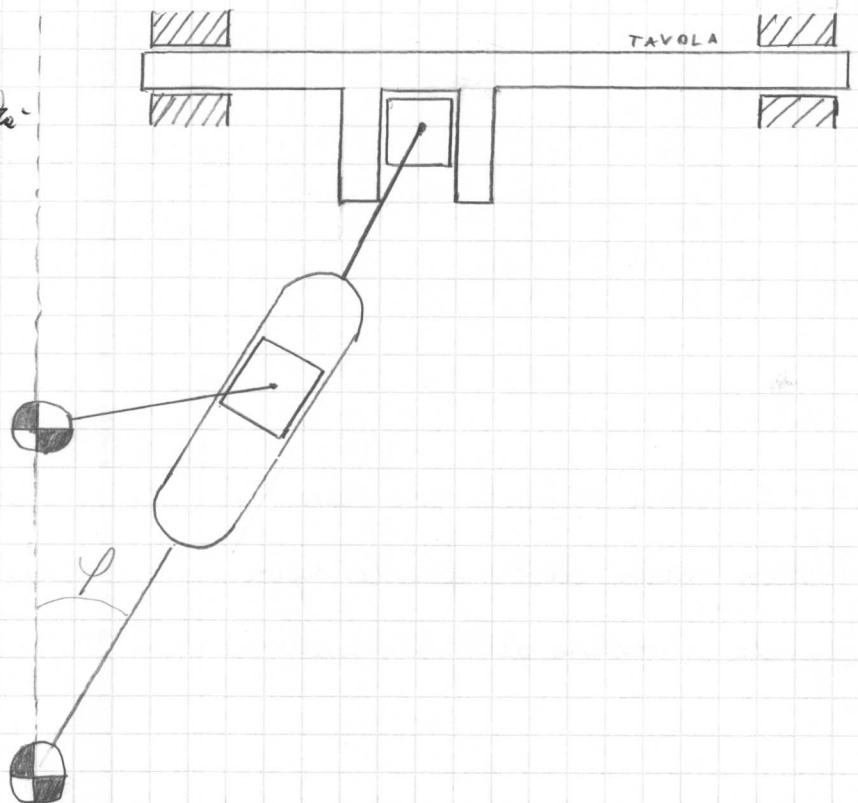
Orizzalmente quindi sono 3 coppie che

pesano due volte (discorso di prima).

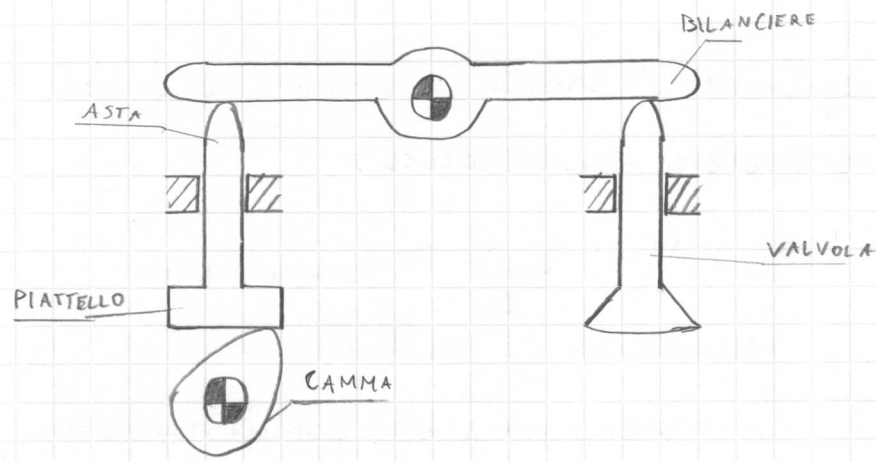
• Cilindro oscillante

Viene impiegato spesso in macchine utensili.

Ottuendo le coordinate φ si ottiene una velocità della tavola variabile lungo la sua corsa



• Meccanismo ad aste e bilancieri



Questo meccanismo è usato per il controllo delle valvole.

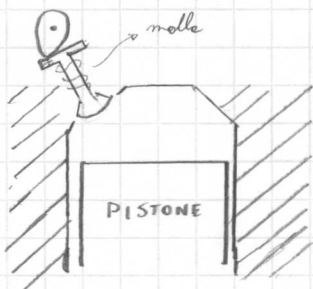
Ora non si usa quasi più perché non si può evitare, a un certo numero di

giri, il distacco del piattello dalla camma.

Bensi si usa:

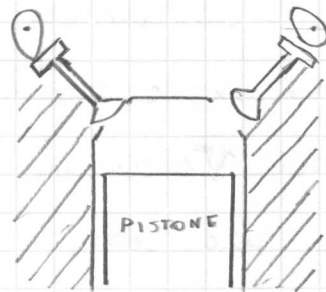
OHC (overhead camshaft)

L'albero a camme è direttamente sulle testate e senza bilanciere. Nel caso di più valvole si ricorre al DOHC, ossia double OHC.



OHC

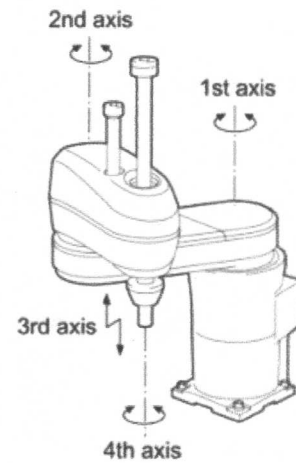
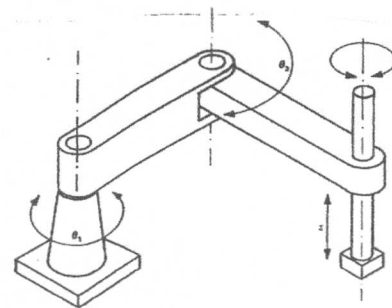
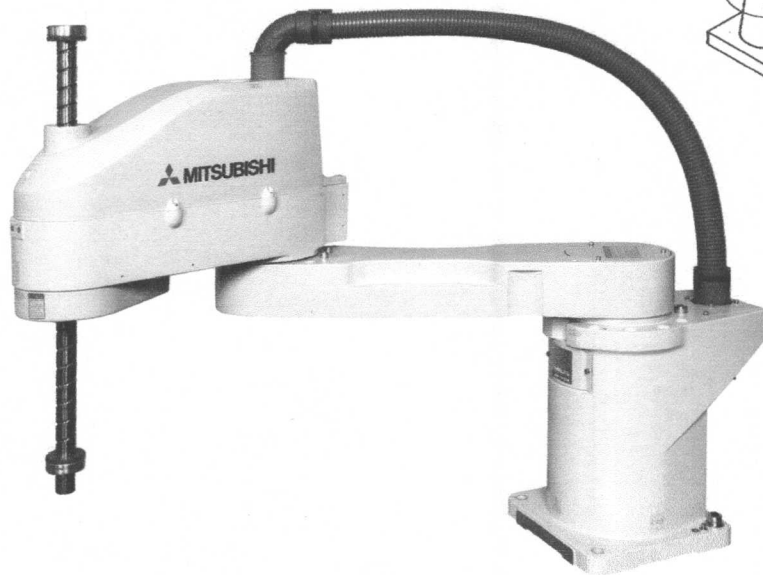
C'è un'altra valvola che non si vede perché dietro quella sopra disegnata, e mossa dallo stesso albero a camme.



DOHC

In questo caso ho 2 alberi a camme per una migliore gestione.

ROBOT SCARA



④ MATRICI DI ROTAZIONE E TRASFORMAZ. (NELLO SPAZIO)

È utile nel caso di robotica dove vi sono spostamenti, rotazioni nello spazio (bracci, pinze ecc...).

L'idea è quella di rendere l'analisi cinematica costruita su prodotti tra matrici dove ogni matrice identifica il moto relativo tra il membro $k+1$ esimo e il membro k esimo.

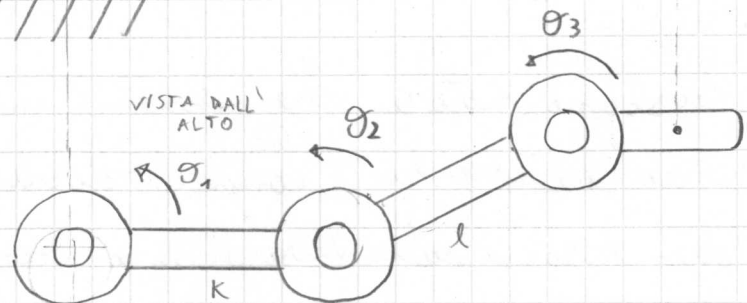
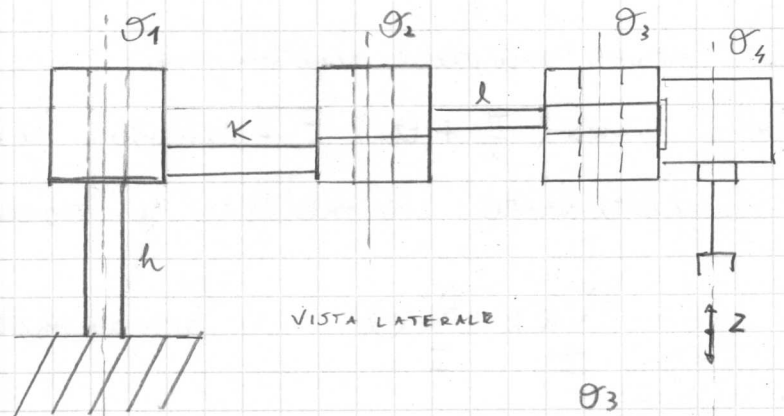
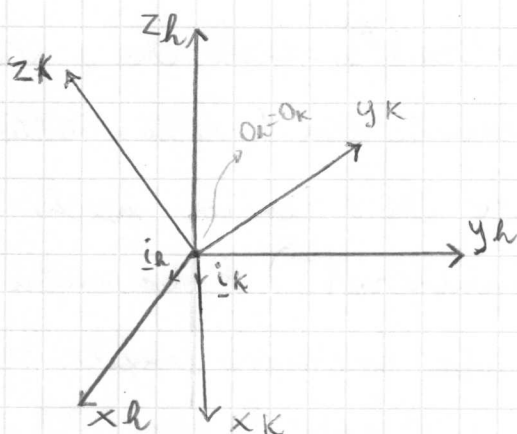
Praticamente scrivere tante matrici per quanti sono i moti relativi tra i corpi.

L'esempio classico che si fa è quello del robot SCARA →

È in grado di realizzare 4 rotazioni ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$) e la traslazione della pinza (z).

Qui si tratta di scrivere una matrice di rotazione per ogni θ . La generica matrice:

$$R_{hk} = \begin{bmatrix} \underline{i}_h \cdot \underline{i}_k & \underline{i}_h \cdot \underline{j}_k & \underline{i}_h \cdot \underline{k}_k & \underline{i}_h \cdot \underline{z}_k \\ \underline{j}_h \cdot \underline{i}_k & \underline{j}_h \cdot \underline{j}_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$



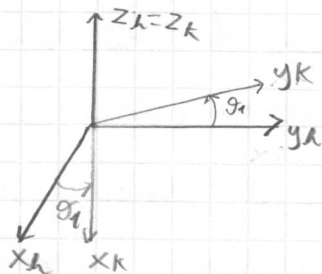
MATRICE DI ROTAZIONE

È quella che scriveremo quando facciamo riferimento a due terne tra le seconde che ha la stessa origine della prima ma con assi ruotati. (figure)

Nel caso più generale i due membri hanno (o meglio le due terne, quella solidale al membro h , e quella solidale al membro k) un punto in comune, come una coppia sferica, e hanno matrice come quella sopra (quella di coseni direttori).

Quale può essere un caso felice? Quando i due membri hanno un asse (di rotazione) in comune, quindi anche le due terne!

Occorre quanto si vede a destra e la matrice di rotazione, quella dei prodotti scalari, quella dei coseni direttori si modifica come a



$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

destra. Compiono molti termini e

il primo seno viene negativo perché $\underline{i}_h \cdot \underline{j}_k$ è uguale

a $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta_1) = -\sin \theta_1$. Se ho più membri non si tratta di fare altro che mettere in cascata le matrici. Se dopo c'è un membro l :

$$\underline{R}_{hk} \underline{R}_{kl}$$

tra le matrici eseguo il prodotto riga per colonna.

Bisogna notare che questo non è il caso del robot SCARA, nel senso che esso ha 3 coppie rotoidali, ma singole! Non ho ad esempio due bracci sullo stesso albero bensì il membro l , oltre a ruotare con θ_2 ha origine traslata. Quindi ho bisogno di un termine che tenga conto della posizione dell'origine. L'informazione sarà per forza un'altra tripletta di dati perché nello spazio per un punto ho 3 coordinate.

MATRICE DI TRASFORMAZIONE

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}_{hk} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

È una matrice 4×4 fatta come a sinistra. Si vede che è stato aggiunto un 1 sotto i vettori, si vede che è comodo perché quella a sinistra ($\underline{I}$) è la matrice di

trasformazione che tiene conto della sola rotazione (infatti se mentalmente si riduce il prodotto riga per colonna si ottiene il punto P moltiplicato di $\underline{R}_{hk}$ con l'aggiunta di un 1)

x_p, y_p, z_p sono rispetto al sistema rotante

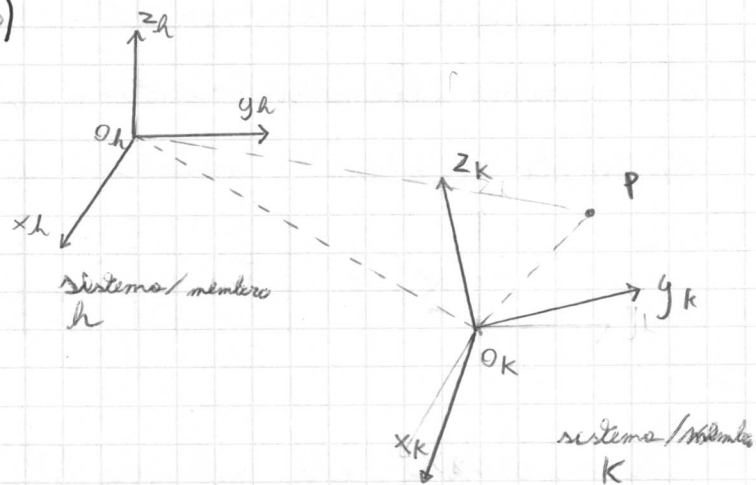
• Corso Trasformazione

Vediamo con l'aggiunta della traslazione cosa cambia:

Dobbiamo sommare (col metodo canonico)

le coordinate dell'origine del sistema di riferimento traslato:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{hk} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$



Si vede che a parte l'aggiunta di 1 è la legge che conosciamo a MATE III dove le coordinate di P nel sistema h sono pari alle coordinate di Ok nel sistema h + le coordinate di P nel sistema k traslate grazie a R_{hk} .

Possiamo scrivere tutto in modo più compatto usando una sola matrice: la matrice di trasformazione. È un approccio unificante.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{hk} & \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{T}$

Si vede che la scrittura di $\underline{T}$ è una semplificazione analitica, perché porta allo stesso risultato di prima.

È stato messo il vettore $(O_k - O_h)$ a fianco a R_{hk} solamente.

Infatti ora l'ultima parte sommata per ogni riga (per il prodotto riga per colonna) sarà: $x_0 \cdot 1$ (riga 1); $y_0 \cdot 1$ (riga 2) ecc... Ottenendo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots + x_0 \cdot 1 \\ * \dots + y_0 \cdot 1 \\ \dots + z_0 \cdot 1 \\ 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Le porte puntinate e quelle derivate al prodotto riga per colonna di R_{hk} per x_p, y_p, z_p che è lo stesso del metodo canonico. a destra si vede...

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vantaggi del metodo:

Ci fa scrivere tutto in modo più compatto:

Ad esempio nel robot SCARA rispetto a una terna solidale al primo cilindro (rispetto a cui ruota il primo braccio) ho in corso 4 moti relativi, quindi foro:

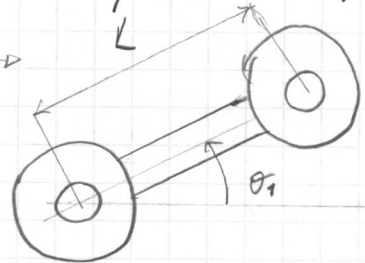
$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} T_{01} \\ \text{LK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{12} \\ \text{KL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{34} \end{bmatrix} \underline{x}_P$$

→ nella terna solidale alla pinza

Da ricordare che nel caso dello SCARA si semplifica perché ho rotazioni rispetto a un solo asse: per T_{01} (solo primo braccio):

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & L \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & L \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ *



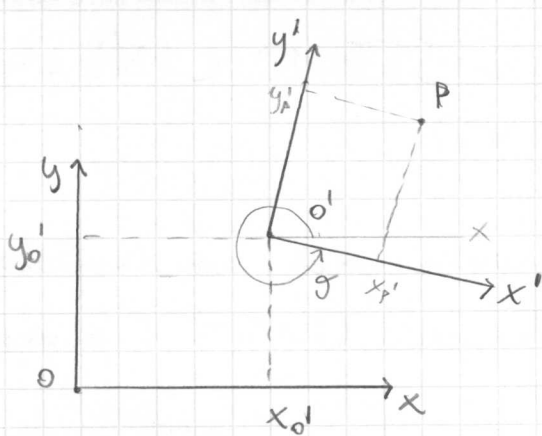
* Questo termine abbiamo detto che è di comodo e fa sempre 1, in realtà non è proprio così. Esso tiene conto se ci sono variazioni di scale tra la terna precedente e la successiva (fattore di stretch). È un termine di amplificazione/contrazione.

CASO PIANO

La matrice di trasformazione diventa 3×3 e quindi:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0' \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P' \\ y_P' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questo perché ho $z = \cos t$ e lo prendiamo $z = 0$



A sinistra si vede quanto riassunto
nella matrice dove è comodo non
aggiungere il termine di traslazione per-
ché visto come colonne aggiuntive (x_0' e y_0')
Perché la matrice è sempre di un ordine in
più rispetto alle dimensioni dello spazio

RISPOSTE "TIPO" DEI SISTEMI LINEARI AGLI INPUT PIU' FREQUENTI

Abbiamo bisogno di introdurli perché poi con la funzione di trasferimento leggeremo ingressi dinamici (INPUT) a risposte dinamiche (OUTPUT).

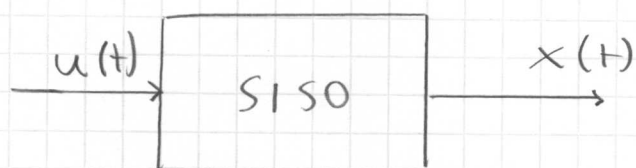
Noi cercheremo di creare un catalogo di risposte nel caso di ingressi $u(t)$ standard. Partiamo da sistemi del:

I Ordine

Nel senso che ^{la sua dinamica è regolata} è descritto da equazioni differenziali del tipo

$$\alpha \dot{x}(t) + \beta x(t) = u(t)$$

Nel caso di sistemi SISO (Single INPUT - Single OUTPUT)



$$u(t) = \text{INPUT}$$

$$x(t) = \text{OUTPUT}$$

Vorremmo vedere come $x(t)$ si adegna alle variazioni nel tempo di $u(t)$.

Considereremo casi lineari, ovvero α e β costanti.

Andiamo a vedere alcuni esempi importanti

Esistono sistemi di Ordine 0?

Sì sono quelli infinitamente pronti

$$\dot{x} = 0 + \beta x = u(t) \Rightarrow x = Ku$$

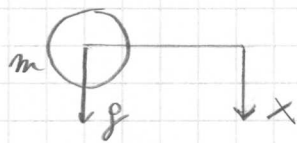
u raddoppia? $\rightarrow x$ raddoppia

- Perocodutista (grave in presenza di un campo di forze viscoso)

Scegliendo lo x come a destra si

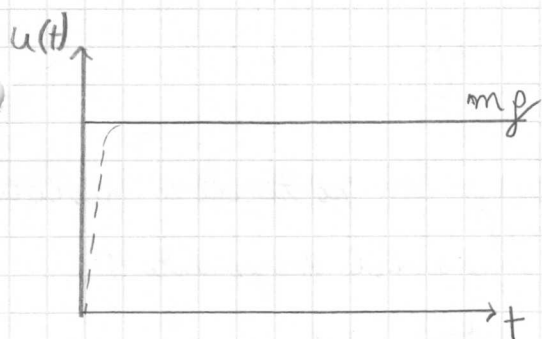
Aviene:

$$\underline{F} = m \underline{a} = m \underline{\ddot{x}}$$



Dove in F vi è forza peso e forze d'attrito viscoso, opposte alla velocità V :

$$m g - f v = m \dot{v} \rightarrow \boxed{m \dot{v} + f v = m g}$$



È del primo ordine nella velocità
 Il nostro ingresso u è proprio mg
 Si nota che a $t=0$ vi è una discontinuità
 che porta l'input istantaneamente al
 valore costante pari ad mg . Perse

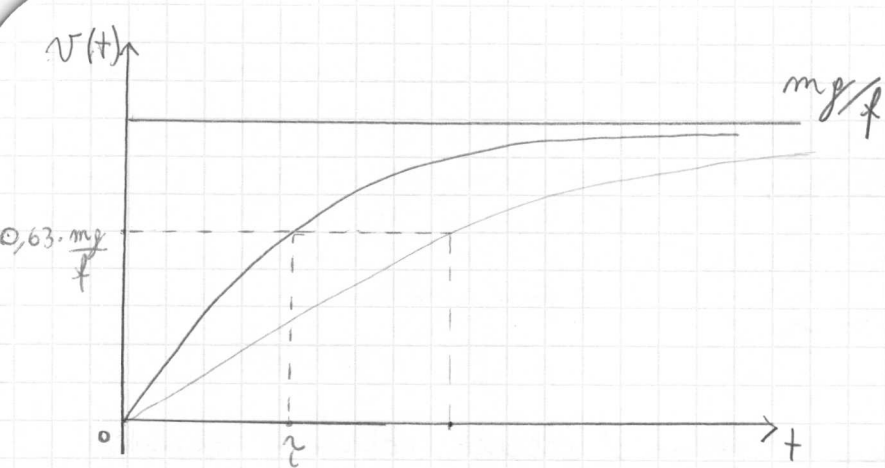
da 0 ad un valore finito. Nei sistemi reali non ammettiamo in
 genere tale discontinuità. Infatti la smettiamo ad una rampa
 particolarmente pendente (però trapezoidale) e tale transitorio
 si manifesta in tempi molto brevi rispetto a un tempo caratteristico
 del sistema. Risolviamo l'equazione:

$$\dot{v} + \frac{f}{m} v = \frac{mg}{m} \quad \begin{array}{c} \text{OMOGENA} \\ \hline \text{ASSOCIATA} \end{array} \quad \lambda + \frac{f}{m} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{f}{m}$$

Mentre l'integrale particolare lo troviamo notando che quando si
 spegne $\dot{v}$ (a regime) $v_p = \frac{g m}{f}$ quindi:

$$\begin{cases} v(t) = C e^{-\frac{f}{m} t} + \frac{g m}{f} \\ v(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{v(t) = \frac{mg}{f} (1 - e^{-\frac{f}{m} t})}$$

Sfortunatamente non possiamo riprodurlo sul
 grafico sopra perché in solo di forze, a meno di velocità



Osserviamo che per $t=0$
 $v=0$, mentre per $t \rightarrow \infty$
 $v = mg/f$ quindi è il
 valore asintotico, ma non è
 solo questo, esso è l'INPUT
 e quindi vediamo come va

l'OUTPUT (v): esso è il gradino (INPUT) mg/f moltiplicato per
 1 meno l'esponenziale (man mano che cresce l'esponenziale ci avviciniamo all'asintoto)
 quindi disegniamo la curva $\curvearrowright$.

Quanto vale il tempo caratteristico?

È quello per il quale la velocità raggiunge un particolare valore
 rispetto a quello asintotico, per rendere l'esponenziale di argomento 1:

Se $\tau = m/f$ a $t = \tau \rightarrow (1 - e^{-t/\tau}) = (1 - \frac{1}{e}) \approx 0,63$

$\tau = m/f$
 COSTANTE DI TEMPO

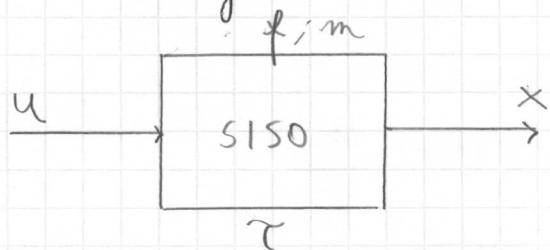
Lo vediamo in rosso nel grafico sopra.

E se avremo un sistema in cui lo τ era il doppio?

Raggiungeremo il 63% in un tempo doppio! Figura verde.

Quindi è il caso di sistemi più lenti, con una inerzia
 maggiore. Quanto più τ è alto tanto più il sistema si
 adegua all'ingresso con più lentezza.

Da notare è che esso (τ) dipende dal sistema, non dall'ingresso!
 Solo da grandezze del sistema. Quindi se volessimo fare uno schema:



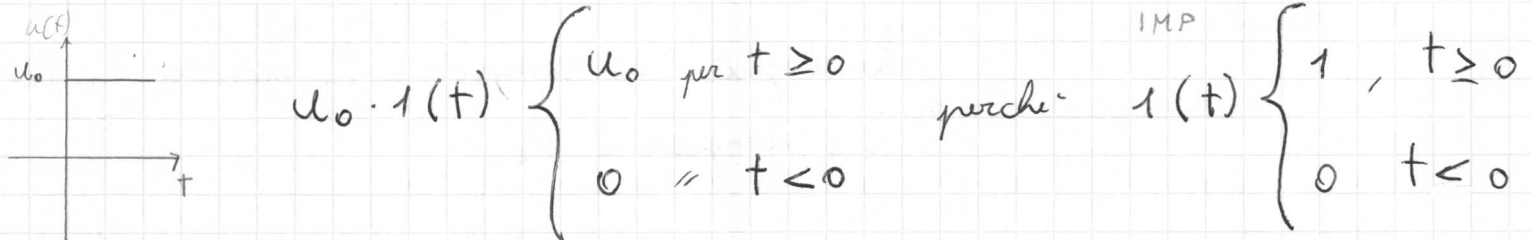
Si nota che f, m quindi τ sono
 grandezze proprie del sistema.

Chiamiamo ora di giocare con il
 gradino nei veri casi: in particolare

nella scienza dei segnali quello fatto con mg prende il nome di "gradino".

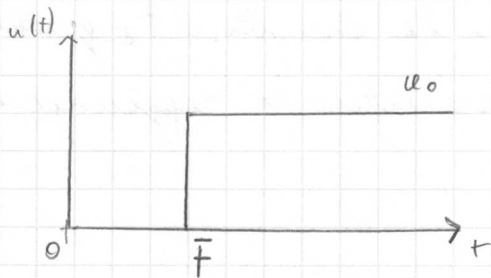
GRADINO (Unit Step)

Fatto come prima sembra che il gradino sia presente da sempre, ma in realtà questo avvenimento può capitare anche a un tempo diverso da 0 ($0 - \infty$), per esempio un tempo $\bar{t}$.
Esso viene spesso indicato così:



Questo è il caso dove il gradino è imposto al tempo zero quindi prima di 0 il segnale è 0 non perché $u_0 = 0$, ma viene visto costante, quello che cambia è il fattore moltiplicativo $1(t)$ che prima di $t=0$ vale 0 e dopo vale 1 $\rightarrow u_0 \cdot 1 = u_0$.

Ora vediamo il caso in cui non è imposto a 0:



$$u(t) = u_0 \cdot 1(t - \bar{t})$$

Si è scritto così perché per $t=0$ l'argomento di 1 (del gradino) è negativo e noi sappiamo

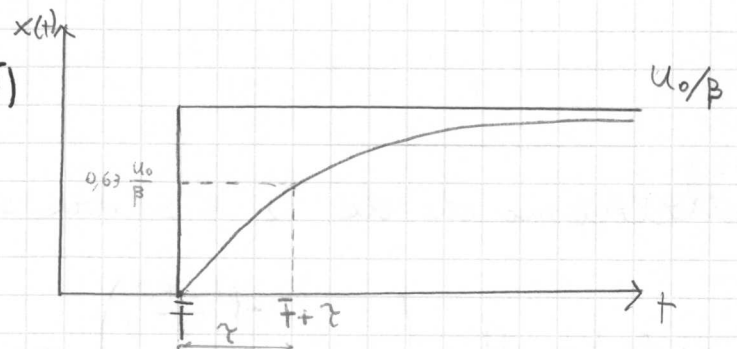
che se l'argomento è negativo $1(t)$, per $t < 0$, è uguale a 0.

Vediamo il caso simile a prima:

$$\alpha \dot{x} + \beta x = u(t) = u_0 1(t - \bar{t})$$

dividendo per β

$$\frac{\alpha}{\beta} \dot{x} + x = \frac{u(t)}{\beta}$$



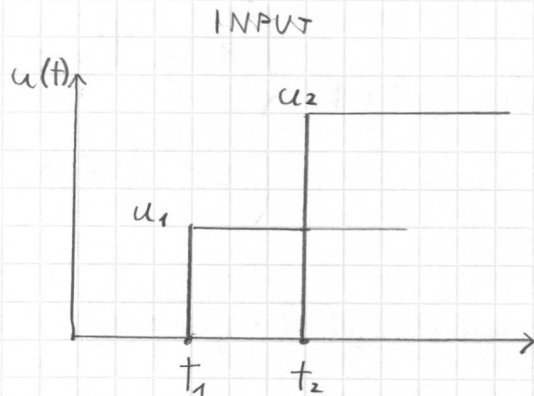
A destra compare u_0/β che è il valore esentatico, quindi avremo il comportamento del "perceduto", ma sfasato. Quindi il gradino si desta dopo $\bar{t}$ secondi, le risposte arriva al 63% dopo $\bar{t} + \tau$ secondi.

La risposta è quindi:

$$x(t) = \frac{u_0}{\beta} \left(1 - e^{-\left(\frac{t-\bar{t}}{\tau}\right)} \right)$$

per $t \geq \bar{t}$ ^{perché non vi è l'INPUT prima}

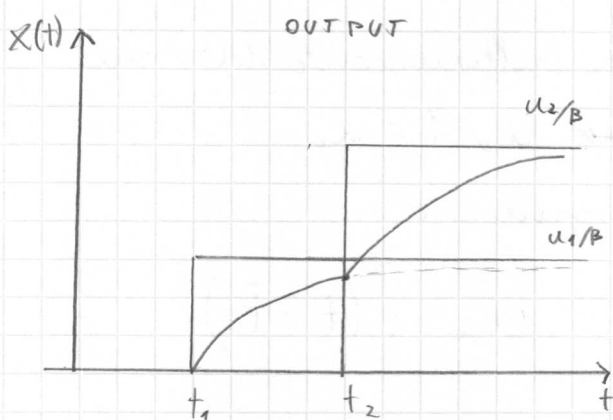
Ovviamente nel caso di più gradienti vale la sovrapposizione degli effetti. Rappresenteremo sempre prima l'INPUT poi l'OUTPUT:



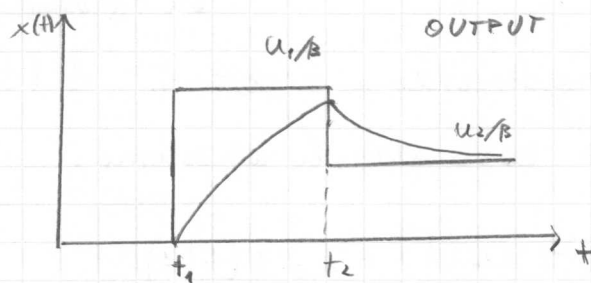
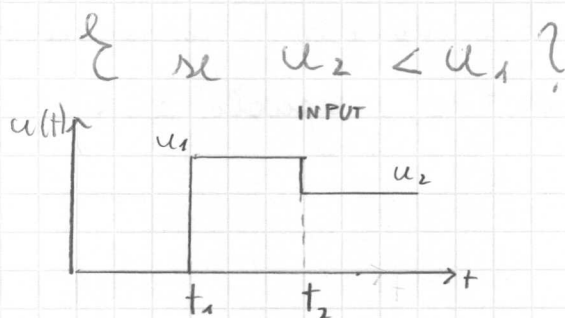
L'input u_1 compare a t_1 mentre l'input u_2 compare a t_2 :

$$u(t) = u_1 1(t-t_1) + (u_2 - u_1) 1(t-t_2)$$

E la risposta / OUTPUT, come sarà?



Quindi la x ha bisogno sempre di β del sistema (una scale). Da notare che a t_2 x non parte da u_1/β ma del valore che ha assunto a t_2 grazie a u_1 . Il valore asintotico lo raggiunge in tempi infiniti.



Otteniamo che da t_2 x andrà a diminuire. Soluzione analitica:

$$x(t) = \frac{u_1}{\beta} \left(1 - e^{-\left(\frac{t-t_1}{\tau}\right)} \right) + \frac{(u_2 - u_1)}{\beta} \left(1 - e^{-\left(\frac{t-t_2}{\tau}\right)} \right)$$

ho solo sommato le due soluzioni analitiche. IMP: questa di sopra vale solo per $t \geq t_2$ mentre il primo termine* per $t_1 \leq t < t_2$.

• INGRESSI ARMONICI

↳ INPUT in questo caso è una funzione armonica (seno, coseno)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u(t) = u_0 \cos \Omega t$$

Per ora trascuriamo questo
↓

u_0 = Ampiezza

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$ = periodo [s]

$\Omega = 2\pi f$ [rad/s] Pulsazione

$f = \frac{1}{T}$ frequenza [$\frac{1}{s}$] = [Hz]

I Ordine

In particolare per questi sistemi ci interessa la risposta a regime. E' fatta così:

$$x(t) = \frac{1}{\beta} u_0 \cos(\Omega t - \delta)$$

$\frac{1}{\beta}$ Guadagno statico (GAIN) δ = ritardo

↳ uscita, la risposta è sfasata in ritardo, il sistema è però lineare: forzato con Ωt e il sistema risponde con Ωt (non ha $2\Omega t$, non cambia la pulsazione)

Vi è anche una amplificazione della risposta:

$$x(t) = \frac{1}{\beta} \phi u_0 \cos(\Omega t - \delta)$$

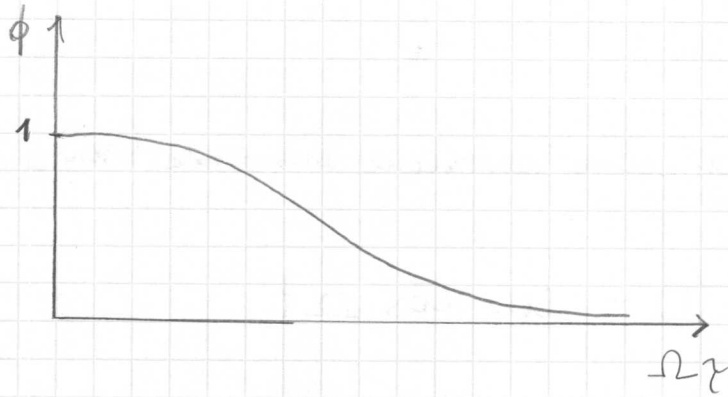
ϕ coefficiente di amplificazione $\rightarrow \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega\tau)^2}}$

τ perché ho già - don't forget to write it

$$t_g \delta = +\Omega\tau \rightarrow \delta = t_g^{-1}(\Omega\tau)$$

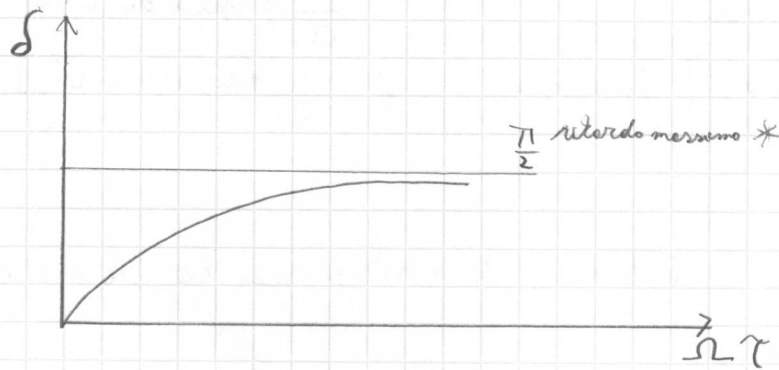
Da notare che Ω è una grandezza dell'ingresso mentre τ del sistema ma servono entrambe a determinare ϕ e δ .

ϕ e δ si rappresentano su dei diagrammi detti DIAGRAMMI DI BODE

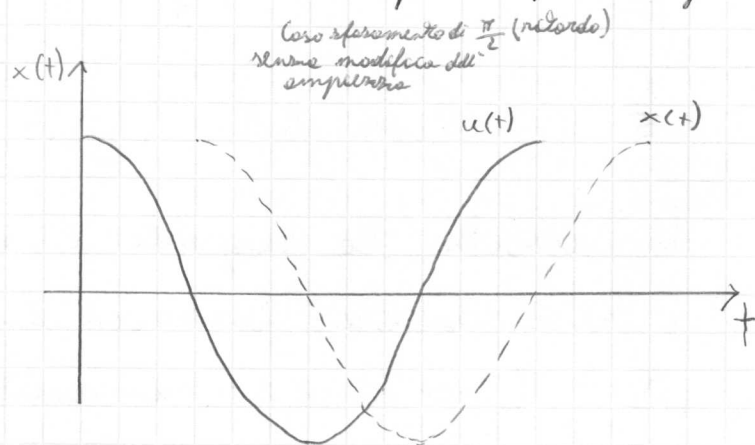
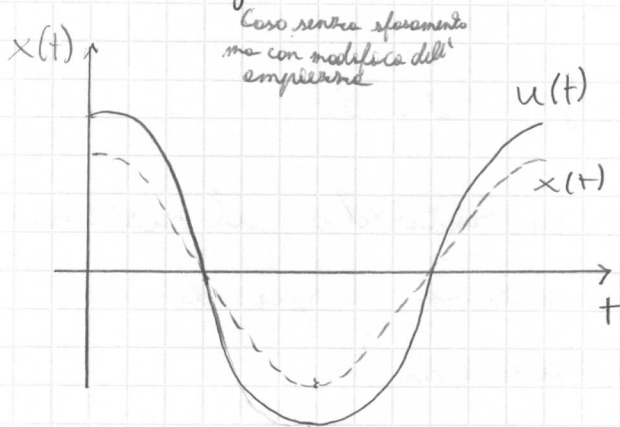


Non sono altro che la rappresentazione grafica rispettivamente dell'ampiezza e della fase della risposta in frequenza.

Si ricava l'andamento facilmente dell'analisi delle funzioni $\phi(\Omega\tau)$ e $\delta(\Omega\tau)$



Cosa significano praticamente? Correggono la risposta rispetto all'ingresso:



Ma se volessimo il ritardo nel tempo e non in radienti?

Per ottenerlo in secondi dobbiamo dividere per Ω ($\frac{\text{rad}}{\text{rad/s}} = \text{s}!$)

Quindi ad esempio per un ritardo in radienti $\delta = \frac{\pi}{2}$ ho un ritardo in secondi pari a:

$$\delta_s = \frac{\delta}{\Omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi f} = \frac{T}{4} \quad \text{e' un quarto di periodo!}$$

$$\text{Se } \delta_s = \frac{\delta''^{2\pi}}{\Omega} = T$$

Otterremmo sfasamento pari al periodo ma nei rest del 1 ordine non e' possibile perche' al max e' $\frac{\pi}{2}$

Recordiamo che vale ancora la sovrapposizione degli effetti:

$$u(t) = u_1 \cos \Omega_1 t + u_2 \cos \Omega_2 t \quad \text{per esempio}$$

$$x(t) = \frac{1}{\beta} \left[\phi(\Omega_1) u_1 \cos(\Omega_1 t - \delta_1) + \phi(\Omega_2) u_2 \cos(\Omega_2 t - \delta_2) \right]$$

l'aggiunta di Ω_1 perde γ del sistema e' lo stesso.

Inoltre non dimentichiamo che questa e' sempre la soluzione A REGIME.

• II ORDINE (non trascuriamo piu' lo $\ddot{x}$)

$$\gamma \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u(t) = u_0 \cos \Omega t$$

• Risposta A REGIME:

$$x(t) = \frac{1}{\beta} \phi u_0 \cos(\Omega t - \delta)$$

$\frac{1}{\beta}$	GUADAGNO STATICO
$\frac{1}{\beta} \phi$	GUADAGNO DINAMICO

La struttura e' uguale perche' generale per qualsiasi sistema lineare di qualunque ordine, cio' che cambia sono ϕ e δ

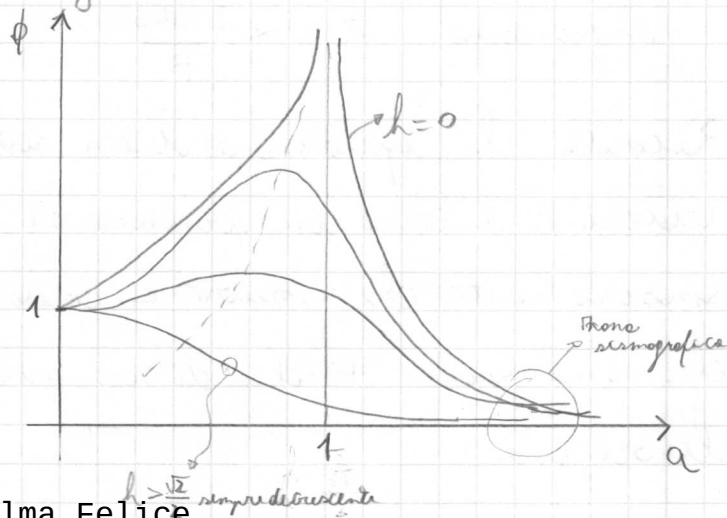
$$\phi = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ha)^2}}$$

$$\tan \delta = \frac{2ha}{1-a^2}$$

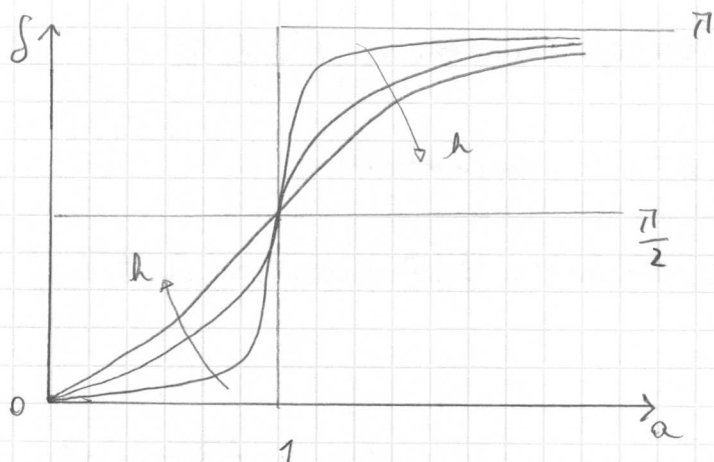
Dove: $a = \frac{\Omega}{\omega_n}$ e $\omega_n = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$ mentre $h = \frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma\beta}}$

smorza.
smorzam.
critico

Diagrammi di BODE



Ricorda che a e' lo Ω delle forzanti rispetto a quella naturale del sistema quindi $a \gg 1$ significa $\Omega \gg \omega_n$



Dove si distinguono i casi:

$$\delta = 0 \quad \text{in fase}$$

$$\delta = \pi \quad \text{in opposizione di fase}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{in quadratura di fase}$$

INGRESSO A GRADINO II ORDINE

Nel gradino abbiamo trattato solo sistemi del I ordine. Supponiamo ora un sistema del II ordine ove il gradino è imposto a partire da $t = 0$:

$$\begin{cases} \gamma \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u(t) = u_0 \cdot 1(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{all'inizio è in quiete} \\ \nearrow \end{array}$$

$(t \geq 0)$

Quando $t \geq 0$ il secondo termine diventa costante e pari a u_0 quindi:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} \ddot{x} + \frac{\alpha}{\beta} \dot{x} + x = \frac{u_0}{\beta} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione di questo già la sappiamo ma non la vediamo.

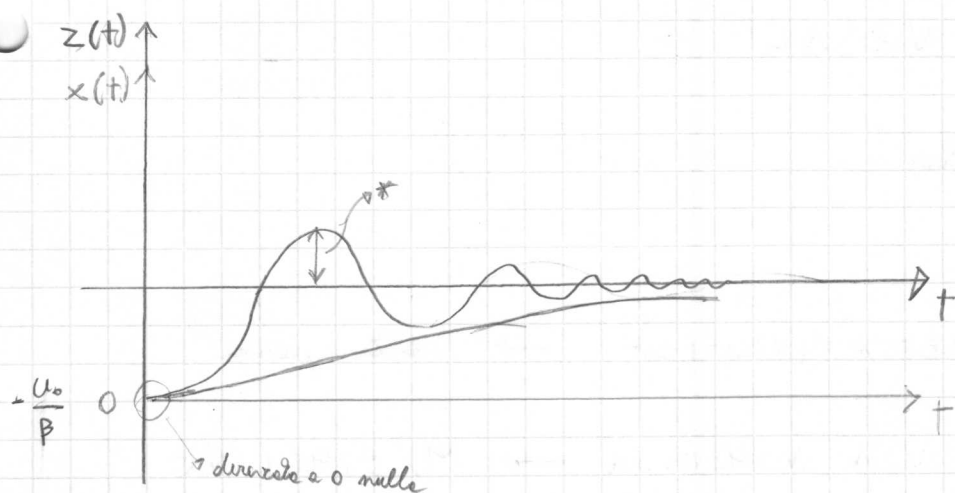
O allora facciamo un cambio di variabile

e poniamo $z = x - \frac{u_0}{\beta}$

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} \ddot{z} + \frac{\alpha}{\beta} \dot{z} + z = 0 \\ z(0) = -\frac{u_0}{\beta} \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

Ricorda l'equazione di un sistema vibrante libero in presenza di smorzamento che si muove a causa della condizione iniziale di non partenza dall'origine.

Rappresentiamo in rosso il sistema di riferimento $x(t) - t$ e in nero il nuovo sistema $z(t) - t$:

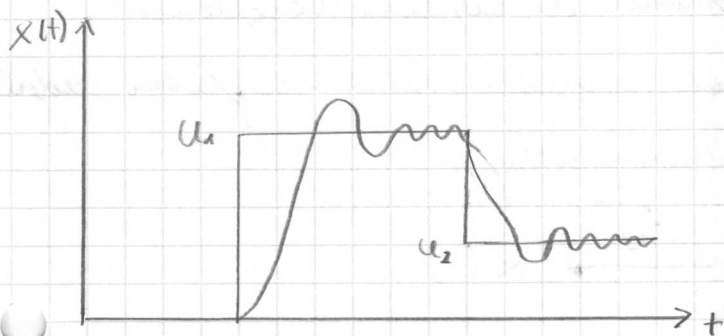


Caso subcritico
 $h < h_a$

 $h \geq h_a$
 Caso supercritico


Nel caso subcritico vediamo la comparsa della sovraccoscensione * (overshoot) che rappresenta il massimo sorpasso della soluzione rispetto al valore asintotico.

E se subentrano 2 gradienti? (sempre caso subcritico)



Noi in genere eviteremo il caso subcritico perché è impensabile che una pinna di saldatura, ad esempio, per raggiungere la posizione di lavoro debba prima oscillare.

Quindi in genere cercheremo di avere sempre esponenziali negative. In questi casi è vero che il valore da raggiungere è sempre un asintoto, ma già per un tempo $t = 5\tau$ raggiungiamo il 99% del valore asintotico e ci sta bene!

⑤ TRASFORMATA DI LAPLACE:

EQ. DIFFERENZIALI

↓
metodi risolutivi

I) SOLUZIONE DIRETTA/ANALITICA → "Corta e penna"

II) SOLUZIONE PER VIA NUMERICA → M/SIMULINK

III) TRASFORMATA DI LAPLACE → FUNZ DI TRASFERIMENTO

↓
E' un modo per sintetizzare in maniera compatta il modo in cui il sistema elabora l'ingresso e ci dà l'uscita.

Ci permette di risolvere le equazioni differenziali non nel dominio tempo ma nel dominio di Laplace (algebrico).

Risolverla nel dominio algebrico è più semplice ma se vogliamo vederla nel dominio del tempo bisogna antitrasformarla:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \tilde{x}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t)$$

In realtà così facendo si viene a creare una sorta di formalismo di funzioni già trasformate!

Per $x(t)$ deve essere continua e anche le sue derivate, e deve essere reale e reversibile reale (niente complessi, digitali ecc...)

Ora se abbiamo una generica eq. differenziale, ad esempio:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = u(t)$$

Ci chiediamo se l'operatore di Laplace, o meglio la trasformata del primo membro è uguale a quella del secondo membro:

$$\mathcal{L}[\ddot{x} + \dot{x} + 2x] = \mathcal{L}[u(t)]$$

Esistono delle considerazioni valide solo per i sistemi:

LTI (Lineare Tempo Invariante): ossia una equazione differenziale lineare con i coefficienti costanti (quelli davanti le x).

TRASFORMATTA IN FORMA ANALITICA

$$\mathcal{L}[x(t)] = \bar{x}(s) \triangleq \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Dove:

- s è un numero complesso $s \in \mathbb{C}$
- è definita come sopra ($\triangleq$ significa definizione)
- Si può indicare anche come $\bar{x}(s)$
- Una volta integrata non è più funzione del tempo (Integrato dt)
- Conseguenza di prima sarà che $\bar{x}(s)$: solo funzione di s
- L'integrando deve esistere $\rightarrow$ deve essere finito $\rightarrow$ quindi $\bar{x}(s) \triangleq \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt > -\infty$ e $< +\infty$
- Conseguenza di questo (siccome $t \rightarrow \infty$ ma il risultato è finito) è che: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-st} = 0$ (criterio di convergenza)

Quindi ad esempio $x(t) = e^{t^2}$ non è trasformabile perché $e^{t^2} \cdot e^{-st}$ per $t \rightarrow \infty$ è $= \infty$.

Per s invece ha questa forma $s = a + ib$, un complesso. Se sostituisco s nell'integrale, l'esponenziale, per la formula di Eulero:

$$e^{\pm i\psi t} = \cos \psi t \pm i \sin \psi t$$

Il termine preoccupante di s è la parte reale e perché sostituito a da una e^{at} e e^{ibt} e mentre la parte complessa da oscillazioni, la e^{at} può divergere, non rispettando il limite.

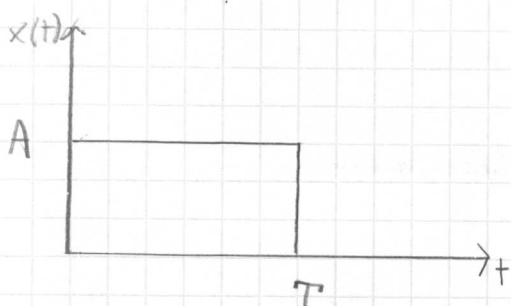
A noi interessano però le:

FUNZIONI TRASFORMABILI:

- Gradino unitario:

Leo è ed è facile perché il prof non lo fa (lo fa dopo)

- Impulso di durata finita:



Esso fa $x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Ora ne facciamo la trasformata

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t)] &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^T A e^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^T A e^{-st} (-s) dt = -\frac{A}{s} \left[e^{-st} \right]_0^T = \\ &= -\frac{A}{s} (e^{-sT} - 1) = \frac{A}{s} (1 - e^{-sT}) \end{aligned}$$

costante

Se $A = 1$ otteniamo il gradino $\rightarrow \boxed{\frac{1}{s} = \mathcal{L}[1(t)]}$

unitario

Ricordiamoci che nel caso di più funzioni reali la proprietà di linearità:

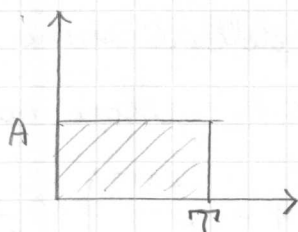
$$\int_0^{\infty} (\alpha x(t) + \beta y(t)) e^{-st} dt = \alpha \bar{x}(s) + \beta \bar{y}(s)$$

Quindi l'operatore di Laplace è lineare $\rightarrow$ vale la sovrapposizione degli effetti.

• Impulso di area unitaria

L'area dell'impulso è pari a:

$$\text{area} = AT$$



Se volessimo mantenere l'area costante, tanti impulsi di ampiezza a durata finita, stiamo dicendo di mantenere costante l'energia introdotta nel nostro sistema dinamico.

In particolare analizzeremo casi in cui l'area è uguale a 1.

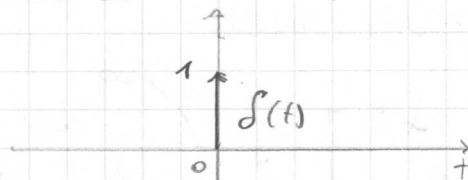
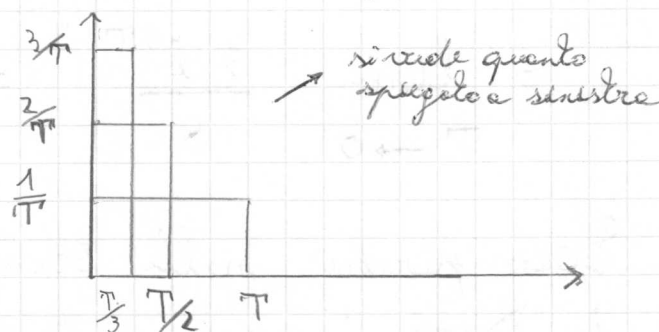
$$1 = AT \rightarrow A = \frac{1}{T}$$

Se raddoppio $T \rightarrow 1 = A(T \cdot 2) \rightarrow A = \frac{1}{2T}$

C'è una legge tra T ed A .

C'è un particolare limite detto Delta di Dirac:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} x(t)$$



È una funzione particolare perché "vale", solo a 0 dove fa 1 mentre per altre t fa sempre 0. Come si vede dal grafico. Otteniamo mandato a 0 T e quindi (se l'area è 1) A va a ∞ e il loro prodotto fa 1.

Cerchiamo di farne la trasformata:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \left(\lim_{T \rightarrow 0} x(t) \right) e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{A}{s} (1 - e^{-sT}) =$$

per le ipotesi di regolarità
possiamo portare il limite fuori dall'integrale (scambiabili)

Sostituiamo $x(t) = A$ nell'integrale
tra 0 e T come l'altro caso.
(Impulso di durata finita)

Ma allora non è combinatoriamente? Che cosa deve avere questa classe di funzioni per essere detta di Dirac? Deve avere area unitaria!
 Allora essendo $AT = 1$ allora sostituisco $A = 1/T$:

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{sT} \cdot (1 - e^{-sT}) = \frac{0}{0}$$

È una forma indeterminata allora uso de l'Hopital e faccio il limite del rapporto tra le derivate di numeratore e denominatore rispetto a T :

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s e^{-sT}}{s} = 1 \rightarrow \boxed{\mathcal{L}[\delta(t)] = 1}$$

Ecco perché nelle trasformate si cita sempre il delta di Dirac: perché è la funzione che ha trasformata pari a 1.

• Esponenziale:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} dt =$$

mult. e diviso
per $\alpha-s$

$$= \frac{1}{\alpha-s} \int_0^{\infty} (\alpha-s) e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{(\alpha-s)} \left[e^{(\alpha-s)t} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-s} \left[\overset{\text{altrimenti divergerebbe}}{0 - 1} \right] = \frac{1}{s-\alpha}$$

È se ho $-\alpha$? Ottengo $1/(s+\alpha)$ e allora:

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{\pm \alpha t}] = \frac{1}{s \mp \alpha}}$$

Si invertano i
segni

Overalmente lo s è un num. complesso quindi ce si deve confrontare con la σ (parte reale) di s affinché il limite converga.

• Coseno (e in generale funzioni trigonometriche)

Il fatto di aver trovato la trasformata dell'esponenziale ci permette di "giocare", tramite le formule di Eulero, con lo stesso e trovare le trasformate delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos \omega t] &= \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \cdot e^{-st} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{(i\omega - s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(i\omega + s)t} dt \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\omega - s} e^{(i\omega - s)t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-(i\omega + s)} e^{-(i\omega + s)t} \right]_0^{\infty} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\omega - s} (0 - 1) - \frac{1}{i\omega + s} (0 - 1) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{i\omega - s} + \frac{1}{i\omega + s} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{s + i\omega + s - i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

Quindi la "traccia" della pulsazione ω rimane al denominatore e elevata al quadrato.

• Seno

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st} dt = \dots$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

- Funzione rampa



$$\mathcal{L}[kt] = \int_0^{\infty} kt e^{-st} dt =$$

si integra per parti:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Scegliendo kt come $f(t)$ (ovvero $f(x)$) e e^{-st} come $g'(t)$ procedo ricordando che per avere $g(t)$ devo integrare $g'(t)$:

$$= -\frac{1}{s} [kt e^{-st}]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} k e^{-st} dt =$$

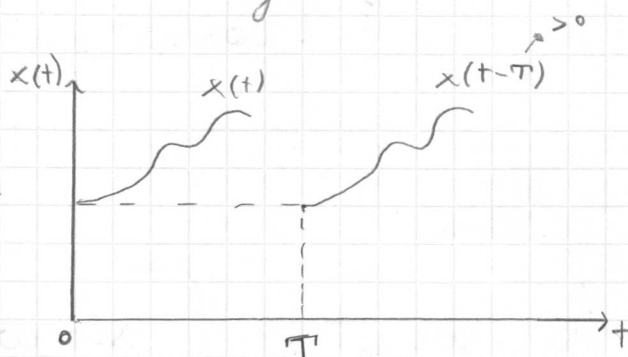
$$= -\frac{1}{s} (0 - 0) - \frac{1}{s^2} [k e^{-st}]_0^{\infty} = -\frac{k}{s^2} (0 - 1) = \frac{k}{s^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[kt] = \frac{k}{s^2}}$$

Ora vedremo 3 PROPRIETA' delle funzioni, valutate nel dominio di Laplace: Ritardo, derivata e integrale.

- Ritardo:

Immaginiamo che la nostra funzione non parta da 0 ma si manifesti con un certo ritardo T .



Q. destra si vede un esempio della stessa funzione ritardata di T :

Ebbene il ritardo mi dice che, se ho la funzione $x(t)$ originale e la trasformo, la trasformata della funzione che ritarda di T quanto reale:

$$\int_0^{\infty} x(t-T) e^{-st} dt =$$

facciamo un cambio di variabili:
 $t-T = p$ mi metto su un
 orologio che mostra
 il gap T . Cambieremo anche gli estremi.

$$= \int_{-T}^{\infty} x(p) e^{-sp} e^{-sT} dp =$$

divido l'integrale: tra $-T$ e 0
 e tra 0 e ∞ consi del fatto che
 prima di 0 l'integrale è anch'esso 0.
 a sinistra dello 0 la $x(p)$ fa 0.

$$= \int_{-T}^0 x(p) e^{-sp} e^{-sT} dp + \int_0^{\infty} x(p) e^{-sp} e^{-sT} dp =$$

$$= e^{-sT} \int_0^{\infty} x(p) e^{-sp} dp = e^{-sT} \bar{X}(s)$$

→ riconosco la definizione di trasformata

$$\boxed{\mathcal{L}[x(t-T)] = \bar{X}(s) e^{-sT}}$$

Quindi per dare un ritardo
 basta una moltiplicazione
 per una costante e^{-sT}

• Integrale:

Voglio fare l'integrale di una funzione $x(t)$ di cui so la trasformata:

$$\mathcal{L}[\int_0^{\infty} x(t) dt] = \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\infty} x(t) dt \right)}_{f(t)} \underbrace{e^{-st}}_{g'(t)} dt =$$

lo risolvo per
 parti perché quell'
 integrale lo voglio
 derivare

$$= -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) dt e^{-st} (-s) dt$$

ho messo $-\frac{1}{s}$ derivando tutto
 perché nella formula dell'integrale
 per parti ho sempre $g(t)$ (non $g'(t)$)
 allora devo integrarlo quindi mi serve

$$= -\frac{1}{s} \left\{ \left[\int_0^{\infty} x(t) dt e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right\} =$$

$$= -\frac{1}{s} \left[\overset{\substack{\text{per criteri} \\ \text{convergenza}}}{0} - \int_0^{\infty} x(t) dt \cdot 1 \right] - \bar{X}(s) =$$

→ esponenziale valutata a 0

L' integrale voluto è 0 non possiamo dire che è 0 subito (orecchie nulle):
 se ci restituisse un seno ecc. ... sì ma non so $x(t)$ che funzione è!
 Ma solo casi particolari fa sempre 0! (ad esempio il delta di Dirac no!):

$$\mathcal{L} \left[\int x(t) dt \right] = \frac{\bar{x}(s)}{s}$$

Quindi formalmente nel
dominio di Laplace si integra
moltiplicando per $1/s$

Derivate

$$\mathcal{L} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = \int_0^{\infty} \overset{g'(t)}{x'(t)} \overset{f(t)}{e^{-st}} dt =$$

faccio per parti ma qui
mi conviene scegliere
 $g'(t) = x'(t)$ così lo integra

$$= \left[x(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt =$$

$$= 0 - x(0) \cdot 1 + s \bar{x}(s)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = s \bar{x}(s) - x(0)$$

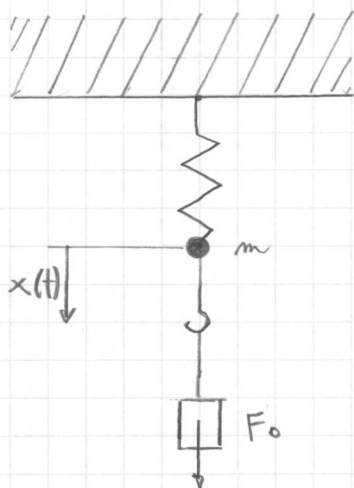
Quindi la derivata si fa
moltiplicando per s sottraendo
la condizione iniziale
 $x(0)$!

Derivate n-esima

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right] = s^n \bar{x}(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} \dot{x}(0) - \dots - s^1 x^{(n-2)}(0) - s^0 x^{(n-1)}(0)$$

Praticamente trasformo la derivata di ordine n ($s^n \bar{x}(s)$) e poi
mi serve una batteria di condizioni iniziali dell'ordine 0
fino all'ordine $n-1$ (non richiede mai la condizione sulla derivata
dell'ordine dell'equazione differenziale).

ESEMPIO APPLICATIVO



Prendiamo il caso di una massa sospesa che da condizioni iniziali omogenee viene sollecitata da una forza impulsiva (applicata per un certo tempo)

$$\begin{cases} m \ddot{x} + Kx = F_0 \cdot 1(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Divido tutte l'equazione per K (e ricordo che $\sqrt{K/m} = \omega_n$)

$$\frac{m}{K} \ddot{x} + x = \frac{F_0}{K} 1(t) \rightarrow \frac{1}{\omega_n^2} \ddot{x} + x = \frac{F_0}{K} 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

Applico l'operatore di Laplace ad ambo i membri:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \left(s^2 \bar{x}(s) - s \overset{0}{x(0)} - \overset{0}{\dot{x}(0)} \right) + \bar{x}(s) = \frac{F_0}{K} \frac{1}{s}$$

A noi però serve $\bar{x}(s)$, la soluzione:

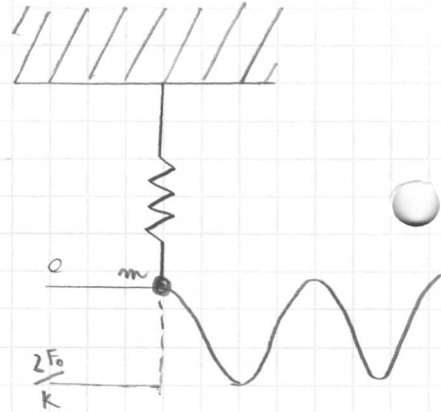
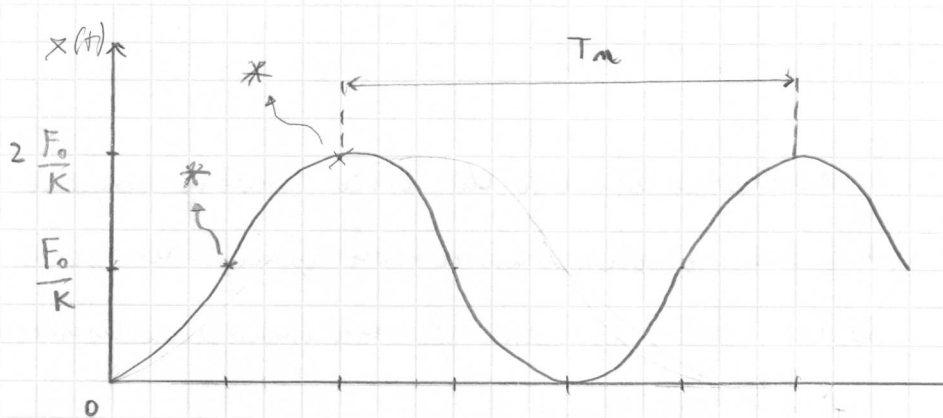
$$\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 1 \right) \bar{x}(s) = \frac{F_0}{K} \frac{1}{s}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{F_0}{K} \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

Per antitrasformare devo notare che:
 $\mathcal{L}[1 - \cos \omega t] = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
 $= \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$ per le proprietà di linearità.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = \frac{F_0}{K} (1 - \cos \omega_n t)$$

L'ampiezza non varia perché siamo in un caso conservativo (non c'è dissipazione).



Il periodo ovviamente è $T_m = \frac{2\pi}{\omega_n}$

Valutazione energetica:

All'inizio:

Energia potenziale: $\frac{1}{2} K x_0^2 = 0$

Non è spostata rispetto al suo stato di equilibrio

Energia cinetica: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2(0) = 0$

All'inizio m è ferma

Così è allora che induce il moto disturbando l'equilibrio?

La forza che introduce lavoro compiendo energia!

Valutiamo l'energia ad esempio in questo * punto (breakpoint)

$$\frac{1}{2} K \left(\frac{F_0}{K} \right)^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Non so quanto vale v ma c'è (la derivata di $x(t)$ in *) e me ne accorgo dal grafico. Ma chi ha aumentato l'energia? Il lavoro di F_0 ! Solo che F_0 è costante e lo spostamento in * vale F_0/K quindi:

E_p

E_c

lavoro introdotto

$$\frac{1}{2} \frac{F_0^2}{K} + \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{K} = \frac{F_0^2}{K}$$

ho ricavato l'energia cinetica, perché non ho termini dissipativi quindi tutto il lavoro introdotto lo ritroviamo in energia quindi l'energia cinetica deve essere per forza questa.

È sul picco* come si modifica questa equazione?

Sei stato introdotto l'angolo per lo spostamento $2F_0/K$ e dal profico si vede che la velocità (derivata) è nulla:

$$\frac{1}{2} K \left(\overset{\text{spostamento } x}{\frac{2F_0}{K}} \right)^2 + (0) = \frac{2F_0^2}{K} \quad \text{con } L$$

$$\frac{2F_0^2}{K} = \frac{2F_0^2}{K} \quad \text{è verificata}$$

È bene notare che senza profico, conoscendo l' E_p e L poteva ricavare che $E_c = 0$.

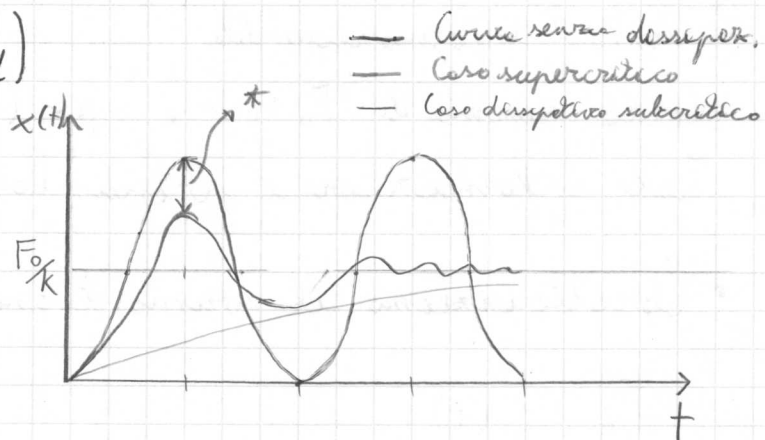
Caso con dissipazione:

Parte dell'energia si perde (E_d)

$$\frac{1}{2} K \left(\frac{F_0}{K} \right)^2 + \frac{1}{2} m v^2 + E_d = \frac{F_0^2}{K}$$

A causa della dissipazione rispetto al caso di prima si

avrà un gap (*) quindi la massa non riesce a ritornare allo stesso picco precedente. Se invece in rosso è il caso supercritico $\pi/\pi_{cr} > 1$.



1:34:00

MODELLO SIMULINK

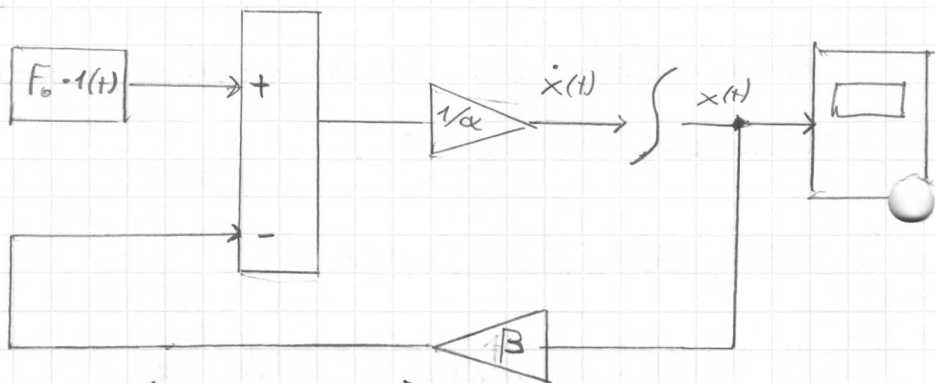
Cerchiamo di risolvere alcuni esercizi visti al calcolatore.

$$1) \alpha \dot{x} + \beta x = F_0 \cdot 1(t)$$

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

Si deve isolare prima la derivata di ordine massimo (qui $\dot{x}$), e
operare secondo lo schema a blocchi:

$$\dot{x} = \frac{F_0 \cdot 1(t)}{\alpha} - \frac{\beta x}{\alpha}$$



Le variabili dipendenti
"viaggia su fili"

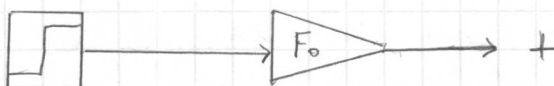
Perché l'informazione data

della somma di $F_0 \cdot 1(t)$ e $-\beta x$ (divisa per α) deve ritornare, integrata,
tutta informazione è proprio $\dot{x}$.

• Caratterizziamo il primo termine:

$$F_0 \cdot 1(t)$$

Signal Step Gain



• Secondo termine:

Per il secondo è meglio lasciarlo in sospeso, poi costruiamo
 $\dot{x}$ e a ritroso ci riportiamo la x (moltiplicata per β) nella
somma.

Le variabili / parametri le diamo in ingresso in Matlab

Ricordiamo che $\alpha/\beta = \tau$

Ma cosa fa l'integrator? Un integrale indefinito:

$$\int_0^t y(t') dt' = Y(t) - Y(0)$$

Di default nel blocchetto $Y(0) = 0$ quindi ci restituisce una funzione continua, ancora dipendente da t (una variabile non un estremo)

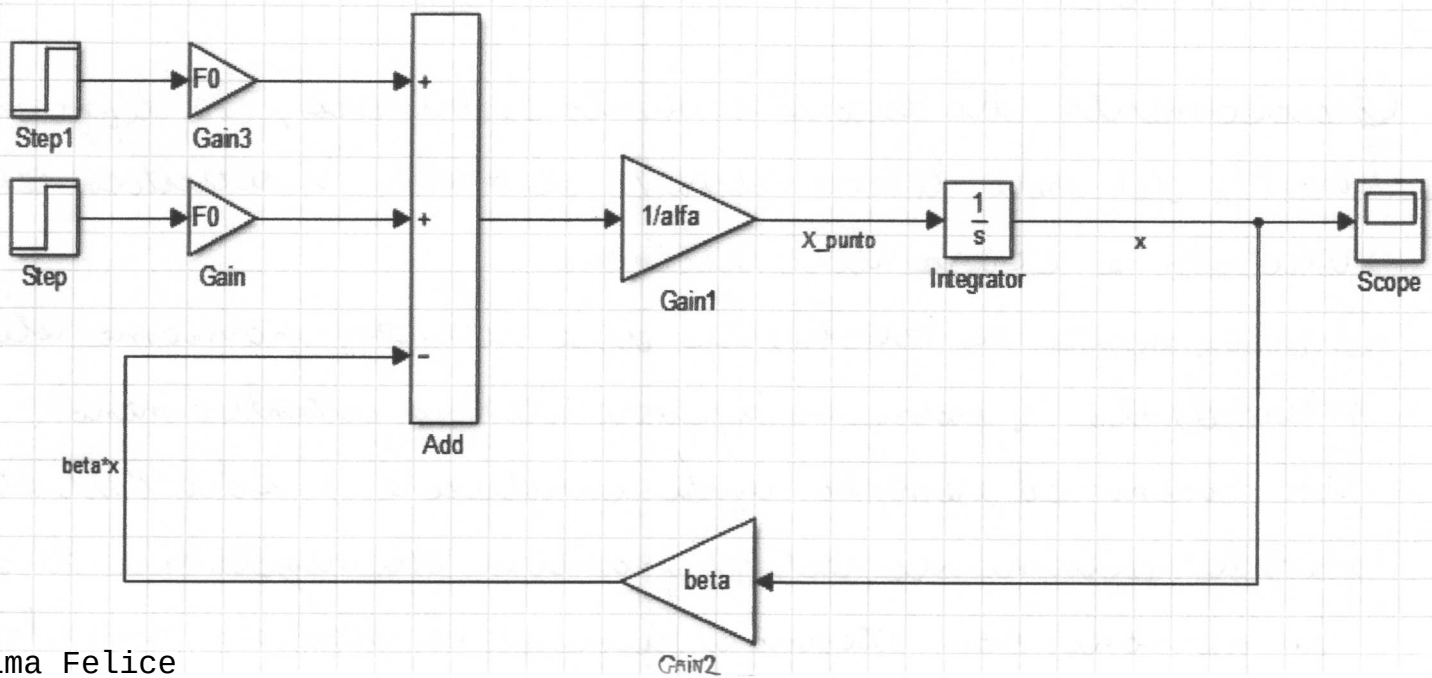
In Simulation $\rightarrow$ Model configuration Parameter

Si possono scegliere vari metodi di integrazione:

- A passo fisso: Sono quelli visti nella seconda lezione (Euler)
- A passo variabile: Sono più evoluti e lo studio si effettua dove la funzione varia in maniera più accentuata. (Il passo è un tempo di calcolo più lungo)

Vedo anche la scritta "Min step size", che definisce la minima ampiezza del Δt in cui integrare (estremi).

Posso anche aggiungere più gradienti come sotto:



⑥ Rivediamo quello del II ordine in simulink

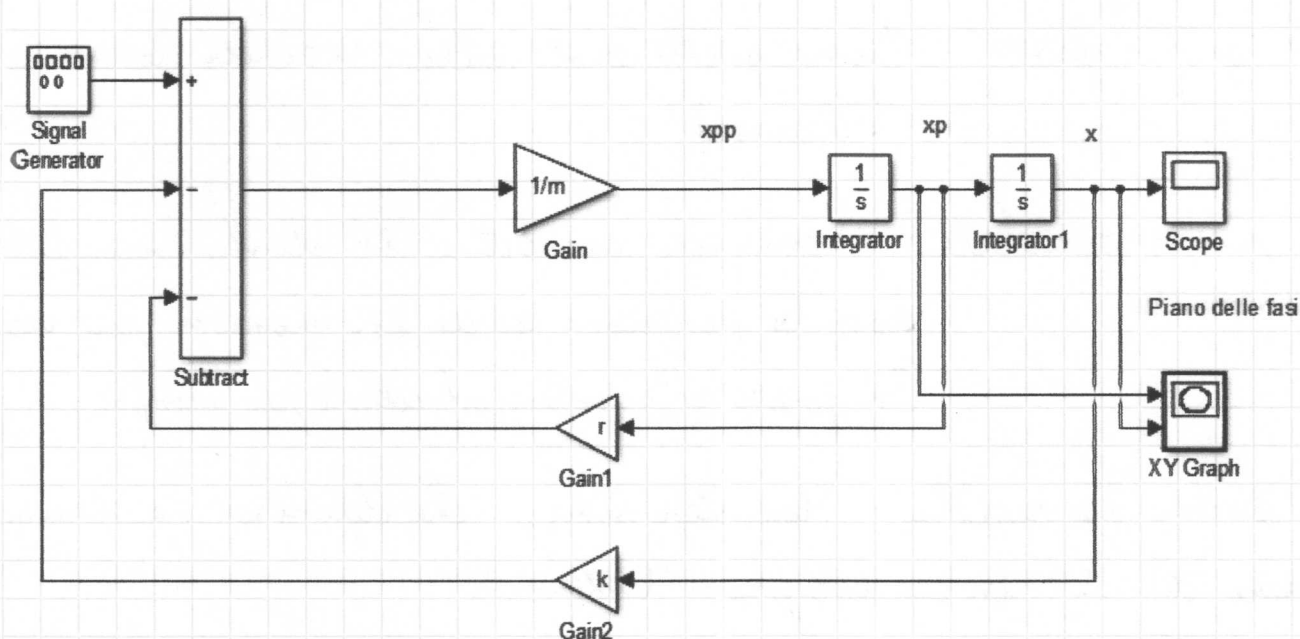
$$2) m \ddot{x} + r \dot{x} + kx = F(t)$$

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

Isolo:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} [F(t) - r \dot{x} - kx]$$

Supponiamo che la $F(t)$ sia un seno (bloccetto signal generator)



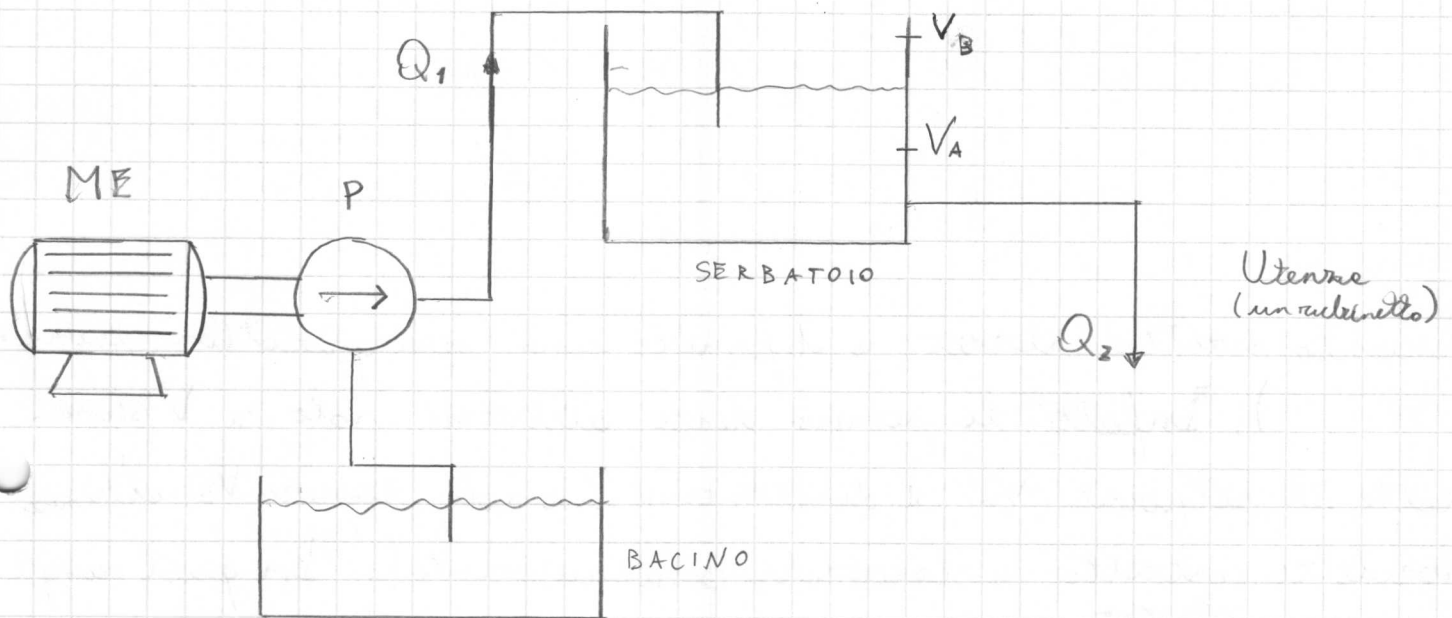
• STRUMENTO DI CONTROLLO DEL LIVELLO DEL LIQUIDO IN UN SERBATOIO

Ovviamente ho uno strumento di misura, che legge il livello del pelo libero rispetto al suolo. Il serbatoio viene svuotato a causa dell'utenza.

Ovviamente la richiesta dell'utenza possiamo solo prevederla (possiamo supporre utenza costante o meno).

Un coseno, ad esempio, rende innaturale l'idea dell'utenza perché assume sia valori positivi che negativi e di certo le persone non stanno a riempire il serbatoio manualmente.

Un altro scopo sarà far sì che il livello non superi un certo valore V_B e che, per motivi di sicurezza non scenda al di sotto di un certo valore V_A .



C'è un motore elettrico (ME) che agendo sulle pompe P è in grado di generare una portata Q_1 e portarle da un bacino. Tale portata si riversa nel serbatoio, del quale viene prelevata una portata Q_2 dell'utente. La variazione del volume nel serbatoio è pari a:

$$\frac{dV}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad \longrightarrow \quad dV = (Q_1 - Q_2) dt$$

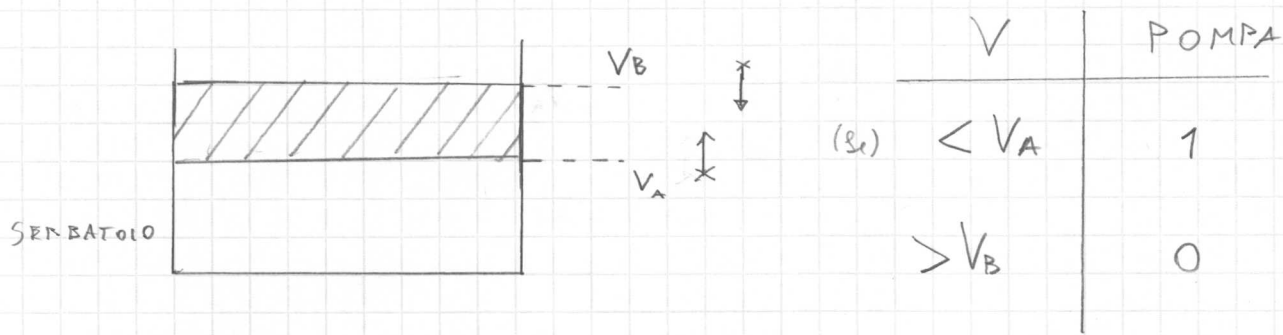
$$V(t) = \int_0^t Q_1(t) dt - \int_0^t Q_2(t) dt + V(0)$$

Q_1 e Q_2 per quanto detto prima sono sempre ≥ 0 o posse egue, in un solo verso, o non posse.

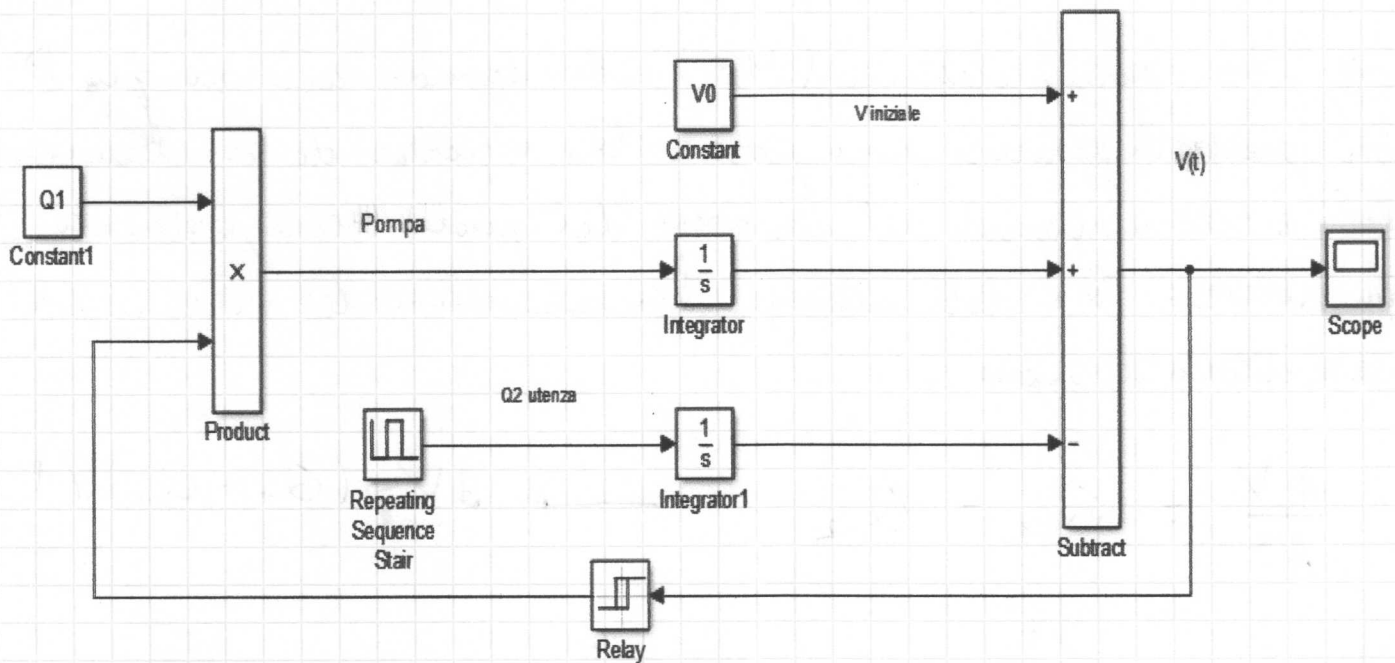
Noi avremo che il motore
quindi la pompa

$\begin{cases} 1 \sim \text{ATTIVATA} \\ 0 \sim \text{DISATTIVATA} \end{cases}$

Ovviamente anche per la massima richiesta dell'utenza la pompa deve garantire il riempimento del serbatoio $\rightarrow$
 $Q_1 \max > Q_2 \max$.



Quanto scritto serve a definire una non operation zone (//////). Infatti la pompa deve attivarsi solo se V scende sotto il setpoint V_A e disattivarsi quando supera V_B , altrimenti sarebbe costretta a lavorare continuamente!. In quel range lo stato ^{della pompa} V non cambia.



Si vede che ho usato il blocchetto Relay: ci serve a regolare l'accensione della pompa in funzione del Setpoint. Poi possiamo ottimizzare l'utenza con un segnale scelto da noi (tipicamente un'onda quadra)

I valori usati del prof sono: $Q_1 = 10 \text{ l/s}$ $Q_2 = 5 \text{ l/s}$
 $V_A = 200 \text{ l}$ $V_B = 300 \text{ l}$ $V_0 = 250 \text{ l}$

⑦ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

È un modo per compattare le proprietà dinamiche in modo semplice. Esso è visto come una funzione $G(s)$ (funzione delle variabili complesse nel dominio di Laplace).

In un sistema SISO:

Definizione:

Si vede come $G(s)$ caratterizza la maniera in cui il sistema dinamico considerato elabora l'ingresso nel

dominio tempo $u(t)$ fornendo in uscita la $x(t)$. Analiticamente è definita come:

$$G(s) \triangleq \frac{\bar{x}(s)}{\bar{u}(s)}$$

È il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita $\bar{x}(s)$ e la trasformata di Laplace dell'

ingresso per condizioni iniziali nulle (D.D.E. a tempo zero). Perché è necessario dire ciò? Altrimenti avremmo bisogno di infinite funzioni di trasferimento. Ogni derivata si porta delle condizioni iniziali dietro (ad esempio del primo ordine 1) ora se ho condizioni iniziali nulle "batteremo" le funzioni di trasferimento, per quel sistema, in ogni caso possibile altrimenti avrei così diversi in funzione delle condizioni iniziali.

1) Esempio (sist. del 1° ordine):

LTI

$$\alpha \dot{x} + \beta x = u(t)$$

divido per β e $\alpha/\beta = \tau$

$$\tau \dot{x} + x = \frac{1}{\beta} u(t)$$

Trasformo nel dominio di Laplace

$$\tau [s\bar{x}(s) - x(0)] + \bar{x}(s) = \frac{1}{\beta} \bar{u}(s)$$

Se C.I. nulle!

$$(\tau s + 1) \bar{x}(s) = \frac{1}{\beta} \bar{u}(s)$$

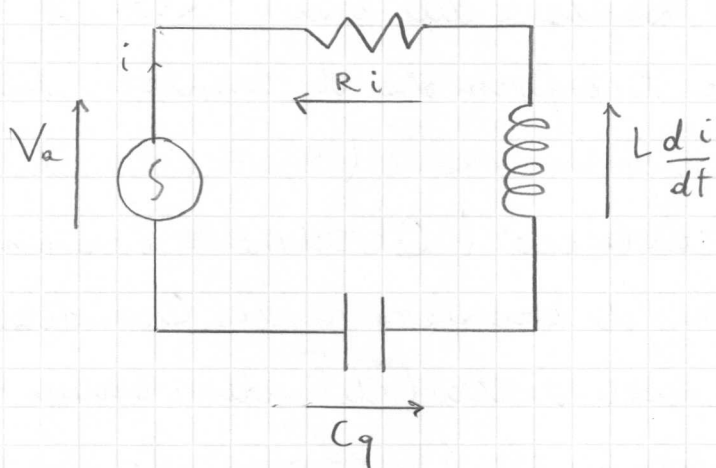
Quindi $G(s)$ è immediata:

$$G(s) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\tau s + 1}$$

$\frac{1}{\beta}$ = guadagno statico

Gli ^{zero} della funzione, o meglio i valori che rendono 0 il denominatore sono detti POLI. Qui ho un solo polo al denominatore $s = -\frac{1}{\tau}$ (rende 0 il denomin.) e nessun 0 al numeratore. Sono importanti per la stabilità del sistema. I valori di s che annullano il numeratore sono gli ZERI.

2) Esempio (II ordine, circuito RCL)



Se come $q = i$ faccio il bilancio alle tensioni:

$$V_a = L i' + R i + C q$$

derivato rispetto al tempo

$$L i'' + R i' + C i = \dot{V}_a$$

forzante

Trasformando:

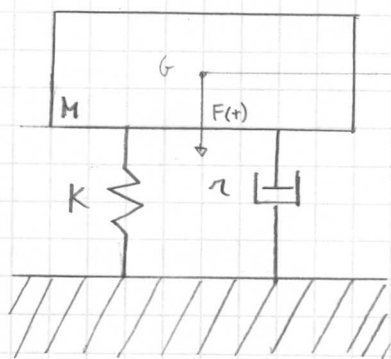
$$L (s^2 \bar{i}(s) - s i(0) - i'(0)) + R (s \bar{i}(s) - i(0)) + C \bar{i}(s) = s \bar{V}_a(s) - V_a(0)$$

Quindi la funzione di trasferimento:

$$G(s) \triangleq \frac{\bar{x}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{\bar{i}(s)}{\bar{V}_a(s)} = \frac{s}{L s^2 + R s + C}$$

1 ZERO
2 POLI

3) Esempio (II ordine, sistema massa, molla smorzatore)



$$G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{1}{Ms^2 + rs + k}$$

Si vede dal denominatore che è del II ordine (lo so mai avessimo già $G(s)$)

Otteniamo visto che in genere l'ordine del numeratore è maggiore di quello del denominatore (nel caso sopra ordini: NUM=0 DEN=2)
Ma è sempre così? Vediamo la generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = K \frac{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

Ci abbiamo messo K davanti per mettere a posto i coefficienti di termini di ordine maggiore (s^m e s^n non sono moltiplicati per niente) come se dovessimo e moltiplicassimo per quello che hanno davanti e lo portiamo come rapporto in K).

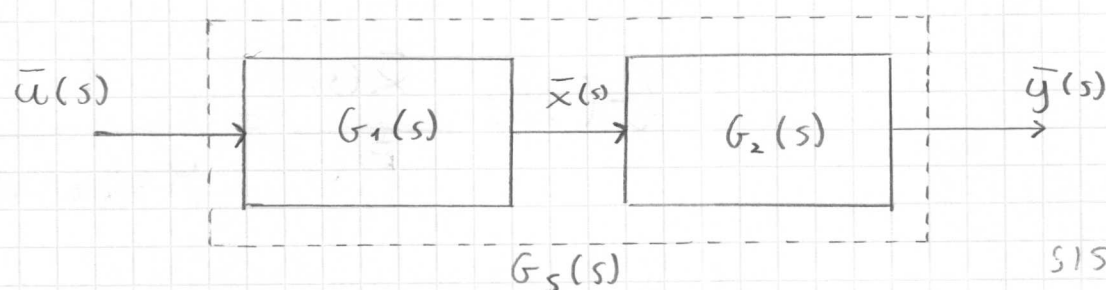
Nella funzione di trasferimento noi troviamo le informazioni utili per caratterizzare il sistema dinamico sia la risposta transitoria che a regime. Praticamente è già la risposta alla domanda: non è che esse ci oscurano le informazioni sul transitorio? Oppure le perdiamo per strada? Prendiamo un sistema dinamico in cui per esempio la $u(t)$ è fatta così:

$$u(t) = u_0 \sin \omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \bar{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Ma se ho noto la $G(s)$ da $\bar{u}(s)$ posso sapere la risposta:

$$G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{u}(s)} \longrightarrow \bar{x}(s) = G(s) \bar{u}(s)$$

Nel caso in cui ho più sistemi in cascata:



SISTEMI IN SERIE

$$G_s(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{G_2(s) \bar{x}(s)}{\bar{u}(s)} = G_1(s) G_2(s)$$

Ho visto che in caso di sistemi dinamici in serie la funzione di trasferimento totale (dal primo ingresso all'ultima uscita) è data dal prodotto delle singole funzioni di trasferimento.

Quindi se ho un circuito elettrico che alimenta una servovalvola e voglio sapere il rapporto tra corrente elettrica in ingresso e lo spostamento della servovalvola posso fare così, senza entrare nel merito della dinamica dei due sistemi.

FINE PARENTE SI

Prendiamo il discorso di prima. $G(s)$ è quello con i polinomi e K :

$$\bar{x}(s) = G(s) \bar{u}(s) = \left[K \frac{s^m \dots}{s^n \dots} \right] u_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} =$$

↗ il seno di prima

- Perché ho preso la funzione armonica, un seno?

Voglio capire se $G(s)$ si porta dietro le informazioni connesse al transitorio.

- Perché posso accorgermene se ho una funzione armonica?

Se il sistema è lineare (altrimenti non avrei $G(s)$) e lo forzo con pulsazione ω , a transitorio estinto, esso dovrà oscillare con pulsazione ω . Otteniamo detto anche che deve essere lineare pure perché in quel caso la forzante viene amplificata dal sistema e restituita a pulsazione ω altrimenti avremmo un ω^2 o $\frac{\omega}{2}$ ecc...

$$= K u_0 \omega \frac{s^m + \dots + a_1 s + a_0}{(s^m + \dots + b_1 s + b_0)(s^2 + \omega^2)} =$$

Si vede che il grado del denominatore a causa del prodotto per s^2 sarà: $n+2$. A fiducia del prof $n > m$ sempre.

Posso scrivere:

$$K u_0 \omega \frac{(s-z_1) \cdot \dots \cdot (s-z_m)}{(s-p_1) \cdot \dots \cdot (s-p_m) \cdot (s+i\omega) \cdot (s-i\omega)}$$

Se ho una funzione del genere:

$$\frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta} = \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Dove p_1 e p_2 sono i poli e sono 2 perché s^2 di secondo ordine. Se non avessi 1 al numeratore farei lo stesso con gli zeri.

Il denominatore qui sono due termini in più dovuti alla scomposizione di $(s^2 + \omega^2)$ infatti se faccio il prodotto notevole $(s+i\omega)(s-i\omega)$ ho proprio $(s^2 + \omega^2)$.

Posso ancora vederlo (leggendo a destra) come somma di più termini che hanno al denominatore ogni singolo prodotto e ne ho due in più!

Puo' ancora essere scritto come

$$= \frac{A}{(s-p_1)} + \frac{B}{(s-p_2)}$$

Si sviluppa per frazioni semplici

$$= K u_0 \omega \left[\frac{h_1}{s-p_1} + \frac{h_2}{s-p_2} + \dots + \frac{h_n}{s-p_m} + \frac{h_{n+1}}{s+i\omega} + \frac{h_{n+2}}{s-i\omega} \right]$$

Ma per i nostri scopi voglio vederlo nel dominio tempo allora devo antitrasformare:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ K u_0 \omega \left[\dots \right] \right\} =$$

Se vediamo bene riconosciamo la trasformata dell'esponenziale:

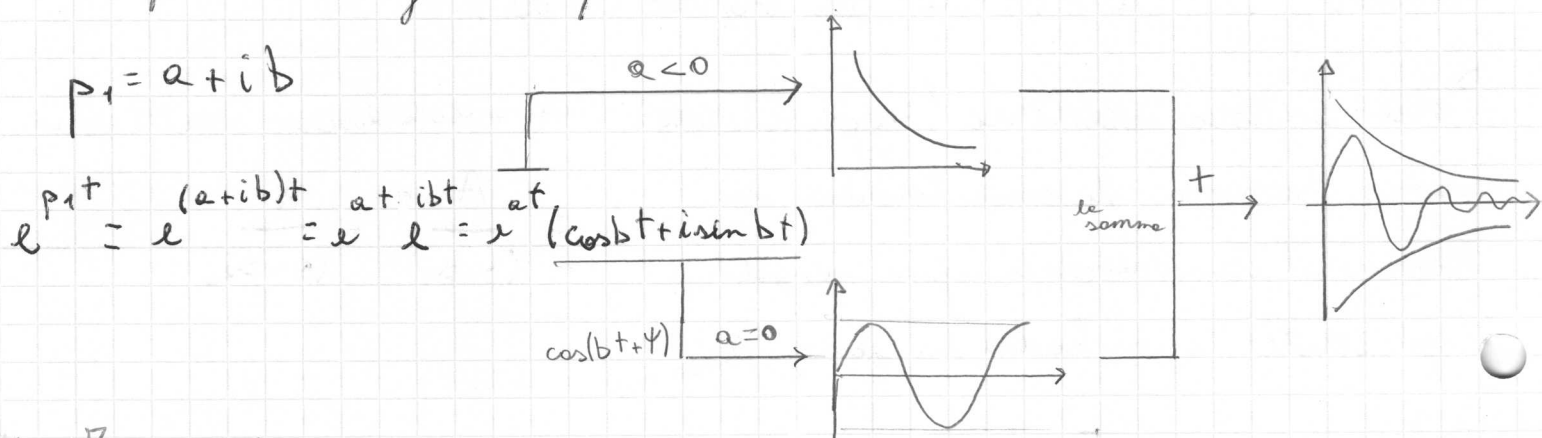
$$\mathcal{L}[e^{\pm \alpha t}] = \frac{1}{s \mp \alpha} \xrightarrow[\text{ho } p]{\text{il posto di } \alpha} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{h_1}{s-p_1}\right] = h_1 e^{p_1 t}$$

Quindi:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\} = K u_0 \omega \left[\underbrace{h_1 e^{p_1 t} + h_2 e^{p_2 t} + \dots + h_m e^{p_m t}}_{*} + \underbrace{h_{m+1} e^{-i\omega t} + h_{m+2} e^{i\omega t}}_{*} \right]$$

Per i nostri casi i poli hanno sempre parte reale minore di 0 $\text{Re}(p_k) \leq 0$. Infatti i poli sono complessi perché sono quelli che rendono 0 s che è un complesso. Quindi col tempo va a 0.

La parte immaginaria, per eulero, è un'oscillazione:



* Termini da 1 a n

Quindi tutti gli n termini, dovuti agli n poli sono responsabili del transitorio in quanto hanno parte reale $a < 0$ e quindi andranno ad estinguersi. $h_1 e^{p_1 t} \dots \rightarrow$ **TRANSITORIO**

* Termini da $n+1$ in poi

due (nel nostro caso) termini rimanenti secondo eulero danno luogo a termini oscillanti con pulsazione ω della forzante $h_{n+1} e^{-i\omega t} \dots \rightarrow$ risposta a **REGIME**

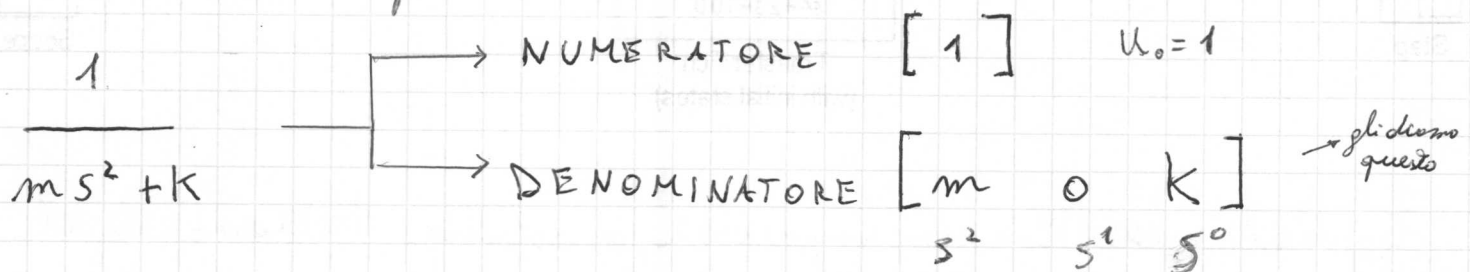
Quindi la funzione di trasf. è adatta a rivelare anche i transienti.

ESERCIZIO ESEMPLIFICATIVO

Il blocchetto da usare per la funzione di trasferimento si trova in:

SIMULINK EXTRAS / ADDITIONAL LINEAR / TRANSFER FUNCTION WITH INITIAL STATES

Esso funziona in modo intelligente: più sa che al numeratore e al denominatore vi è un polinomio in s quindi chiede in ingresso solo i coefficienti davanti ed esse fornisce un vettore. Esempio:



ESERCIZIO SERBATOIO

Questa volta ci occupiamo di un caso reale: il sensore che vede il volume ha un ritardo:

$$\tau \dot{V}_R(t) + V_R(t) = V(t)$$

La V che arriva al Relay (V_R) arriva con un certo ritardo rispetto alla V vera $[V(t)]$ in ingresso.

Istantaneamente si traduce in questa funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

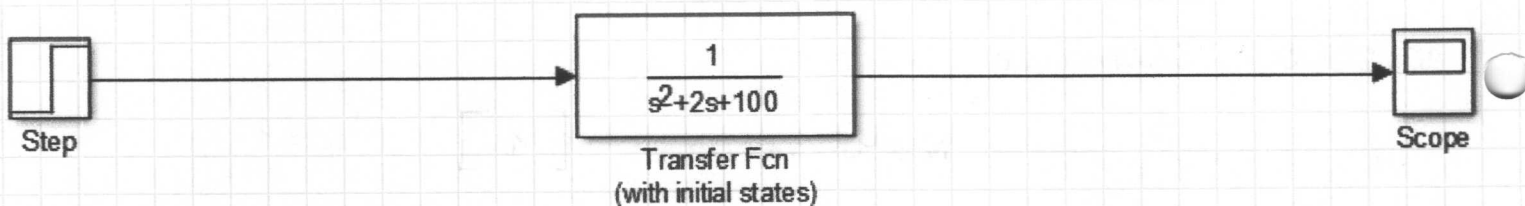
$\rightarrow V(t)$ non è moltiplicato per niente ha guadagno unitario

Facciamo però un ragionamento fisico:

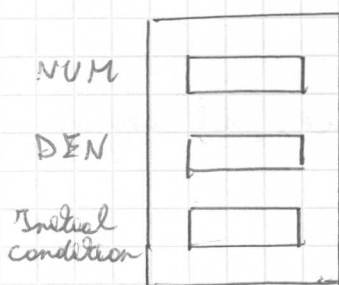
Un attuatori deadinamico ha dinamiche molto lente tipicamente (per spostare una massa di 100 Kg impiega 5 secondi) mentre i sensori sono molto rapidi (ritardi dell'ordine di millisecondi) quindi ci si aspetta che tale ritardo del sensore non incida sulla dinamica. E invece no il sistema se ne accorge e come, il sistema non riesce a non sfiorare i due setpoint V_B e V_A .

Prima di arrivare al serbatoio vediamo qualche esempio

1) M K R del II ordine ($m=1$ $r=2$ $k=100$):



E' stato scelto un ingresso a gradino. Notiamo che il blocchetto Transfer Fcn e' del tipo:



Ci da la possibilita' di aggiungere una condizione iniziale ma solo sulla posizione o $x(0)$ non su tutte le bottoni di condizioni iniziali. Inoltre dallo scope vedo che se

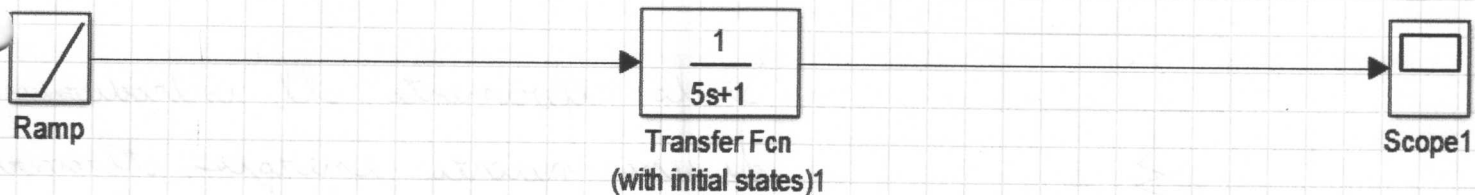
metto $x(0)=1$ non risulta effettivamente 1. E' causato dal guadagno statico! In pratica:

$$X_{\text{SIMULINK}}(0) = x(0) \cdot 1/m$$

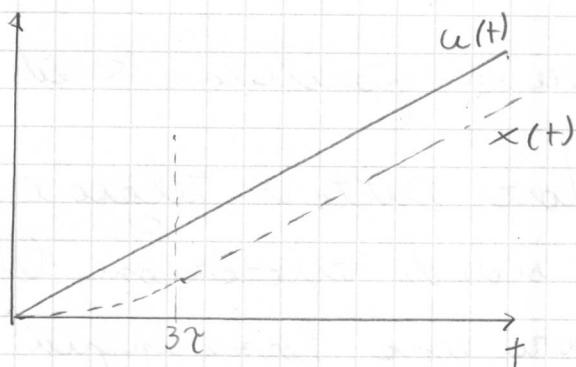
Simulink le vede gia' cosi' (deciso per m)

Quindi se voglio dire che $x(0)$ e' un metro devo "dargli in posto" $1 \cdot m$ nella terza casella (Initial condition).

2) Sistema del I ordine con ingresso Rampa:



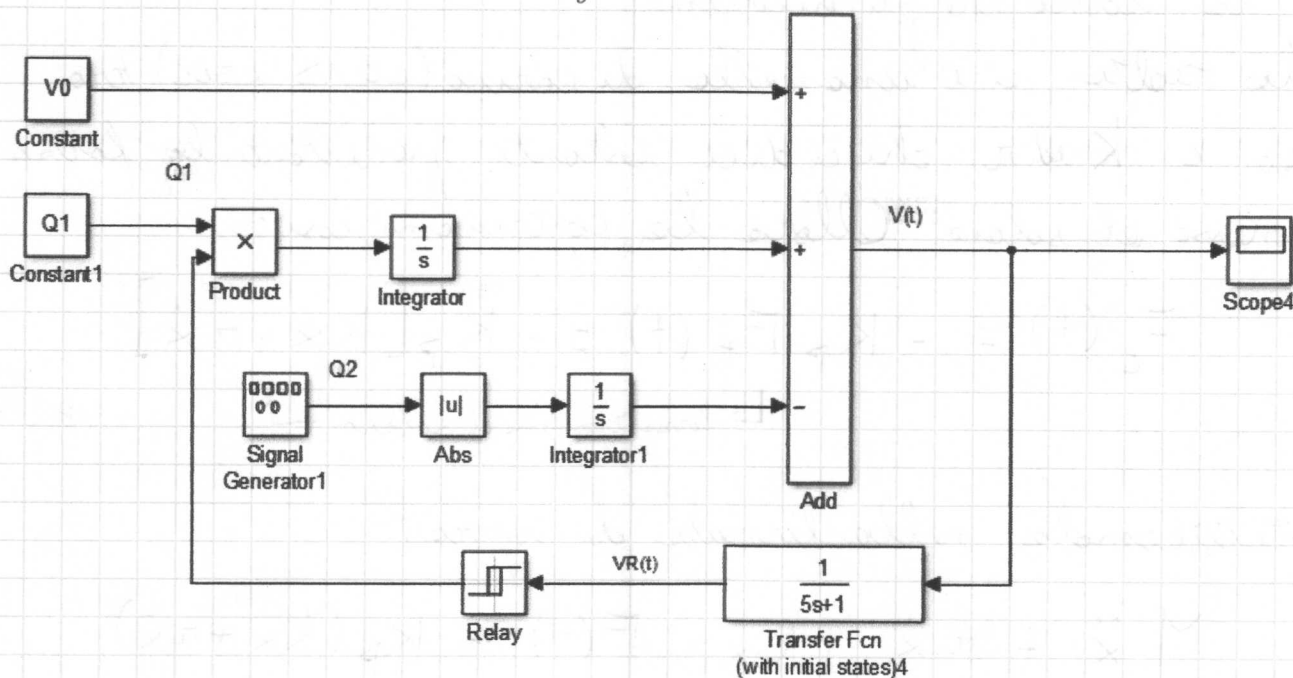
Si nota dallo scope che dobbiamo un grafico del genere:



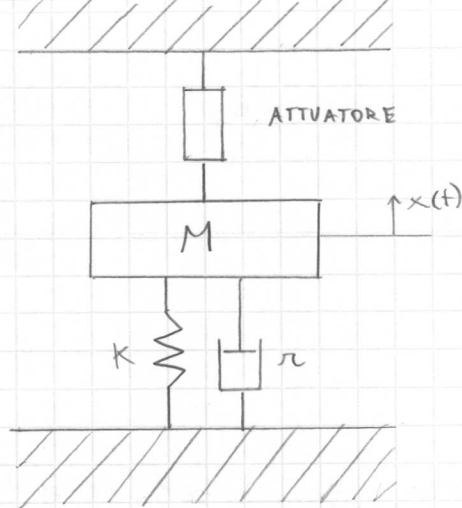
La $x(t)$ parte con tangente nulla ($x(0)=0$) e ci mette un po' a recuperare $u(t)$ a causa del ritardo. A 3τ l'ha praticamente recuperato. (99%)

Inoltre devo stare attento se voglio rappresentare ingresso e uscita sullo stesso grafico (ho scale diverse) devo moltiplicare per il guadagno statico.

3) Serbatoio (i dati sono gli stessi dell'altra volta):



8



CONTROLLO ATTIVO DELLA FORZA TRASMESSA

Si fa riferimento all'introduzione di una nuova energia, attraverso un attuttore, che viene modulata attraverso una logica di controllo che andiamo ad implementare.

• Isolamento passivo con attuttore in parallelo a K ed r :

Partiamo dal caso di sopra dove tutto il telaio è fisso e la macchina di massa M è sede di vibrazioni $F(t)$. Oltre alle classiche equazioni ci sarà una forza in più:

$$M \ddot{x} + r \dot{x} + Kx = F(t) + F_c(t)$$

Si è aggiunta la forza di controllo $F_c(t)$. Non sappiamo ancora la legge di forza ma sappiamo che l'attuttore è pronto a dare le forze che gli chiediamo.

Nella realtà c'è una cella di carico (LOAD CELL) tra soleno e K ed r che ci dice istante per istante la forza trasmessa al soleno. Allora la costruiamo così:

$$F_c(t) = -K_p F_r(t) = -K_p [Kx + r\dot{x}]$$

↳ forza trasmessa al soleno $\rightarrow$

$$K_p > 0$$

Sostituiamola nelle formule di sopra:

$$M \ddot{x} + r \dot{x} + Kx = F(t) - K_p (Kx + r\dot{x})$$

Riordinando i termini

$$M \ddot{x} + r(1+K_p) \dot{x} + K(1+K_p)x = F(t)$$

Scriviamone la trasformata:

$$G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{1}{Ms^2 + r(1+K_p)s + K(1+K_p)}$$

Ricorda che senza $F_c(t)$:

$M \ddot{x} + r \dot{x} + Kx = F(t)$ ha trasformata

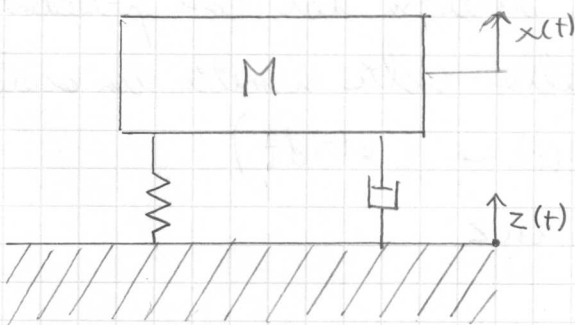
pari a $G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{1}{Ms^2 + rs + K}$
per condiz. iniziali nulle.

Nel controllo attivo la grandezza importante per vedere la bontà delle nostre azioni è la trasmissibilità: essa coincide con questa trasformata

$$T(s) = \frac{\bar{F}_+(s)}{\bar{F}_-(s)} = \frac{(rs + K) \bar{x}(s)}{[Ms^2 + r(1+K_p)s + K(1+K_p)] \bar{x}(s)}$$

È il rapporto tra l'uscita (forze trasmesse) e ingresso. È una forzato perché se, come nei sistemi convenzionali, avessi cambiato rigidità K e smorzamento r avrei ottenuto lo stesso cambiamento al numeratore che, in questo caso, invece, resta immutato.

• CONTROLLO ATTIVO (SKYHOOK DAMPING)



Stavolta è il suolo che muovendosi genera vibrazioni ($z(t)$) e si vuole far sì che M galleggi restando ferma.

Senza attuatori e sensori:

$$M \ddot{x} + r(\dot{x} - \dot{z}) + K(x - z) = 0$$

È la forzante dove?

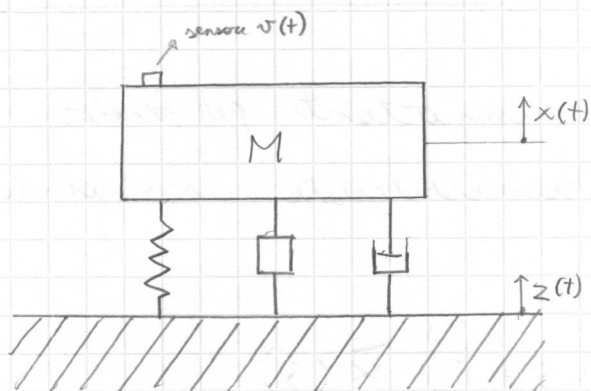
$$M \ddot{x} + r \dot{x} + Kx = r \dot{z} + Kz \rightarrow \text{ecco!}$$

In questo caso la trasmissibilità:

$$T(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{z}(s)} = \frac{rs + K}{Ms^2 + rs + K}$$

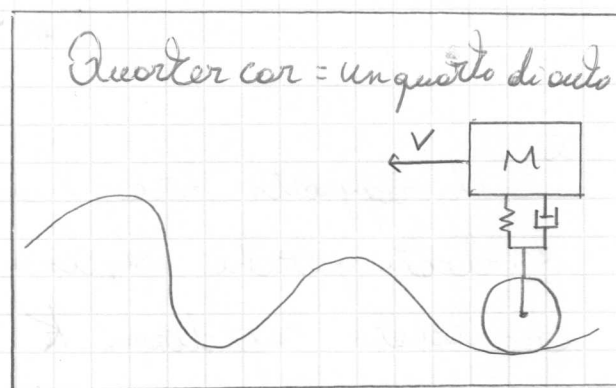
Per conduttori ideali
nulle!

Con attuttore e sensore:



Il sensore che mettiamo è di velocità, misura la $v(t)$. Si vede che questo SKY-HOOK, il penco che tiene sopra la molla è ideale, in realtà l'attuttore viene messo sotto, non sopra.

Questo sistema modella bene anche il sistema Quarter car dove si studia il moto della sospensione nel caso di un terreno sconnesso (la frequenza delle sconnessioni deve essere lontana dalle ω_n della sospensione).



L'attuttore aggiunge una $F_c(t)$:

$$K_p > 0$$

$$M\ddot{x} + r(\dot{x} - \dot{z}) + K(x - z) = F_c(t) = -K_p \dot{x}(t)$$

Questa $F_c(t)$ è pari a $-K_p \dot{x}(t)$, diversa dal caso precedente e collegata alla misura di velocità (nella realtà si mette un accelerometro e la $v(t)$ si ottiene integrando la $a(t) \rightarrow \int_0^t a(t) dt$).

Isoliamo i termini in x e i termini in z :

$$M\ddot{x} + (r + K_p)\dot{x} + Kx = r\dot{z} + Kz$$

Invia la trasmissibilità:

$$T(s) = \frac{\pi s + K}{Ms^2 + (\pi + K_p)s + K} = \frac{\bar{X}(s)}{\bar{Z}(s)} \rightarrow \text{Per condizioni iniziali nulle.}$$

Qui K_p "aggrava" solo la s

- FRF (frequency response function - funzione risposta in frequenza)
detta anche funzione di trasferimento armonica

Quell'"armonica" nel nome ci dice tutto perché fa riferimento ad 1 frequenza / 1 pulsazione di una legge armonica. Vale per tutti i sistemi dinamici, non solo i meccanismi.

È valida solo in condizioni di regime e guarda l'evoluzione del rapporto ingresso/uscita al variare della frequenza.

Noi i grafici di questa funzione li rappresentiamo: sono i DIAGRAMMI DI BODE (uno da l'ampiezza e l'altro fase).

Come si ottengono dallo trasformata?

Se ricordiamo i termini dello sviluppo in fratti semplici:

$$\dots + \frac{h_{m+1}}{s - i\omega} + \frac{h_{m+2}}{s + i\omega}$$

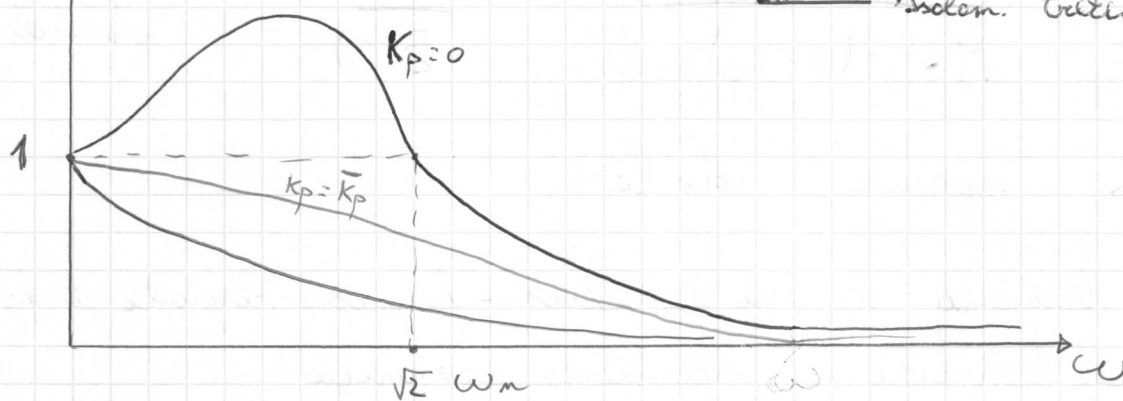
Questi ultimi due termini, particolarizzati per una certa ω^* generica, quindi per

$s = i\omega^*$ ci danno la risposta che cerchiamo. Senza introdurre altro. Invece di mettere l'asterisco generalizziamo e diciamo per $s = i\omega$.

Andiamo a rappresentare la $T(i\omega)$, la trasmittanza per $s = i\omega$. Distinguiamo tre casi:

- Isolamento passivo: $K_p = 0$ niente controllo (solo determinatori e K)
- Isolamento attivo: $K_p = \bar{K}_p$ una certa K_p (attuatore)
- Isolamento attivo: $\pi \gg \pi_{cr}$ in genere si esiste!

$|T(i\omega)|$



Isolam. Passivo
Isolam. Attivo
Isolam. Critico

Con il controllo attivo ho ampiezze in uscita minore di quella in ingresso ($|T(i\omega)| < 1$) sia in risonanza che a destra della risonanza. Praticamente la curva rossa è sempre sotto l'uno.

Ora scriviamo la $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + \pi s + K}$$

Particolarizzandola per $s = i\omega$:

$$G(i\omega) = \frac{1}{M(i\omega)^2 + \pi i\omega + K} = \frac{1}{-M\omega^2 + \pi i\omega + K}$$

Ora il denominatore ha dimensioni omogenee ^{è una somma} e pari a quelle di K ($\frac{F}{L}$) una forza per una lunghezza, quindi G ha le dimensioni di $\frac{L}{F}$ ossia il suo inverso.

Noi non vogliamo altre dimensioni, deve valere per tutti i casi quindi:

$$|G(i\omega)| \cdot K = \frac{1}{\left| -\frac{M}{K}\omega^2 + \frac{\pi}{K}i\omega + 1 \right|}$$

ho moltiplicato anche i membri per K

Il denominatore ha un numero complesso

$$\begin{cases} Re = 1 - \frac{M}{K}\omega^2 \\ Im = \frac{\pi\omega}{K} \end{cases}$$

Il suo modulo è dato dalla somma dei quadrati di Im e Re sotto radice.

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{M}{K} \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\pi}{K} \omega\right)^2}}$$

Ora dobbiamo far uscire
lo¹) ω_m e lo²) π_{cr}

1) $\sqrt{\frac{K}{M}} = \omega_m$ $\frac{M}{K} = \left(\frac{1}{\omega_m}\right)^2$

2) Mentre prendo $\frac{\pi}{K}$ moltiplico e divido per $\pi_{cr} = 2\sqrt{Km}$:

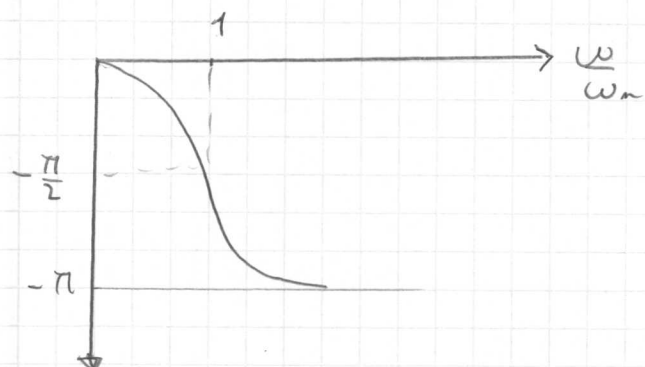
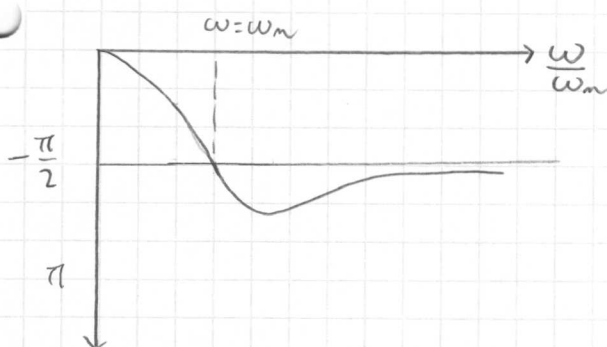
$$2 \frac{\pi}{\pi_{cr}} \frac{\sqrt{KM}}{K} = 2 \frac{\pi}{\pi_{cr}} \sqrt{\frac{M}{K}} = 2 \left(\frac{\pi}{\pi_{cr}}\right) \frac{1}{\omega_m} = \frac{2h}{\omega_m}$$

Sostituiamo entrambi:

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \left(2h \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}}$$

RISPOSTA A REGIME PER
INGRESSI / FORZE ARMONICI
DI PULSAZIONE ω

Il prof Plotta la risposta per varie pulsazioni (rapporti $\frac{\omega}{\omega_m}$)
e nota una cosa nelle fasi:



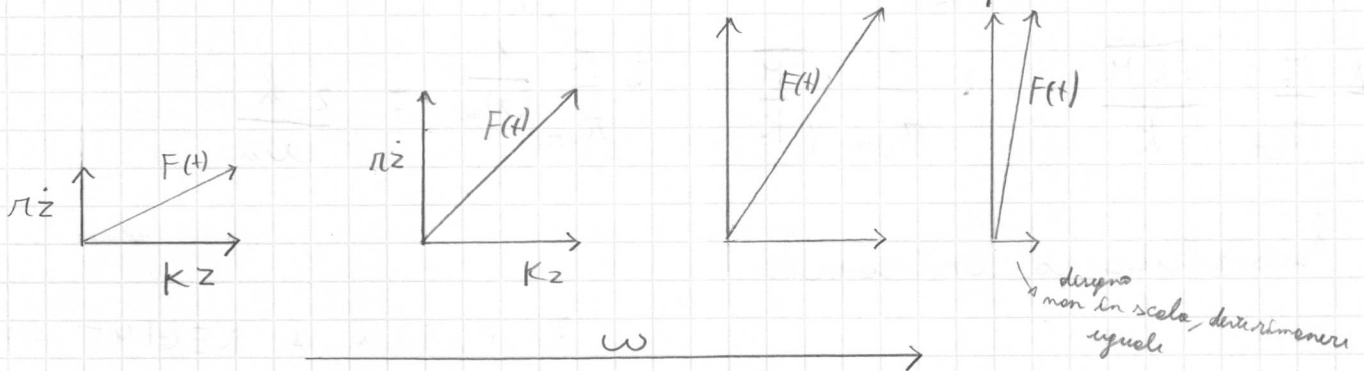
Noi ci aspettiamo che in zona sismografica ($\omega \gg \omega_m$) l'andamento
è come a destra (sfasamento di $-\pi$) mentre a sinistra come a sinistra
con sfasamento per $\omega \rightarrow \infty$ pari a $-\frac{\pi}{2}$. Questo succede perché
noi stiamo considerando come forzante il solo mobile
e questo comporta che la nostra forzante è:

$$F(t) = r \dot{z}(t) + K z(t)$$

Se la legge con cui si muove il sollecito è $z(t) = Z_0 \cos \omega t$ si ha che $\dot{z}(t) = -Z_0 \omega \sin \omega t$. (lo derivate).

Quindi nel caso di pura forzante armonica l'ampiezza è costante e ω è solo nell'argomento del coseno, qui invece influenza l'ampiezza:

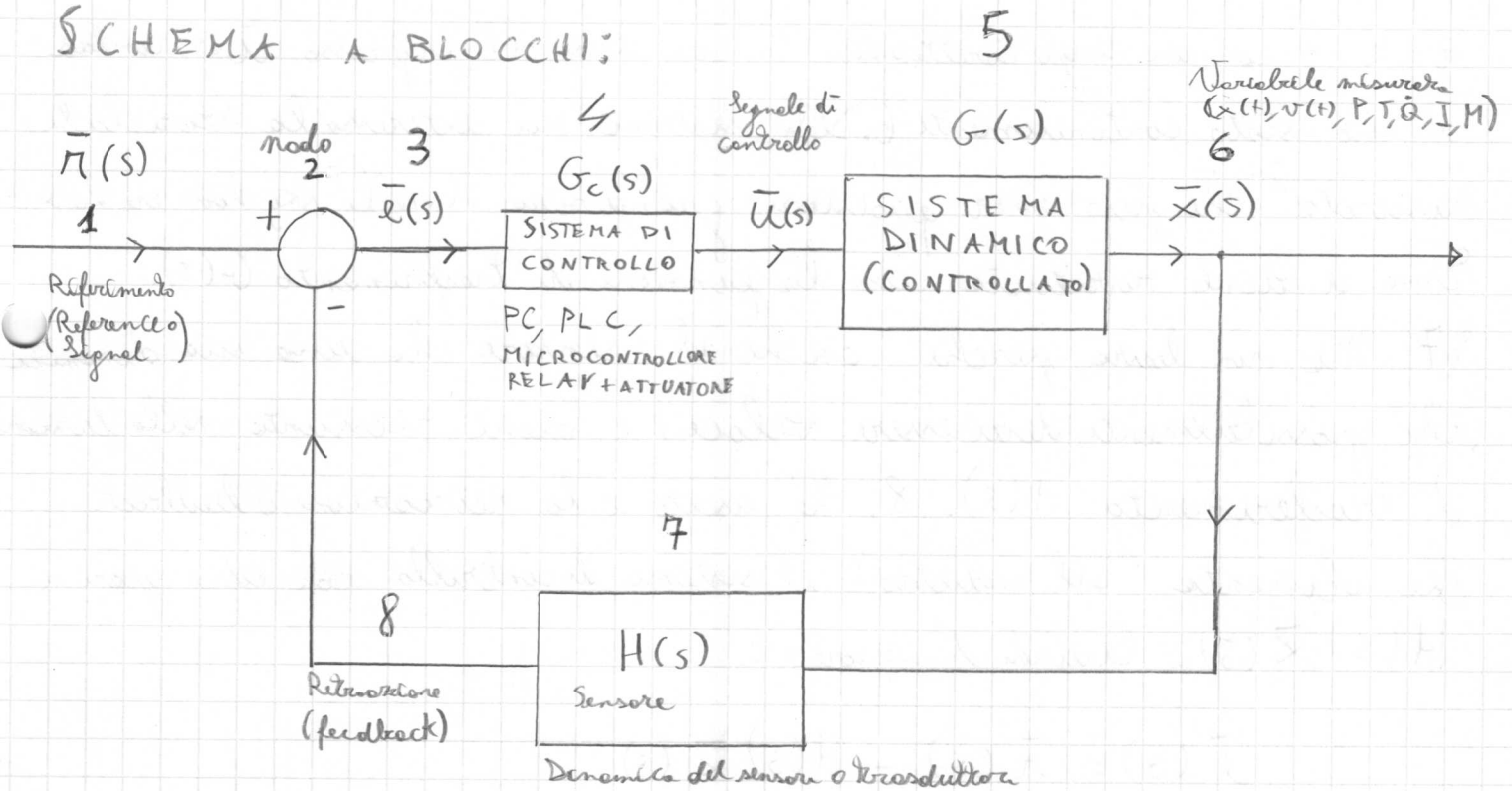
Inoltre z e $\dot{z}$, seno e coseno, sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$ quindi la loro somma:



Al crescere di ω l'ampiezza di z è costante mentre quella di $\dot{z}$ no, quindi crescerà in modulo e tenderà a raddoppiare $F(t)$ finché non coinciderà proprio con $r\dot{z}$ che ha fase proprio $-\frac{\pi}{2}$.

⑨ La mecatronica è la disciplina che studia come condizionare i sistemi meccanici mediante attuatori in presenza di sensori evoluti e di un algoritmo di controllo che sia implementato in un adeguato dispositivo.
Ma come si fa? :

SCHEMA A BLOCCHI:



Partiamo da in alto a sinistra :

1. Il tutto parte da un referimento $\bar{r}(s)$, una legge desiderata (nel tempo) che pretendiamo che la x assuma. Se prendiamo la massa dello SKY HOOK DAMPING, in assenza di controllo, (di attuatori) essa vibrerebbe secondo le leggi della dinamica condizionate da r, k, M e lo scuotimento $z(t)$. Se il riferimento era 0 (si vuole la massa ferma) e quindi si vuole che la $x(t)$ raggiunga quel riferimento nonostante il sollecito mobile. 2. Allora si introduce un modo di confronto che grazie al feedback del sensore permette di elaborare un errore $\bar{e}(s)$ che è l'input del sistema di controllo che è la nostra unità presente, che elabora una uscita utile ed avvicinare

$\bar{X}$ ed $\bar{r}$. Fino a qui avevamo una zona di parametri "lasciati", le basse tensioni, piccoli segnali elettrici, di qualche millionipere. Da qui in poi abbiamo una zona (potenzialmente) degli "alti": attuatori idraulici che danno momenti elevatissimi e altre grandezze elevate! Esso ha la sua funzione di trasferimento $G_c(s)$.

5. Il sistema dinamico evolve (in base ai suoi parametri, per esempio r, K, M , con un tempo caratteristico τ) in base all'ingresso $\bar{u}(s)$ cambia il suo stato continuamente. 6. Del sistema a noi interessa la variabile misurata $\bar{x}(s)$ che può essere qualsiasi grandezza (nello sky hook era la $x(t)$). Essa ci viene restituita con la funzione di trasferimento $G(s)$.

7. Ma non basta perché anche il sensore ha una sua dinamica (che possibilmente deve essere veloce) e viene riassunta nella funzione di trasferimento $H(s)$. 8. L'uscita e la retroazione o feedback che alimenta "all'indietro" il sistema di controllo ed è pari a $H(s) \cdot \bar{x}(s)$. Quindi l'errore è:

$$\bar{e}(s) = \bar{r}(s) - H(s) \bar{x}(s)$$

Quindi definiamo:

• FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO APERTO
OPEN LOOP OL (senza sensore)

→ guardiamo solo il tratto 3, 4, 5 (entro $\bar{e}(s)$ esce $\bar{x}(s)$)

Osserviamo un attimo il sensore: l'errore passa per s e s :

$$G_{OL}(s) \triangleq \frac{\bar{x}(s)}{\bar{e}(s)} = G_c(s) G(s)$$

In questo caso l'anello, il loop non si chiude. È solo un feed forward (alimentatore "in avanti",)

Vediamo il caso del disegno di prima quindi:

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO CHIUSO (CLOSED LOOP) (L)

In tutto l'anello chiuso entra $\bar{r}(s)$ ed esce $\bar{z}(s)$ quindi:

$$G_{cl}(s) \triangleq \frac{\bar{z}(s)}{\bar{r}(s)}$$

Per chiamare di ricavare tale rapporto. Sappiamo che

$$\bar{e}(s) = \bar{r}(s) - H(s) \bar{z}(s)$$

È dell'open loop:

$$\frac{\bar{z}(s)}{\bar{e}(s)} = G_c(s) G(s) \longrightarrow \bar{z}(s) = G_c(s) G(s) \bar{e}(s) =$$

Sostituisco $\bar{e}(s)$:

$$\bar{z}(s) = G_c(s) G(s) [\bar{r}(s) - H(s) \bar{z}(s)] =$$

$$\bar{z}(s) = G_c(s) G(s) \bar{r}(s) - \underbrace{G_c(s) G(s) H(s)}_{\text{}} \bar{z}(s)$$

Da qui dobbiamo ricavare $\bar{z}(s)/\bar{r}(s)$. Porto questo a sinistra:

$$\bar{z}(s) [1 + G_c(s) G(s) H(s)] = G_c(s) G(s) \bar{r}(s)$$

Si vede quanto vale $\bar{z}(s)/\bar{r}(s)$ quindi:

$$G_{cl}(s) \triangleq \frac{\bar{z}(s)}{\bar{r}(s)} = \frac{G_c(s) G(s)}{1 + G_c(s) G(s) H(s)}$$

STABILITA' DEL SISTEMA

Orizziamo detto che i poli della funzione di trasferimento erano importanti ai fini della stabilità. Vediamo con un esempio:

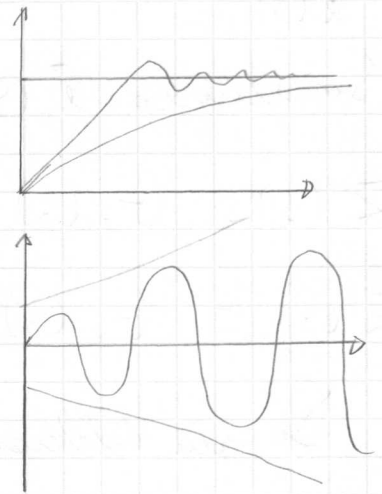
$$m \ddot{x} + \underset{\substack{\downarrow \\ *}}{\pi} \dot{x} + Kx = F(t) \longrightarrow G(s) = \frac{1}{ms^2 + \pi s + K}$$

Si vede che trovare i poli (gli s che rendono 0 il DENOMINATORE) è lo stesso che risolvere l'omogenea associata alla $*$ dove al posto di λ abbiamo s !

I poli quindi in generale saranno numeri immaginari. Se la loro parte reale è negativa vuol dire che gli esponenziali vanno a spegnersi;

$$\overset{\text{Poli}}{\text{Re}(P_k)} < 0 \quad \text{STABILE}$$

$$\text{Re}(P_k) > 0 \quad \text{INSTABILE}$$



Nel caso di sistemi m, π, K

$\text{Re}(P_k) < 0$ sempre! In genere l'instabilità insorge con un controllo con attuatori.

E se abbiamo una funzione di trasferimento tipo quella delle pagine precedenti $G_{cl}(s)$ come facciamo a discuterne l'instabilità? Noi vorremmo che il sistema converga invece qui può capitare che diverge.

Si usa il:

CRITERIO DI STABILITA' DI NYQUIST

Lo rimandiamo ad un'altra lezione. Dobbiamo introdurre prima il

DIAGRAMMA (POLARE) DI NYQUIST

Nei diagrammi di Bode rappresentiamo modulo e fase diversi (in due diagrammi):

$$\text{BODE} \begin{cases} \Phi = |G(i\omega)| & \text{MODULO } (g) \\ \delta = \angle G(i\omega) & \text{FASE } (\theta) \end{cases}$$

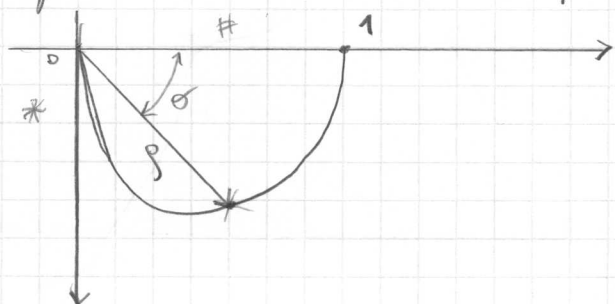
Invece Nyquist vuole rappresentare entrambi in un colpo solo. Il modulo e la fase di una funzione di risposta in frequenza. Rappresenta quindi:

$$(g, \theta) = (|G(i\omega)|; \angle G(i\omega))$$

Dove g = Raggio (del vettore) e θ = anomalia //

In sostanza quindi rappresenta la funzione con un vettore il cui raggio è il modulo ($|G(i\omega)|$) e l'angolo/anomalia è la fase. Eccoci un esempio per una funz. del 1° ordine:

In questo caso la fase della risposta è sicuramente negativa (in ritardo) quindi ci serve solo il 4° quadrante.



$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega^2}}$$

$$\angle G(i\omega) = -\tan^{-1}(\Omega\tau)$$

$$\text{Se } \Omega = 0 \Rightarrow g = 1 \quad \theta = 0 \quad \text{Vettore orizzontale}$$

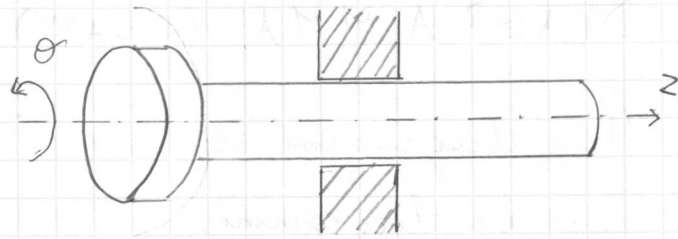
$$\text{" } \Omega = \infty \Rightarrow g = 0 \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{Vettore * verticale}$$

Altrimenti casi intermedi *

10) CONTROLLO D'ASSE / PD (proporz. derivata)

Perché controllo d'asse? Perché lo particolarizziamo per un sistema rotante (a 1 G.D.L.) intorno a Z e la sua coordinata lagrangiana è θ . (figura di destra)

Da notare che un controllo proporz. l'avremmo introdotto già con K_P nello SKYHOOK DAMPING e nel CONTROLLO DELLA FORZA TRASMESSA.



Purtroppo lì non era chiaro il concetto di errore. Introduciamo prima l'equazione del moto (in assenza di attuatori):

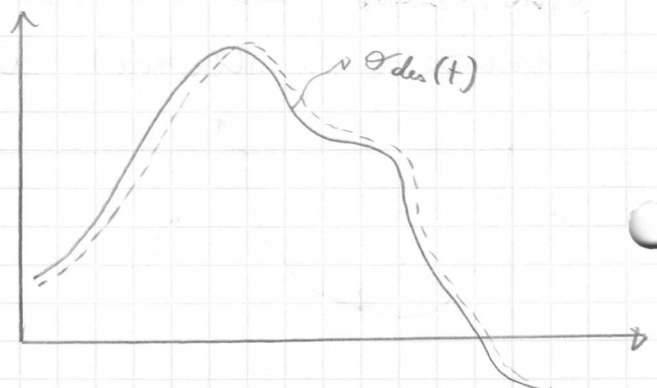
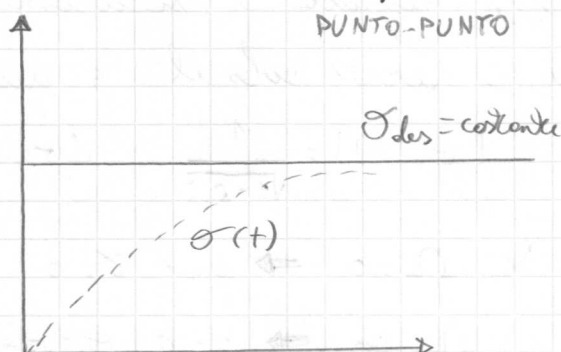
$$J \ddot{\theta} + f \dot{\theta} = -d_0$$

- J = momento d'inerzia
- f = azione smorzante viscosa
- d_0 = è un disturbo (una costante) il - è per comodità

Lo scopo è quello di raggiungere una θ di riferimento che chiameremo θ_{des} (desiderata). Allora l'errore:

$$e(t) = \theta_{des}(t) - \theta(t)$$

Cercheremo di fare un controllo di posizione punto-punto, ovvero θ_{des} non è funzione del tempo e lo voglio raggiungere:



Nel caso di destra invece dovrei inseguirla, e li entra in gioco anche la velocità di θ_{des} .

• Caso $\theta_{des} = \text{costante}$.

Completare l'errore e in particolare le sue derivate perché le derivate di una costante è 0. Derivato e (+)

$$* \quad \dot{e} = -\dot{\theta} \quad \ddot{e} = -\ddot{\theta}$$

Quindi nell'equazione del moto ci saranno i termini opposti dell'attuatore:

$$J \ddot{\theta} + f \dot{\theta} = -d_0 + K_p e + K_d \dot{e}$$

- $K_p e$ TERMINE PROPORZIONALE (dell'errore)

- $K_d \dot{e}$ TERMINE DERIVATIVO (proporz. alla derivata dell'errore)

Se sostituiamo l'errore * nelle θ :

$$J \ddot{e} + (K_d + f) \dot{e} + K_p e = d_0 \rightarrow \text{perché abbiamo messo } - \text{ davanti a } d_0.$$

Equazione della dinamica dell'errore.

Questa ci dice come evolve l'errore nel tempo ma nel nostro caso le e sono delle θ cambiate di segno quindi ci dice anche qualcosa sul moto.

K_p agisce e $\rightarrow$ come il ruolo di una molla mentre K_d

agisce $\dot{e} \rightarrow$ come il ruolo di uno smorzamento opposto.

Overalmente siccome $K_p, K_d > 0$ il segno delle coppie dipende da quello dell'errore. (Esempio: $\theta_{des} > \theta(t) \rightarrow e > 0 \rightarrow K_p \cdot e > 0$ deve spingere in avanti verso θ_{des})
questo comporta che $\text{Re}(\lambda_k) < 0$ sempre.

CRITERI PER LA SCELTA DI K_P E K_D

$$J \ddot{e} + (f + K_D) \dot{e} + K_P e = d_0$$

- 1) Se viene raggiunta una posizione di equilibrio stabile mi aspetto che l'errore converga verso un valore asintotico. Se viene raggiunta stabilmente, le derivate $\dot{e}, \ddot{e} \rightarrow 0$:

$$K_P e_\infty = d_0$$

$\rightarrow$

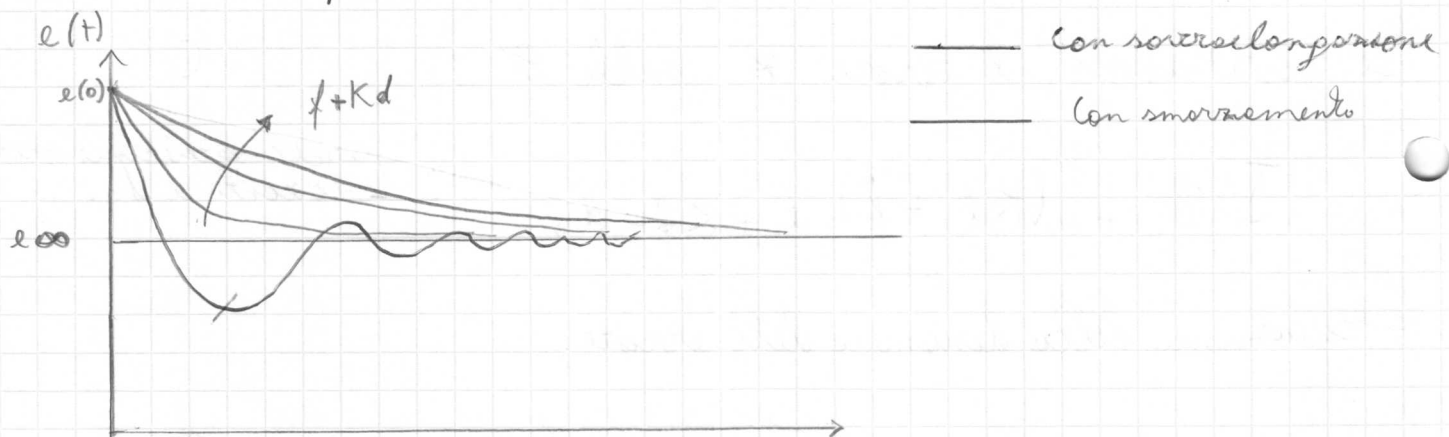
$$K_P = \frac{d_0}{e_\infty}$$

SCELTA K_P

Questo mi dà un aiuto nello scegliere K_P perché se ho il disturbo, posso dire di voler raggiungere un certo e_∞ in tempi ragionevoli e da progettista scelgo K_P . Se difficoltà a proprio dimensionare quel disturbo d_0 .

- 2) L'errore non possiamo dire che crasi ad essere 0 ma tende solo a un valore asintotico che dipende dal disturbo. Poi vedremo.

All'errore ^{asintotico} e_∞ posso arrivare in diversi modi:



- Posso convergere con sovraccaricamento ma lo scarto /. Non voglio che il braccio del robot oscilli. Significa niente autovalori λ_K complessi (la parte immaginaria crea oscillazioni)
- Scelgo di avvicinarmi con smorzamento, dove al crescere dello stesso ho una risposta che va più lento.

Di fatti lo smorzamento e il termine decendenti ed è ossia $(\zeta + K_d)$. La risposta più veloce la ho per lo smorzamento critico: $\zeta + K_d = \zeta_{cr} = 2\sqrt{K_p J}$. Quindi ho il valore di K_d

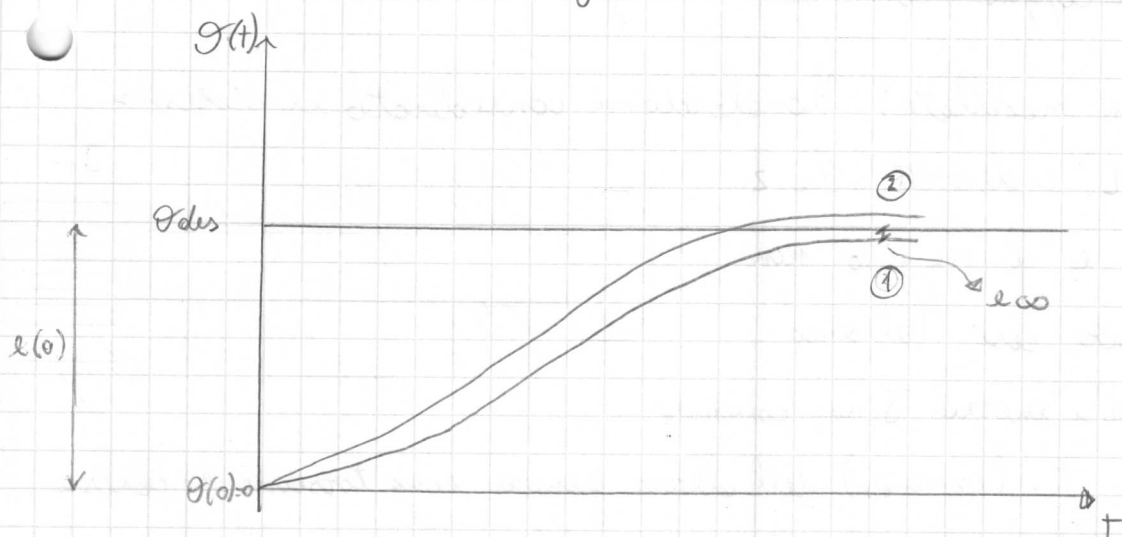
$$K_d = 2\sqrt{K_p J} - \zeta$$

SCELTA K_d

ζ è dato dal problema (è piccolo in genere e spesso trascurabile)

Scegliere K_p e K_d significa fare la TARATURA DEL REGOLATORE ("TUNING")

Questo era per la dinamica dell'errore ma vale anche per la θ e se abbiamo capito bene il concetto di errore è facile immaginare anche il grafico della $\theta(t)$: (consideriamo $\theta(0)=0$)



Il segno di d_0 va a determinare il segno di e_{∞}

① $d_0 > 0$: $\underline{e_{\infty}} = \theta_{des} - \theta_{\infty} > 0$

Significa anche che $\theta_{des} > \theta_{\infty}$ quindi questo e_{∞} porterà ad avere una θ diversa da quella desiderata. Ad esempio $e_{\infty} = 0,01 \text{ rad}$: decidiamo di tollerare al max e_{∞} .

② $d_0 < 0$: $e_{\infty} < 0$.

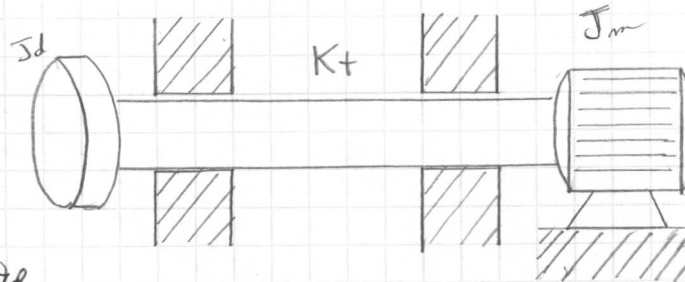
P.S. Per ricordare facilmente ricorda che $K_p = \frac{d_0}{e_{\infty}}$ quindi siccome $K_p > 0$ d_0 e e_{∞} devono avere lo stesso segno: $d_0 > 0 \Rightarrow e_{\infty} > 0$; $d_0 < 0 \Rightarrow e_{\infty} < 0$.

STABILITÀ PRATICA

Nella pratica può succedere che anche con $K_p, K_d > 0$ il sistema esibisce dinamismo instabile (diverge). E dov'è l'errore? l'equazione non si sbaglia, evidentemente è il modello che non comprende alcune cose. Uno di questi può essere:

- Un ritardo del sensore: questo genera una coppia data dall'attuatore di segno sbagliato. Supero Odes, ad esempio, ma il ritardo fa sì che il controllore pensi di trovarsi ancora prima e invece di invertire la coppia continua a spingere allontanando Odes.

- Cedevolezza non modellata: Noi abbiamo considerato il sistema a 1 G.D.L. e descritto da 2 parametri J e f ma può non essere realmente così. Nel senso possono esserci inerzie J non considerate



oppure la K_+ (torsionale) dell'albero genera una torsione che causa uno sfasamento angolare tra le masse del motore e quelle del disco. Magari lo sto eccitando proprio alla risonanza ma se K_+ non l'ho considerato nell'equazione.

- isteresi: fenomeno per cui una grandezza a un dato istante ha un valore che dipende non solo dai valori delle grandezze da cui dipende, valutate in quell'istante, ma anche da quelle che esse hanno assunto in istanti precedenti. Questo accade con la coppia data dall'attuatore (motore): se sto incrementando la coppia (viene richiesta coppia crescente) tende a sottostimare la coppia (da un valore più basso) perché "statuato" a quello dello stato precedente (si tratta di istanti). Viceversa nel caso decrescente.

• USO DEL TERMINE INTEGRALE K_i

Oltre ai termini con K_p e K_d c'è un altro termine che avremmo accennato ed è l'unico in grado di azzerare e_{∞} . Vediamo il termine aggiuntivo:

$$J \ddot{\theta}(t) + f \dot{\theta}(t) = -d_0 + K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + K_i \int_0^t e(t) dt$$

Quindi esso è K_i per l'integrale fino all'istante corrente della funzione d'errore.

Equazione delle dinamiche dell'errore:

Considero sempre $\theta_{des} = \cos t$ sicché $\dot{\theta} = -\dot{e}$ e $\ddot{\theta} = -\ddot{e}$:

$$J \ddot{e} + (f + K_d) \dot{e} + K_p e + K_i \int_0^t e(t) dt = d_0$$

Derivo primo e secondo membro rispetto al tempo:

$$J \ddot{e} + (f + K_d) \dot{e} + K_p e + K_i e = 0$$

Raggiunto il valore desiderato si spengono i termini di variazione $\ddot{e}, \dot{e}, e = 0$:

$$K_i e_{\infty} = 0 \quad \text{per qualunque } K_i \quad \boxed{e_{\infty} = 0}$$

K_i è l'unico ^{in grado} di azzerare il valore asintotico dell'errore generato dal disturbo. K_i inteso come tutto il termine integrale.

Questo termine introduce quindi un lato positivo ma porta con sé anche un problema. Pagina successiva

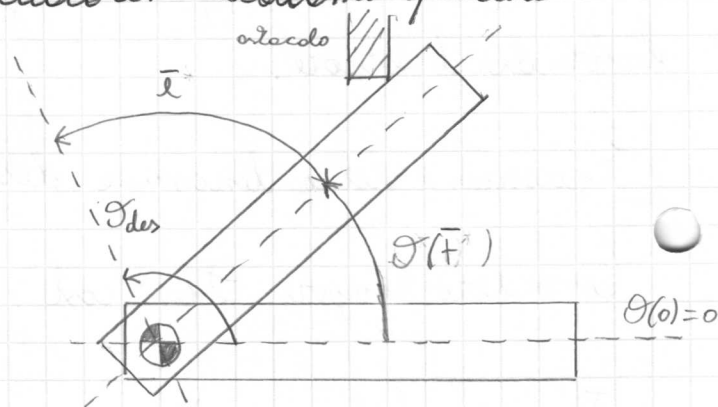
Integrator

WINDUP (Saturazione Attuatore):

Saturazione significa che stiamo introducendo termini di coppia dovuti a K_p , K_d e K_i intollerabili per l'attuatore.

L'attuatore è un ente fisico, non è detto che quello che gli richiediamo ce lo può dare (ad esempio può erogare max $\pm 100 \text{ N}\cdot\text{m}$)
Con il termine integrativo può capitare che il controllore richiede coppie infinitamente crescenti all'attuatore. Vediamo perché:

Prendiamo il caso di un braccio che sta ruotando e trova un ostacolo prima di raggiungere θ_{des} .
Per comodità parte dalla posizione orizzontale oia $\theta(0) = 0$.



Se l'attuatore non ce lo fa a spostare l'ostacolo il braccio, una volta che impatta contro di esso, si ferma in quella posizione continuando a forzare, e lì l'errore sarà $\bar{e} = \theta_{des} - \theta(\bar{t})$
E come si comportano i termini proporzionale, derivativo e integrale?

- **PROPORZIONALE:** Da buona "molla" dà una coppia costante proporzionale alla "deformazione" $\theta_{des} - \theta(\bar{t})$:

$$K_p \cdot \bar{e} = \text{cost}$$

- **DERIVATIVO:** Dobbiamo derivare $\bar{e}$ che è costante:

$$K_d \cdot \frac{d\bar{e}}{dt} = 0 \quad \text{E' nullo}$$

- **INTEGRALE:** L'attuatore continua a "corrersì":

$$K_i \cdot \int_0^+ \bar{e} dt = K_i \cdot \bar{e} \int_0^+ dt = K_i \bar{e} t$$

Cresce linearmente nel tempo! Quindi anche la coppia

Questa è la saturazione, ora l'attuatore può saturarsi e rompersi. Allora ho bisogno di delle:

• Pretezioni

Sostanzialmente si cambia l'algoritmo:

- 1) Si può far sì di impostare una coppia M_{max} ove l'attuatore si spegne una volta raggiunta
- 2) Si sistema il problema a monte con un if:

$$\text{IF } \dot{e} = 0 \quad \text{AND} \quad |e| > e^* \Rightarrow K_i = 0$$

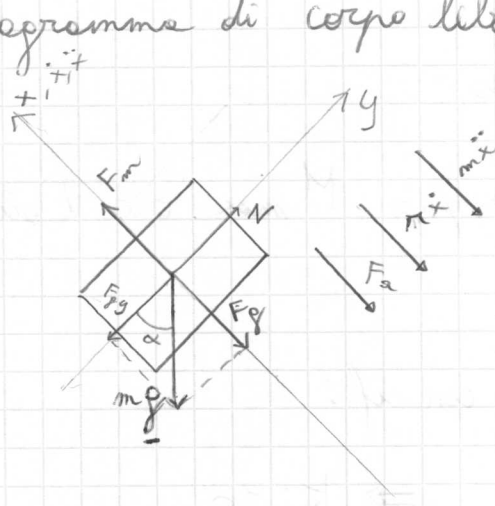
Se il termine derivativo è 0 e il mio errore attuale è molto lontano (maggiore) da un valore di soglia e^* , allora spegni il termine integrale.

Per questi motori in genere (soprattutto in robotica) viene evitato e si ricorre solo al PD. Non bisogna pensare infatti che si rompe solo l'attuatore ma si possono creare deformazioni, o slattonamenti che fanno perdere riferimenti al sensore e generare danni che costano anche di più dell'attuatore in sé.

PROVA D'ESAME CARRUCOLA (A DESTRA)

Ricerchiamo le forze che agiscono sulle masse m :

Diagramma di corpo libero:



$$\begin{cases} x & -m g \sin \alpha - f N - m \ddot{x} - r \dot{x} + F_m = 0 \\ y & -m g \cos \alpha + N = 0 \end{cases}$$

Dove dobbiamo indicare:
(con i riferimenti $x, \dot{x}, \ddot{x}$ come a sinistra)

- F_g componente forza peso lungo x
- $F_{g,y}$ componente forza peso lungo y
- N forza normale al piano
- F_m forza motore; pari a $M_m/R = F_m$
- F_a forza d'attrito radente - $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} f N = F_a$ (Opposto al verso della velocità $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$)
- $r \dot{x}, m \ddot{x}$ Reazione viscosa, forze d'inerzia.

Ricerca N del bilancio lungo y e lo sostituisco in x :

$$\left[m \ddot{x} + r \dot{x} = F_m - m g \sin \alpha - f m g \cos \alpha \right]$$

Ora dobbiamo solo importarlo in Simulink dando, alla trasformata del nostro sistema dinamico $(\frac{1}{ms^2 + r})$, le forzanti di destra.

N.B. Non dobbiamo il termine elastico (Kx) quindi facciamo un'equazione in $\dot{x}$ (perciò la trasformata non è $\frac{1}{ms^2 + r}$) e poi se serve la x integriamo la $\dot{x}$.

Si consideri il trascinamento lungo un piano inclinato ($\alpha=60^\circ$) di una massa di 1.0 kg inizialmente nel punto $x=a/2$ mediante una catena che si avvolge su una puleggia di raggio R (0.20 m) azionata da un motore elettrico.

E' assegnata la funzione di trasferimento del motore elettrico:

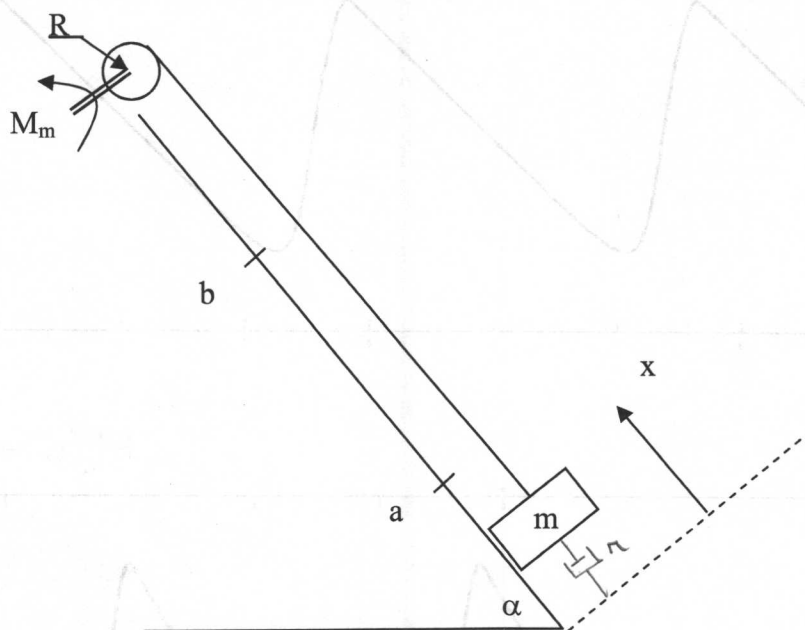
$$G(s) = \frac{\bar{M}_m(s)}{\bar{i}(s)} = \frac{1.0}{0.01s + 0.5}$$

con la seguente regolazione del motore:

- alimentazione ($\bar{i}(s)=1$) quando la massa oltrepassa verso il basso il punto **a** di ascissa 20 cm;
- disalimentazione ($\bar{i}(s)=0$) quando la massa oltrepassa verso l'alto il punto **b** di ascissa 40 cm;
- la posizione all'interno dell'intervallo **[a,b]** non modifica lo stato del motore.

Il coefficiente d'attrito radente (statico=dinamico) tra massa e piano è pari a 0.10 mentre sono trascurati la massa della catena e lo slittamento della stessa sulla puleggia.

⇒ Si effettui la simulazione del comportamento dinamico della massa m valutando per quale valore minimo del coefficiente d'attrito viscoso (r_v) la massa non supera verso il basso il punto $x = 0$.



Lo schema a blocchi (SIMULINK):

È molto semplice abbiamo la trasformata del sistema $\frac{1}{s+7}$ perché $m=1$ quindi derivanti od s vice -1 mentre è stato scelto $n=7$ liberamente perché così la massa non scende sotto la $x=0$.

In uscita abbiamo $x_{\text{punto}} = \dot{x}$ che viene integrata con condizioni iniziali $x(0) = \frac{a}{2}$ come da traccia (dentro $\boxed{1/s}$).

Come forze entranti (con i segni presi da pag precedente, nell'add) abbiamo F_g , la forza di attrito che prende il segno della $\dot{x}$ e lo inserisce nell'add (-).

Discorso a parte fa la forza del motore F_m : la traccia da la trasformata per ingresso $\bar{i}(s)$ e uscita $\bar{M}_m(s)$.

La i in ingresso la otteniamo con il relay che contiene i due setpoint a, b . In uscita però abbiamo M_m e dobbiamo convertirlo a forza dividendo per R .

Il grafico che si ottiene è quello di sinistra ova come richiesto non si scende al di sotto di $x=0$.

Inoltre si vede che i setpoint vengono superati e causa dell'inerzia della massa. In particolare:

1. Viene superato abbondantemente $x=b=0$, perché la massa parte da $x=\frac{a}{2}$ con velocità nulla (messo 0 nella funz. di transf.) quindi accumula abbondantemente inerzia e energia cinetica a causa del motore, che viene staccato a $x=b$ e quindi deve avere tempo di decelerare a causa di F_g, F_a , $\tau \dot{x}$ e $m \ddot{x}$.
2. A scendere il setpoint viene superato di più del setpoint
3. a causa del fatto che in discesa abbiamo la gravità a nostro favore. 1. viene superato di più b rispetto a 2. perché a $t=0$ il motor parte alla coppia massima. Se non vogliamo così mettiamo 0 alla condizione iniziale nella f. di transf.)

9

MOTORI: (Parte da metà LEZIONE 9 con)

Seconda metà

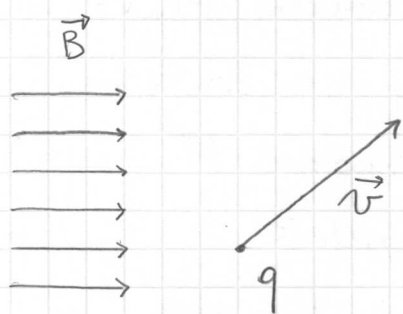
MOTORE DC - BRUSHED

DC: Corrente continua (diretta) BRUSHED: Con spazzole

Metteremo insieme la dinamica meccanica (equilibrio alla rotazione di d'Alembert) e la dinamica elettrica (Kirchhoff alla maglia relativa al motore elettrico) ricorrendo le funzioni di trasferimento del motore pilotato in corrente e pilotato in tensione.

Dalla forza di Lorentz alla coppia motore:

FORZA DI LORENTZ:



$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

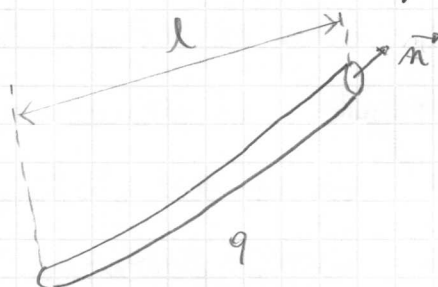
$\vec{B}$ campo di induzione magnetica
 $\vec{v}$ velocità della carica q
 q carica che può avere sia segno $-$ che $+$

Praticamente è la forza che subisce una carica in moto immersa in un campo magnetico. È diverso dal campo elettrostatico che agisce anche su cariche ferme. Nel caso di sopra $\vec{F}$ è entrante nel foglio.

Il suo modulo è:

$$|\vec{F}| = q |\vec{v} \wedge \vec{B}| = q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \angle \vec{v} \vec{B}$$

Ma noi interessano poco le cariche, interessano più i circuiti percorsi da corrente. Immaginiamo un filo di lunghezza l con normale $\vec{n}$, e densità di carica costante. Le cariche si muovono tutte alla stessa velocità $\vec{v}$, e $\parallel \vec{v} \wedge \vec{n}$.



Quindi:

$$\vec{v} = v \vec{n} \rightarrow q \vec{v} = \rho V \vec{v} = \rho A l \vec{v} = \rho A l v \vec{n}$$

$$= \underbrace{\rho A v}_i \underbrace{l \vec{n}}_l = i \vec{l} \rightarrow [q \vec{v} = i \vec{l}]$$

ho dato a $\vec{l}$ un orientamento e un verso. i = intensità di corrente elettrica

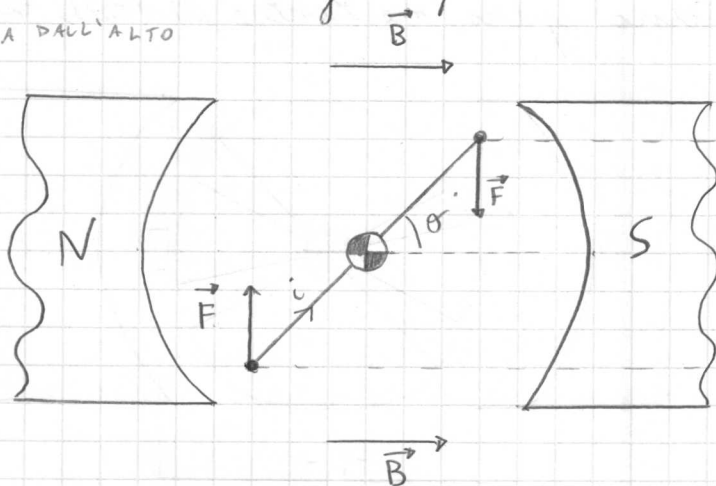
Sostituiamo $q \vec{v}$ nella forza di Lorentz:

$$(2) \quad \left[\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B} \right]$$

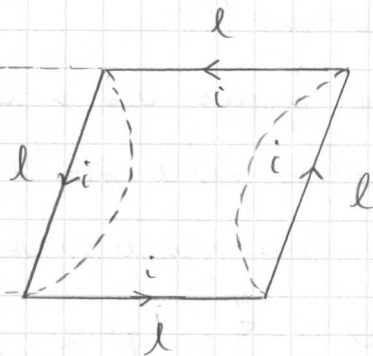
Milioni di correnti in un filo rettilineo non più singoli correnti.

Più è alta $|\vec{v}|$ più è alta i mentre $\vec{l}$ è una proprietà geometrica. Prendiamo un circuito chiuso a formare una spira perché so voglio che le correnti circolino (in un campo magnetico, quindi prendo due magneti permanenti N-S)

VISTA DALL'ALTO



SPIRA



Le forze $\vec{F}$ sono generate e cause della (2) per il fatto che i qui entra nel foglio e qui esce. La spira è rappresentata per intero e destra (per comodità di lato $l \rightarrow$ quadrato).

Sui restanti lati dove non sono state disegnate le $\vec{F}$, la forza tende a deformare la spira (ve verso il centro della spira) sempre per le regole della mano destra. Tende ad assumere il profilo rettangolare.

Si genera quindi una coppia (hanno stesso modulo e direzione):

$$M = F l \cos \theta = i l^2 B \cos \theta$$

La coppia sarà massima quando la spira è orizzontale.

E noi briste vederlo per il $\cos \theta$ che è massimo quando $\theta = 0$ ($\cos \theta = 1$). Ma è dovuto al campo di spira.

Questa coppia non è utile! per un buon motore elettrico perché il $\cos \theta$ varia tra -1 e 1 e così anche

il momento $M(\theta)$, ^{con la regola} non ci dà una buona coppia positiva sempre come serve a noi (almeno per più periodi). Se poi si ferma in verticale perché non c'è più coppia ancora peggio (pos. di equilibrio).

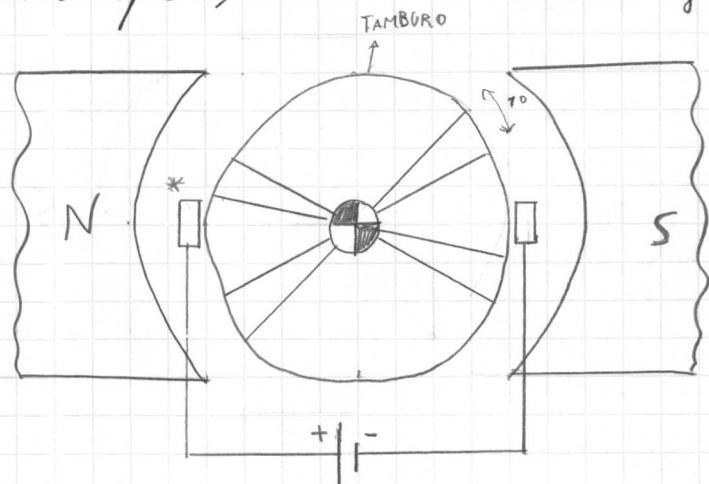
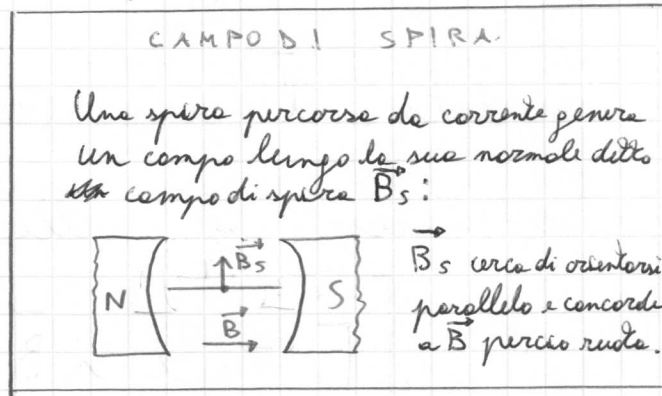
Quindi, su un tamburo rotante, che è la parte rotante del motore elettrico, non mettiamo una spira, ma tante ^{ARMATURA} interelli regolari ad esempio 1° .

Le coppie ora è somma di quelle delle spire (che hanno angoli θ_k diversi con l'orizzontale):

$$M = \sum_k^N i l^2 B \cos \theta_k$$

Se alimentiamo con le spazzole * così

sto attento (se sono piccole) ad alimentare solo le spire che mi danno maggior coppia. Esse sono contatti striscianti che permettono di portare differenza di potenziale alle spire, lasciandole libere di ruotare (perciò striscianti). Ne posso alimentare 5 ad esempio se le spazzole coprono 5° e le spire sono disposte 1 per ogni grado. (Nella sommatoria sopra $k=5$).

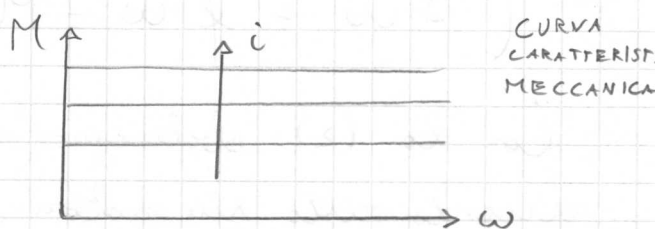


Se approssimiamo i θ_k ad essere tutti orizzontali:

$$M = K \overset{\text{della seminastrazione}}{i} l^2 B \cos(0) = K i l^2 B = \overset{\text{Per } K=5}{(5 i l^2 B)}$$

Se poi inglobo in K le caratteristiche geometriche (l) e il campo magnetico (costante B) ho =

$$M = \underbrace{K i l^2 B}_{K_m} = K_m i$$



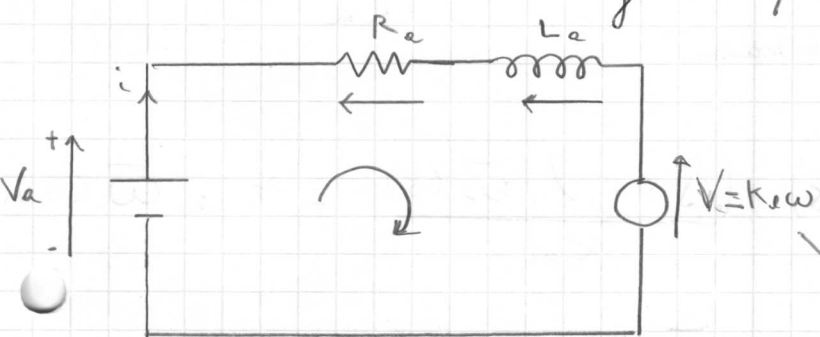
Quindi la coppia in un motore DC BRUSHED è proporzionale, per una costante costruttiva K_m , alla corrente i . Quindi non cambia in base a ω .

• ACCOPPIAMENTO MOTORE DC-BRUSHED / CARICO

Vogliamo accoppiare un motore con tale coppia a un carico (un asse, un disco):

$$\begin{cases} J \dot{\omega} + f \omega = M & \text{dove } f \omega = \text{termini viscosi } J \text{ inerzia} \\ \dots & \text{qui ci vuole l'equazione della dinamica elettrica} \end{cases}$$

Perché ci vuole un'altra equazione? Perché $M = K_m i$, ma i ha una sua dinamica: non è detto che appena applico una tensione ai capi della spira (in ingresso) subito ho una corrente (non è costante). E noi vogliamo proprio questo rapporto INGRESSO



(tensione) USCITA (ω).

La dinamica elettrica è quella a sinistra. L'unico che non so è:

FORZA CONTRO ELETTROMOTRICE

il prof non si sofferma molto, dice che lo vediamo dopo → KIRCHOFF ALLA MAGLIA

R_a = Resistenza d'armatura

Eccolo Kirchhoff e lo metto a sistema con l'equo di prima:

$$(1) \begin{cases} V_a(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + k_e \omega(t) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} J \dot{\omega} + f \omega = M = K_m i \end{cases}$$

Con la (2) dobbiamo accoppiare la ω e la i grazie a quanto visto sui motori. Possiamo già scrivere la funz di trasferimento della (2) ora l'ingresso e' il l'uscite' ω .

$$I) \quad G(s) = \frac{\bar{\omega}(s)}{\bar{i}(s)} = \frac{K_m}{Js + f}$$

FUNZ. DI TRASF.
DEL MOTORE PILOTATO
IN CORRENTE
(entra corrente)

Vorremmo scrivere quella del motore pilotato in tensione.
Ossia:

$$II) \quad G(s) = \frac{\bar{\omega}(s)}{\bar{V}_a(s)}$$

Ovviamente per condizioni
iniziali nulle

Prendiamo la (1) facciamo la trasformata di primo e secondo membro:

$$\bar{V}_a(s) = R_a \bar{i}(s) + L_a s \bar{i}(s) + k_e \bar{\omega}(s)$$

Dalla I) sappiamo quanto vale $\bar{i}(s) = \frac{\bar{\omega}(s) (Js + f)}{K_m}$ e allora lo sostituiamo: (metto anche $\bar{i}(s)$ in evidenza)

$$\bar{V}_a(s) = (R_a + L_a s) \frac{(Js + f) \bar{\omega}(s)}{K_m} + k_e \bar{\omega}(s)$$

Posso mettere in evidenza $\bar{\omega}(s)$ ed ho (dividendo per $\bar{V}_a(s)$) la II): Devo svolgere anche il prodotto tra binomi.

$$G(s) = \frac{\bar{\omega}(s)}{\bar{V}_e(s)} = \frac{1}{\frac{J L_e}{K_m} s^2 + \frac{(L_e f + J R_e) s}{K_m} + \frac{R_e f + K_e}{K_m}}$$

~~Funzione~~ FUNZ. DI TRASF. MOTORE PILOTATO INTENSIONE

- Ma chi è K_e ? Ho detto che nel momento in cui applico V si manifesta una forza contro elettromotrice, che sempre una tensione e' , pari a:

$$V = K_e \omega \quad \text{ma sappiamo che} \quad M = K_m i$$

La potenza meccanica erogata è $M \omega = K_m i \omega$

Mentre se moltiplico $V \cdot i$ ho la potenza elettrica:

$$V i = K_e \omega i \quad \text{Potenza dissipata assorbita dal motore elettrico}$$

Ma sempre prendendo il circuito, per $i(t)$ costante nel tempo (motore a corrente continua DC, quando si è stabilizzato), $\frac{di}{dt} = 0$, non abbiamo cadute di tensione ai capi dell'induttore. E se ho rendimento unitario (non ho dissipazione nelle resistenze $\rightarrow R_e = 0$), ho che:

$$V_e = V = K_e \omega \quad \text{e siccome la potenza erogata è uguale a quella assorbita:}$$

$$K_m i \omega = K_e \omega i$$

$$\boxed{K_m = K_e = K}$$

Facciamo questa modifica nell'equazione in cui alla pagina:

$$= \frac{\frac{1}{K}}{\frac{J L_e s^2}{K^2} + \frac{(L_e f + J R_e) s}{K^2} + \frac{R_e f}{K^2} + 1}$$

ho moltip. e diviso per K

facendo il minimo comune multiplo (e al K^2 lo semplifico con $\frac{1}{K}$):

$$G(s) = \frac{K}{JL_e s^2 + (La f + JR_e)s + Ra f + K^2} \approx \text{FUNZ. APPROSSIMATA (rendimento unitario)}$$

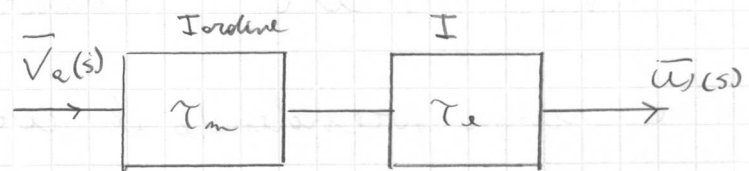
è del secondo ordine. Raggruppiamo le costanti che figurano. In particolare (al prof. non importa molto) scegliendo

$$\left[\tau_m = \frac{Ra J}{K^2} [s]; \tau_e = \frac{La}{Ra} [s]; \gamma = \frac{Ra f}{K^2} \right] \quad \begin{matrix} LE \\ CONSTANT \end{matrix}$$

Si può riscrivere come:

$$\approx \frac{1/K}{(\tau_m s + 1)(\tau_e s + 1)}$$

Essa è la cascata di due sistemi del primo ordine



Uno caratterizzato da una costante meccanica τ_m e l'altro da una costante elettrica τ_e

Se svolgo il prodotto restituisco un sist del II ordine:

$$= \frac{1/K}{\tau_m \tau_e s^2 + (\tau_m + \tau_e)s + 1}$$

Spesso τ_m e τ_e hanno due ordini di grandezza diversi: $|\tau_m \gg \tau_e|$
Perché quello elettrico è più veloce.

Quindi se "vado di fretta" e dico: il sistema elettrico ci presteremo quindi posso ricevere un sistema del I ordine?

Certo $\rightarrow \tau_e \approx 0$:

Rimane solo il primo sistema.

$$= \frac{1/K}{0 + (\tau_m + 0)s + 1} = \frac{1/K}{\tau_m s + 1}$$

11 VERA
INIZIO

Si nota che τ_e è chiamato così perché dipende da sole grandezze elettriche (L_e e R_e) mentre τ_m ha lo stesso principio (grandezze meccaniche) ma ha R_a in più che è elettrica.

Tutti i termini sono facilmente risolvibili tranne il coefficiente d'attrito viscoso f che viene determinato arrivando a una certa velocità (con il motore) e poi viene spento il motore isolando la decelerazione: si parla di COASTING. Altrimenti se lo si porta a una velocità di crociera (costante $\rightarrow$ accelerazione = 0) : CRUISING.

Inoltre esso cambia se nell'applicazione maggiori vi è un fluido. Col processo di prima calcoliamo f a vuoto, senza carico. Così come I se ho un carico I rappresenta TUTTE le energie ridotte all'asse del motore.

Se ho la corrente a vuoto I_0 , f si calcola anche così:

$$I_0 \cdot f = \text{valore noto da produttore} \rightarrow f = \frac{I_0}{\text{valore}}$$



13 • MOTORE DC BRUSHLESS (senza spazzole)

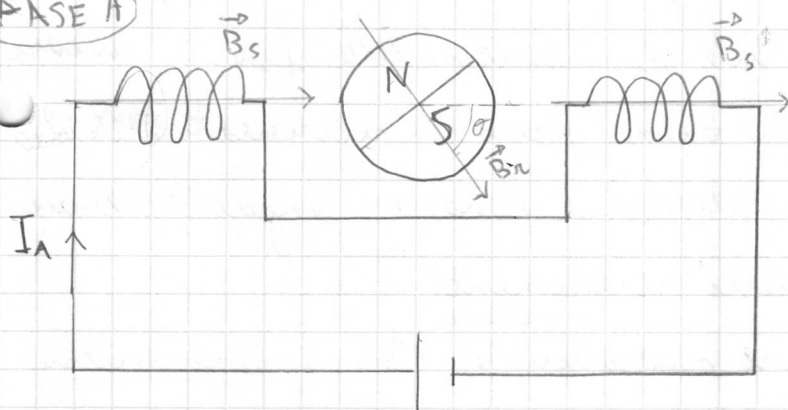
L'idea è quella di regolare opportunamente le correnti nello statore per regolare la rotazione del rotore. Ovvero si cerca sempre di mantenere l'ortogonalità tra campo statorico e campo rotorico (magnetici). I vantaggi sono molteplici ma quello più immediato è che l'assenza di contatti striscianti (usura quasi azzerata) garantisce una vita utile di questi motori molto prolungata.

Struttura

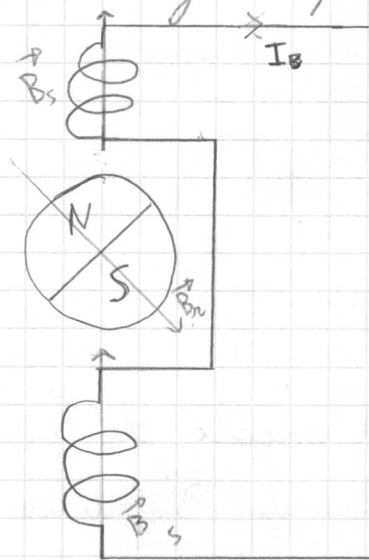
Lo STATORE è costituito da (sono presenti su di esso) fori ossia avvolgimenti (bobine) attraversate dalla stessa corrente (possono essere anche più di 1 bobina per fase).

Il ROTORE è nel caso più generale un solo magnete permanente. Cerchiamo di rappresentare quanto detto:

FASE A

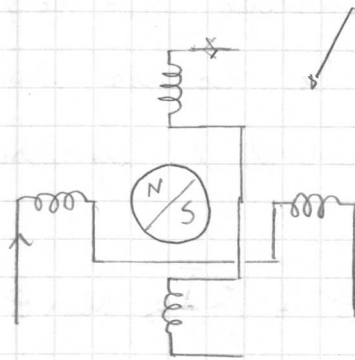


FASE B



$\vec{B}_s$ Campo ^{ind} magnetico statorico

$\vec{B}_r$ // rotorico



Praticamente il rotore genera un campo magnetico da N-S costante in modulo $\vec{B}_r$.

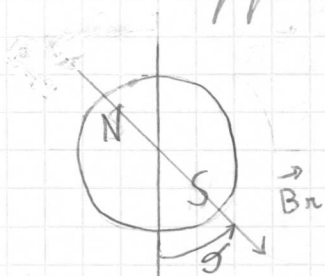
Invece lo statore del nostro esempio è costituito da 2 fasi, una in cui scorre la corrente I_A (FASE A) e una in cui scorre la corrente I_B (FASE B) ciascuna delle quali contiene 2 bobine.

Le due fasi (i due circuiti) sono isolate l'una dall'altra e ciascuna di esse è alimentata indipendentemente secondo una logica che permette la migliore rotazione del rotore: infatti è proprio l'alimentazione a generare i campi $\vec{B}_s$ che avranno un certo angolo con $\vec{B}_r$.

Le possibilità di alimentazione sono le seguenti:

$I_A \begin{cases} + I \\ - I \\ 0 \end{cases}$	Corrente nel verso del disegno	$\text{Uguale per } I_B \begin{cases} + I \\ - I \\ 0 \end{cases}$
	Corrente nel verso opposto	
	Non alimentato / spento	

La coppia:



Vogliamo capire come varia la coppia in funzione dell'alimentazione delle fasi. A sinistra si vede che viene preso un riferimento verticale rispetto allo statore (che è fisso) e l'angolo θ identifica

l'angolo di $\vec{B}_r$ rispetto a questo riferimento.

Quindi $\vec{B}_s$ della fase A è sempre orizzontale ^{verso destra} se $+I_A$ e verso sinistra se $-I_A$. Discorso analogo per la fase B.

Già sappiamo che la coppia massima si ottiene con l'ortogonalità tra $\vec{B}_s$ e $\vec{B}_r$. Quindi l'espressione che riassume bene tutto ciò:

$$M = \underbrace{K I_A \cos \theta}_{M_A} + \underbrace{K I_B \sin \theta}_{M_B}$$

In effetti se $\theta = 0$ $\vec{B}_r = \downarrow$

ossia verticale e verso il basso e allora

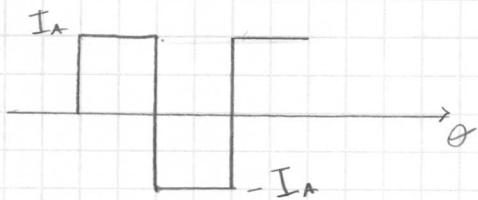
$M_B = 0$ mentre M_A è max perché $\sin \theta = 0$ e $\cos \theta = 1$ ma anche $\vec{B}_r$ ortogonale a $\vec{B}_s$ di A

Come un ago magnetico, il vettore che va da nord a sud vuole orientarsi nel verso del campo magnetico $\vec{B}_s$ più vicino.

Questo però genera un problema: se $\vec{B}_r$ parte da $\theta = 0$ la forza coppia dovuta a $\vec{B}_r$ vettore $\vec{B}_{sA}$ è max e positiva (regola mano destra) ma nel momento in cui $\vec{B}_r$ è così $\rightarrow (\theta = \frac{\pi}{2})$ devo disattivare I_A perché da lì in poi $\vec{B}_r$ vettore $\vec{B}_{sA}$ è negativo! fa insorgere una coppia negativa (vorrebbe far girare $\vec{B}_r$ nel verso opposto).
E allora vediamo come dimentiamo le due fasi:

PILOTAGGIO CON ONDA QUADRA

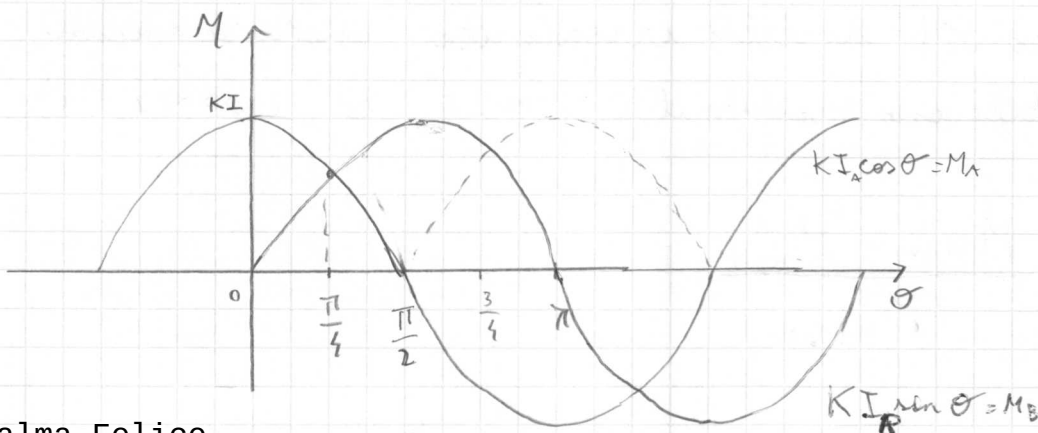
È la più semplice: o dimentiamo, o non dimentiamo, o dimentiamo nel verso opposto! ad esempio I_A :



Si vuole praticamente organizzare questo accensione/spegnimento per ottenere la coppia massima.

La coppia M non è un'onda quadra (l'ingresso è una somma di onde quadre, quelle di I_A e I_B l'uscita M dipende da un coseno e un seno! è in particolare da θ). Come sommo un seno e un coseno mantenendo sempre la loro somma (M) positiva e con il massimo valore possibile?

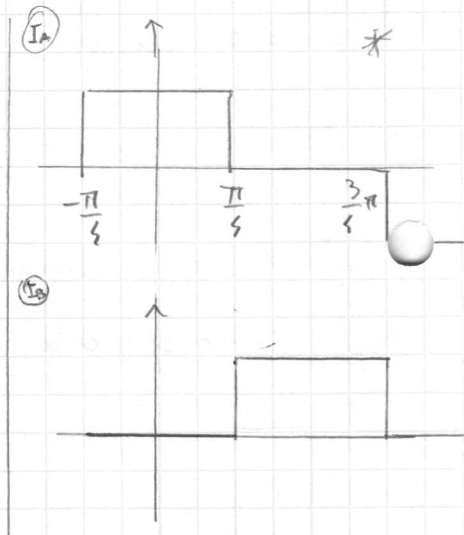
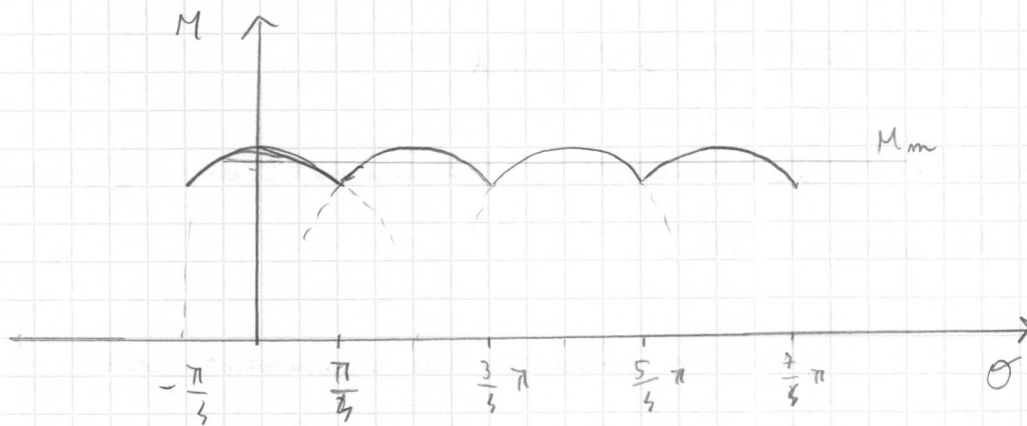
Non si può a meno che non "accendo e spengo" i due termini a mio piacimento come V_{grossa} I_A e I_B . Vediamo cosa succede ad dimenticare con questa logica per $K I_A \cos \theta$ e $K I_B \sin \theta$ (sfasati di $\frac{\pi}{2}$)?



Come si vede le due onde sommate senza logica (I_A e I_B sempre accesi) non danno nulla di buono.

Potremmo evitare la coppia M negativa ribaltando le due onde rispetto all'asse θ (come la curva rosso ---- per I_A) rovesciando il segno di I_A e I_B nelle parti negative ma rischieremmo il rischio di avere troppe oscillazioni nonché il rischio di avere l'inversione del moto.

Si preferisce quindi non solo cambiare segno, ma spegnere proprio I_A o I_B in alcuni tratti in particolare i punti chiave sono i $\frac{\pi}{4}$ e i suoi multipli dove una ^{onda} sta appena diminuendo e l'altra è quasi al suo massimo:



I_A è alimentata tra $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ così il momento risultante è quella curva a forma di tante cunette e il suo valor medio è M_m .

• La logica: *

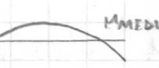
	$-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi; -\frac{\pi}{4}$
I_A	$+I$	0	$-I$	0
I_B	0	$+I$	0	$-I$

• Le irregolarità

Il valor medio non coincide con M quindi la coppia non è costante lungo θ ! ho delle irregolarità anche se minime. Queste si quantificano tramite il RIPPLE DI COPPIA (π)

$$\pi = \frac{M_{MAX} - M_{MIN}}{M_{MEDIA}}$$

Cerchiamo di valutare tutti i termini nel nostro caso:

- M_{MAX} : il valore max della coppia e' il picco dei seni e coseni visti prima e siccome $|I_A| = |I_B| = I$ deduciamo che $M_{MAX} = K I$
- M_{MIN} : si ha in corrispondenza di $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \dots$ ossia le intersezioni delle "cunette" e siccome $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ ed e' pari a $\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow M_{MIN} = K I \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
- M_{MEDIA} : e' la media nel periodo di $M(\theta)$ dove il periodo non e' un tempo bensì M si ripete (lo stesso valore) ogni $\frac{\pi}{2}$ e questo e' il periodo. Inoltre consideriamo la singola cunetta () che si ripete sempre uguale. Quindi integriamo tra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$ solo il coseno:

$$\begin{aligned} M_{MEDIA} &= \frac{1}{\pi/2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} K I \cos \theta d\theta = \frac{1}{\pi/2} K I \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi/2} K I \left[\sin \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{\pi/2} K I \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \left[\frac{2\sqrt{2} K I}{\pi} \right] \end{aligned}$$

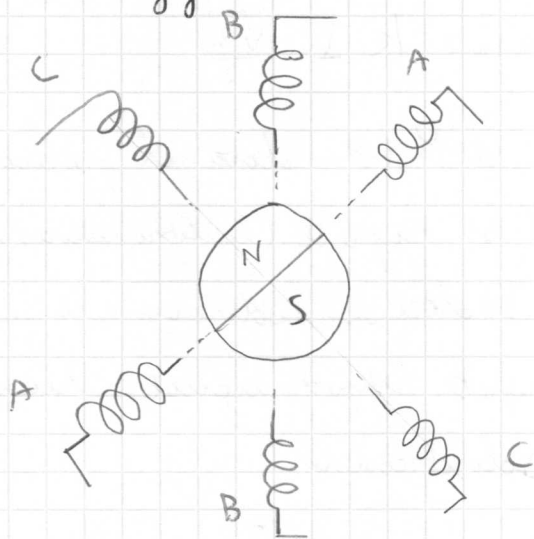
Sostituiamo in π e calcoliamo il ripple per motore a 2 fasi:

$$\pi = \frac{K I - K I \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2} K I}{\pi}} = 0,33$$

È quasi naturale che se aumentiamo il numero di poli dell'infinito e pilotarli in periodi sempre più brevi le curve di cunette tendono ad una retta (M costante)! Indirettamente siamo dicendo di aumentare il numero di fasi. Allora:

MOTORE TRIFASE: (sempre con magneti a soli due poli e due avvolgimenti ^{N/S} per fase)

Viene aggiunta una terza fase:



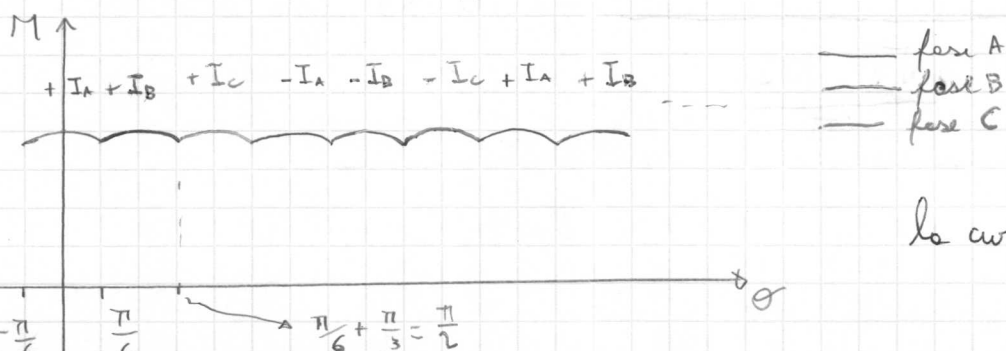
Otteniamo 3 fasi: A, B, C.

Ora conviene commutare ogni $\frac{\pi}{3}$ invece che ogni $\frac{\pi}{2}$: cambia il periodo. Inoltre per non complicare il disegno non sono state collegate le bobine di una singola fase (A-A, B-B, C-C).

Due coppie:

Due coppie precedenti (siccome seno e coseno sono uguali ma sfasati di $\frac{\pi}{2}$) poteva essere vista anche come $M = KI_A \cos \theta + KI_B \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ infatti il $\sin \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$. Nel caso trifase è più comodo tale scrittura: prendiamo un coseno di riferimento e sfasiamo gli altri in anticipo: Qui tale sfasamento è $\frac{\pi}{3}$:

$$M = KI_A \cos \theta + KI_B \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + KI_C \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi)$$



la curva si è appiattita

Logica di commutazione:

	$-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
I_A	$+I$	0	0	$-I$	0	0
I_B	0	$+I$	0	0	$-I$	0
I_C	0	0	$+I$	0	0	$-I$

Ripple di coppia:

$M_{MAX} = KI$ perché $|I_A| = |I_B| = |I_C| = I$

$M_{MIN} = KI \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} KI$

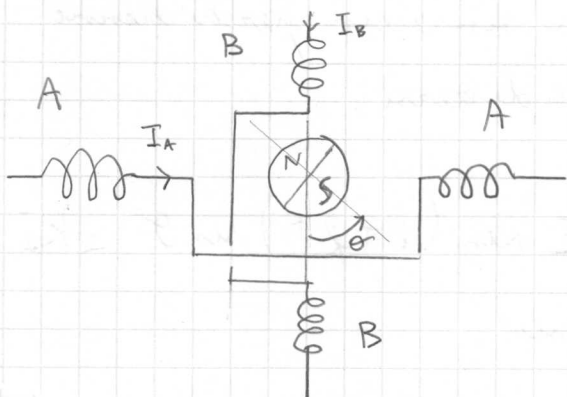
$M_{MEDIA} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} KI \cos \theta d\theta = \frac{3 KI}{\pi}$

$$\pi = \frac{KI - \frac{\sqrt{3}}{2} KI}{\frac{3 KI}{\pi}} = 0,14$$

14) MOTORI AC-BRUSHLESS

- PILOTAGGIO CON ONDA SINUSOIDALE

Prendiamo lo schema del DC a 2 fasi:



L'idea è quella di combinare I_A e I_B . Di fatti a meno che non vi sia una batteria o un raddrizzatore la corrente disponibile dalla rete elettrica è alternata (AC - sinusoidale). Prima la corrente era continua e potevamo solo accenderla o

spegnere (I semplicemente uno scolori), qui ci sono più parametri dinamici

Di fatti I_A , ad esempio, assume questa forma:

$$I_A = I \cos \theta$$

$$I_B = I \sin \theta$$

Dal punto di vista dei sensori qui devo misurare con continuità θ per seguirlo con $\cos$ e $\sin$ con il regolatore (Prima mi bruciava sapere "se sei a $\pi/4$ spegni I_A ecc..." erano quindi dei setpoint).

Se I_A che I_B hanno periodo 2π adesso $\theta = \omega t = 2\pi f t$.

Questo significa che non posso prendere direttamente la corrente dalla rete così com'è (perché f è fissa 50 Hz), infatti se la velocità ω (quindi f) aumenta io devo anche aumentare la frequenza delle correnti con cui alimenterò! devo inseguire anche la f .

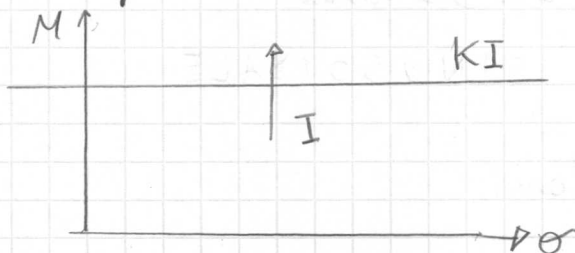
Se seguo fedelmente la θ succede che (sostituisco I_A e I_B nella formula $M = K I_A \cos \theta + K I_B \sin \theta$):

$$M = K I \cos^2 \theta + K I \sin^2 \theta = K I$$

COPPIA

AC-BRUSHLESS

La coppia è costante (nel tempo) e uniforme (non dipende da θ) come quelle dei DC-BRUSHED:



Se però non seguo correttamente la f non posso moltiplicare $\cos$ e $\cos$, e $\sin$ e $\sin$ perché hanno argomenti diversi:

$$M = K I \cos(\underbrace{2\pi f t}_{\text{freq. di commutazione elettrica}}) \cos \theta + K I \sin(\underbrace{2\pi f t}_{\text{freq. di commutazione elettrica}}) \sin \theta < K I$$

angolo fisico!

E in generale la coppia ottenuta è $< K I$ e non uniforme. Può funzionare solo in loop chiuso! devo sapere quando commutare ossia sapere la misura di θ .

MOTORI STEP (PASSO PASSO)

Possono essere pilotati ad open loop e sono molto semplici: nel senso che possono fare anche rotazioni parziali (minori di un angolo giro) mentre prima c'era un transitorio di avviamento e poi il motore girava sempre. Se ad esempio ho N_p passi, ogni passo è di $360/N_p = 6$ gradi. $= \alpha_p$ (angolo per passo)

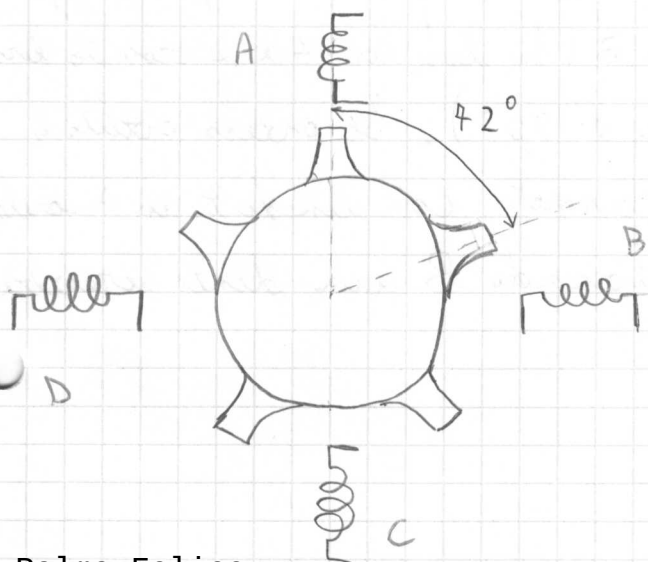
Quindi se decido di fare 5 commutazioni $m=5$ faccio 5 volte $360/N_p$: $5 \cdot \alpha_p = 5 \cdot \frac{360}{N_p}$ nel caso di prima è $6 \cdot 5 = 30$ gradi.

Quindi $m_c = m_p$ il numero di commutazioni è uguale al numero di passi.

LE TIPOLOGIE:

- 1) Motori step a riluttanza variabile
 - 2) " a magneti permanenti
 - 3) " ibridi
- NON LA VEDREMO

① Il rotore è costruito in materiale ferromagnetico e possiede un certo numero di denti. Lo statore è invece avvolto ed ha più fasi di numero diverso da quello dei denti. Vediamo il caso di 5 denti e 4 fasi, ciascuna con una sola bobina:



Le fasi sono a croce mentre il rotore ha 5 denti quindi sono distanziate equamente di $\frac{360}{5} = 72$ gradi. I denti sono anche detti: espansioni polari.

La legge che governa il fenomeno è le leggi di Hopkinson:

$$[Ni = R \Phi]$$

Dove

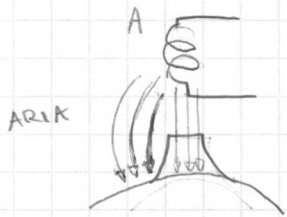
- N numero di avvolgimenti (spire)
- i corrente nella spira
- R riluttanza
- Φ flusso (integrato di $\vec{B}$ su una area)

È l'analogo della legge di Ohm dove al posto della tensione abbiamo Ni (forza magnetomotrice), al posto della resistenza abbiamo R e al posto della corrente abbiamo Φ .

La cosa importante da sapere è che il rotore cercherà di raggiungere sempre la condizione di minima energia!

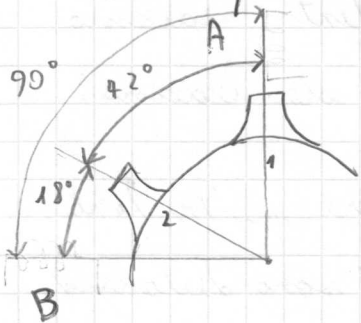
Tale condizione corrisponde al caso in cui il campo magnetico deve percorrere il percorso a riluttanza minore (o meno forte).

Nel caso di prima se attivo A il dente superiore è già nella condizione d'equilibrio:



La riluttanza dell'aria è maggiore di quella del ferro (il percorso rosso è favorito rispetto a quello verde).

Questo spiega anche perché il numero di denti è diverso dal numero di fasi. Infatti (guardando il disegno di pag precedente) ora se dalla posizione in cui mi trovo spengo A e accendo B:



Il dente due compie quei 18° per raggiungere l'equilibrio in B (se fasi son 4 e a loro la loro distanza angolare è 90°). Se avessi avuto 4 denti, il rotore fermato con un dente in A sarebbe

rimasto lì per sempre perché attivando B un dente sarebbe già stato nella posizione B!

In sostanza sto realizzando passi di ampiezza:

$\alpha_p = 18^\circ$ che è pari a $\alpha_p = \frac{360^\circ}{N_p} \rightarrow N_p = 20$

Posso fare
20 passi da
18° gradi

può essere espresso anche in radianti

E se volessi farlo ruotare continuamente?

Ho bisogno di una $f_c = \text{FREQUENZA DI COMMUTAZIONE}$

Ci dice quante commutazioni compie nell'unità di tempo. Ad esempio se è due in un secondo ho fatto due commutazioni quindi due passi. Si misura in Herz [Hz] [$1/s$]

Se voglio ottenere una velocità devo moltiplicare $\frac{1}{s}$ per dei radianti, ad esempio $\alpha_p [\text{rad}]$:

$\omega = f_c \cdot \alpha_p = n_s = \frac{n}{60}$

ω $\downarrow$ rad. angolare
 n $\downarrow$ giri al secondo

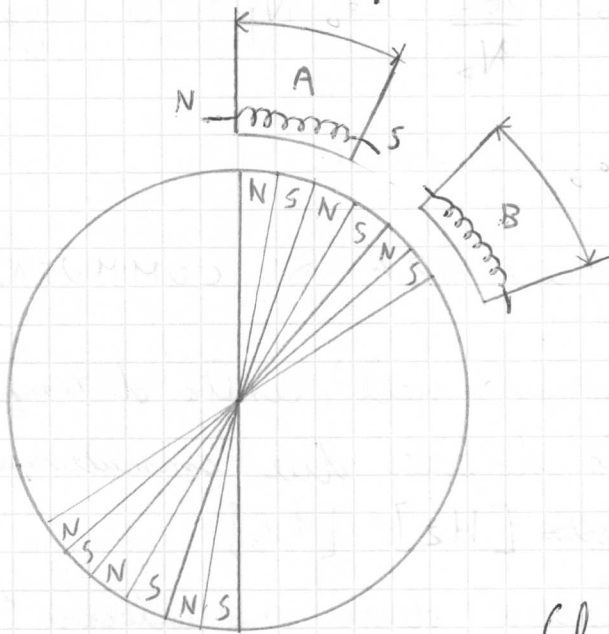
n giri al minuto

$\omega = n_s$ infatti
1 giro = 2π
moltiplico e divido per
 f
giro/s = $2\pi f = \omega$
 $n_s = \omega$

Overdamente nemmeno qui sono una rotazione regolare perché si muove per successive posizioni di equilibrio (per ogni passo c'è un transitorio anche se rapidissimo).

Questo motore può essere usato sia in open che closed loop tuttavia soprattutto per coppie elevate conviene closed loop perché può verificarsi la cosiddetta perdita del passo (invece di 10, ad esempio, ne fa 8) e se controllo in retroazione posso verificare se è avvenuta o meno la rotazione desiderata.

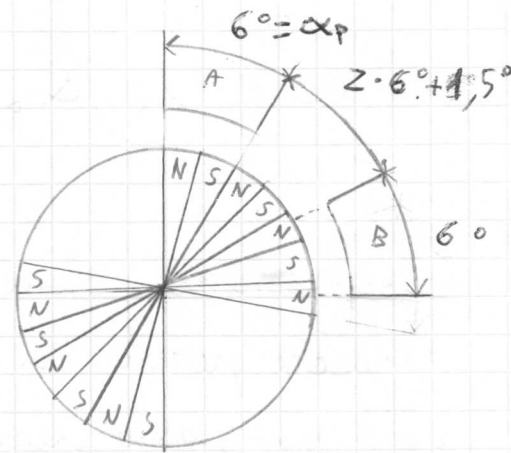
② Il magnete permanente è sempre sul rotore ma è diviso in tanti spicchi!



Le fori sono A e B (minimo 2) e sono spaziate angolarmente in modo intelligente.

All'interno delle fori scorrono degli avvolgimenti che permettono la creazione di un campo magnetico variabile anche in verso.

Che significa spaziare in modo intelligente?



Praticamente ogni foro ha una apertura pari all'angolo descritto da 2 coppie poli.

(Se ho 60 coppie poli N-S, spicchi, ho $\alpha_p = 360^\circ / 60 = 6^\circ$ per una coppia N-S). Ebbene

lo spazio tra due fori può essere un multiplo (Z volte) dell'angolo di una singola coppia più la metà dell'angolo del singolo polo. Nel caso di destra ho $Z = 1$ (una coppia polo di distanza angolare tra A e B) quindi $Z \cdot 6^\circ + \frac{3^\circ}{2} = Z \cdot 6^\circ + 1,5^\circ = 7,5^\circ$.
 Altrimenti con le fori successive debbano essere di nuovo prima il N e poi il S impedendoci di far ruotare il rotore applicando un campo magnetico, perché saremmo stati per entrambe le fori in condizioni di stabilità.

La condizione stabile lo abbiamo quando un nord della fori effaccia o un sud del rotore, viceversa abbiamo instabilità. Per capire meglio vediamo il caso di moto lineare:

A

S	N
---	---

N	S
---	---

 B

N	S	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

→

A è nella posizione stabile, altrimenti (in verde) con S-N invertiti sarebbe instabile ma la guida sotto potrebbe muoversi sia verso destra che verso sinistra.

Se voglio far muovere la guida verso destra devo posizionare B come in figura e alimentarlo sempre come in figura, sicché per giungere all'equilibrio (S sotto N).

La guida deve spostarsi per forza a destra altrimenti il percorso che deve fare il successivo S * per portarsi sotto l'N di B è più lungo.

Esso inoltre si sposta di $\alpha_F = \frac{360^\circ}{N_F} \frac{1}{2}$ ossia la metà dello spazio occupato da un singolo polo *

Una volta spostato di tale quantità passo a invertire le coppie polari (grazie alle correnti) su A per saturare di nuovo il moto.

Quindi le commutazioni sono

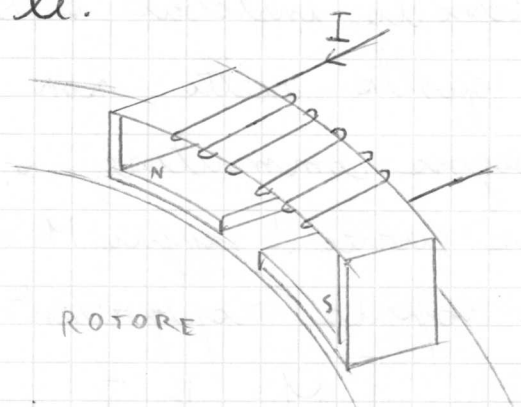
A	I	0	-I	0
B	0	I	0	-I

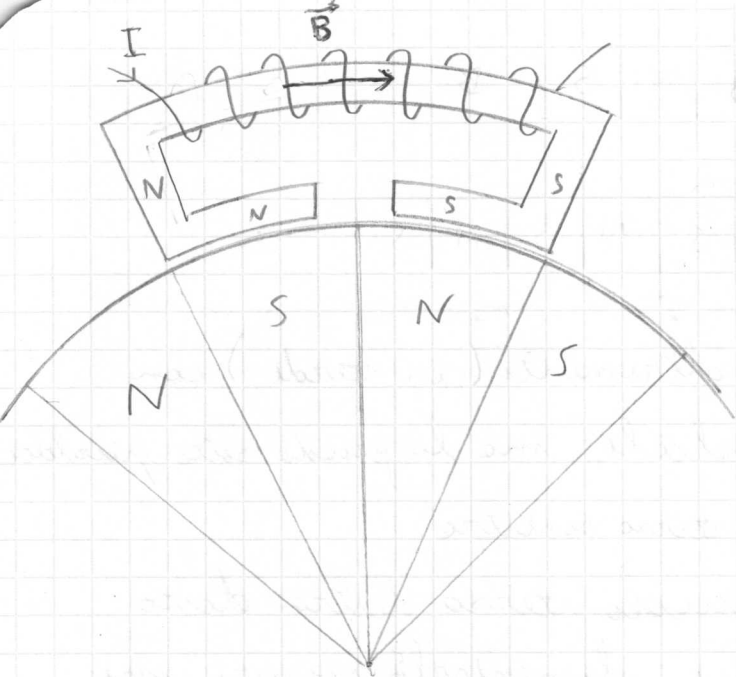
Simile al DC-BRUSHLESS

Cerchiamo ora di rappresentarci le:

• Espansioni polari (forse A e B):

Il rotore è quello che prima abbiamo diviso in fettine. L'espansione è quel lamierino curvo ovalato da fili in modo da generare un campo magnetico





Nella pagina precedente il disegno è in 3D qui viene la versione.

In particolare, dato il verso di I , $\vec{B}$ punta come in figura facendo sì che la lamiera esaurisca un polo N e S.

Le coppie:

Per la singola fase A!
Si vede che il rotore attraversa due fasi quella di equilibrio instabile (oppure lo loco ruota)

e quella di equilibrio stabile (NORD affaccia SUD)

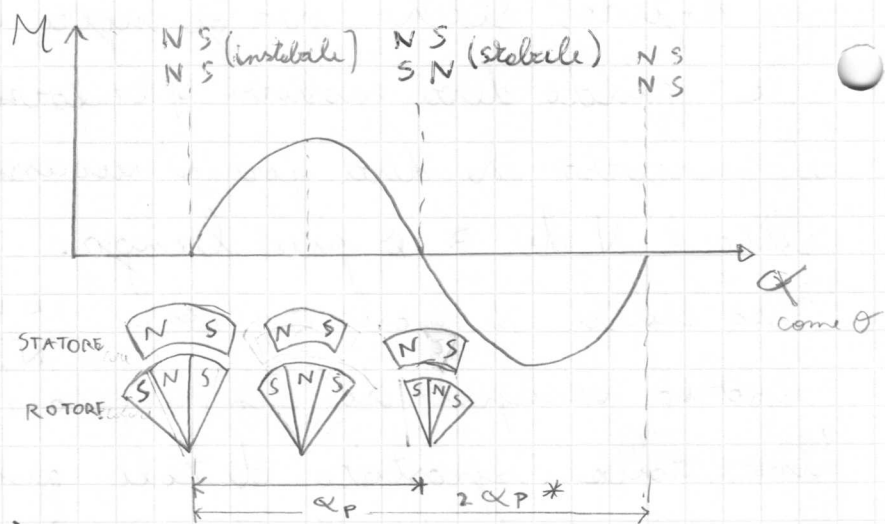
e se non faccio qualcosa da lì non si muoverà. Allora sono costretto a invertire la polarità invertendo la corrente e così però il rotore gira in verso opposto (momento negativo, al di sotto dell'asse α). Quindi quel periodo è proprio $2\alpha_p$ * (una oscillazione completa del momento). Nel caso di prima, $2\alpha_p = 12^\circ$ quindi in 12° io passo da instabile a stabile e di nuovo a instabile.

Ma quella scelta non è proprio una "strategia vincente" bisogna commutare: si aggiunge la fase B (si aggiunge un'altra curva di coppia M sfasata).

Le coppie rappresentate sopra, della fase A è:

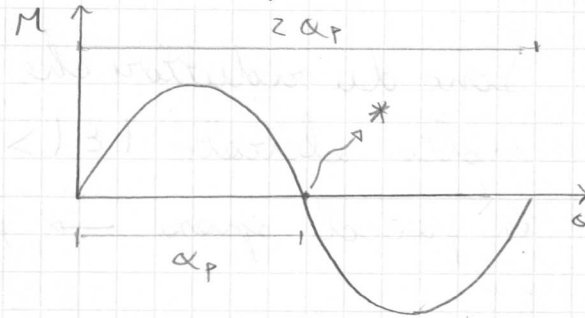
$$\left[M = K I \sin \left(2\pi \frac{\alpha}{2\alpha_p} \right) \right]$$

FASE A

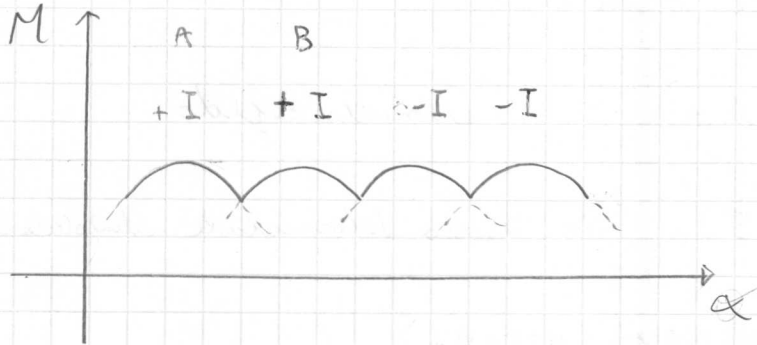


α è l'angolo, la variabile però è come se ci fossero messi con lo 0 dove inizia la curva:

infatti (come a destra) se ad esempio $\alpha = \alpha_p \rightarrow \sin(\pi) = 0 \rightarrow *$



Con la commutazione:

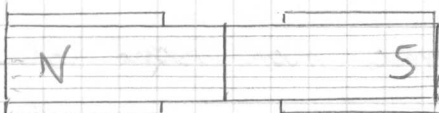
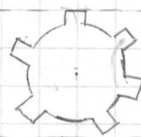
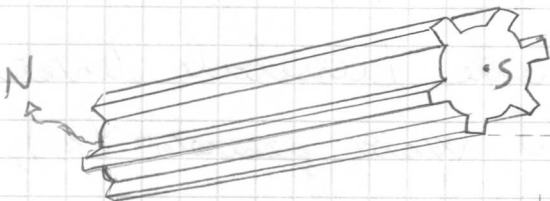


Commuto 4 volte grazie alla aggiunta della fase B e la curva assomiglia a quella del DC-BRUSHLESS

N.B. Nota che quando da -I ad A non ho M negativo come prima. Ma prima avevo solo A ed opere invece nel frattempo (mentre A è spenta), B ci sta dando +I e crea spinta al rotore in posizione favorevole a mantenere un momento positivo per A. e così via.

(3) IBRIDO

Use contemporaneamente entrambi gli effetti: il rotore è sia dentellato ma ha ^{anche} una faccia NORD e una SUD;



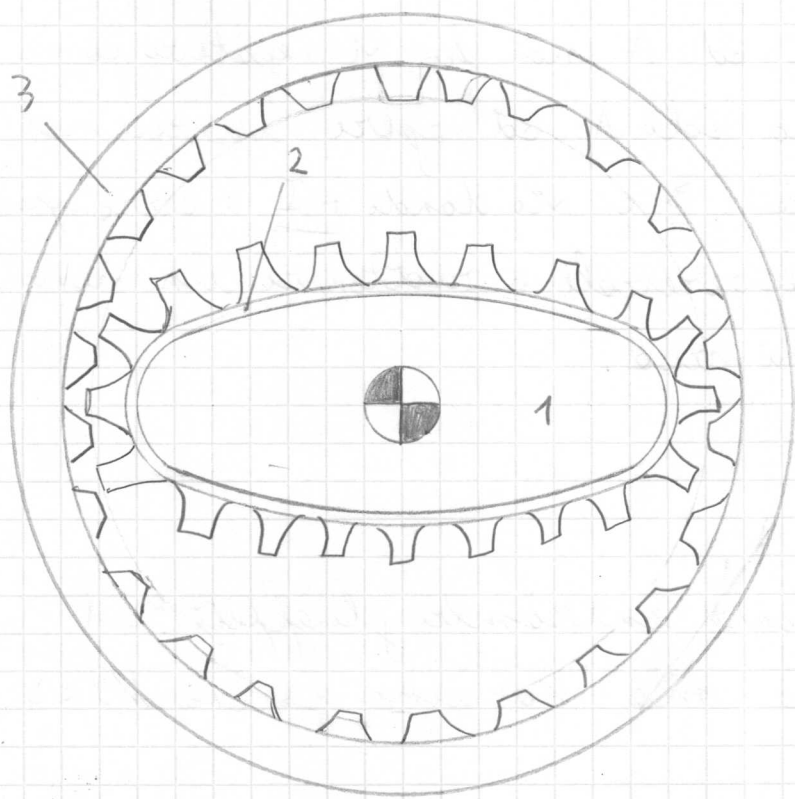
In realtà i denti sul lato nord sono staccati da quelli sul lato sud come a sinistra e vi è una particolare logica di controllo

° RIDUTTORI HARMONIC DRIVE

Sono dei riduttori che (quindi) hanno rapporti di trasmissione molto elevati $|E| > 1$ (ruota condotta più lenta) concentrati in piccoli spazi $\rightarrow$ piccoli ingombri / piccoli momenti d'inerzia.

Si compone essenzialmente di 3 parti:

- 1) WAVE GENERATOR (W/G) elemento rigido
- 2) FLEX SPLINE (FS) Ruota deformabile a dentatura esterna
- 3) RUOTA FISSA (A DENTATURA INTERNA)



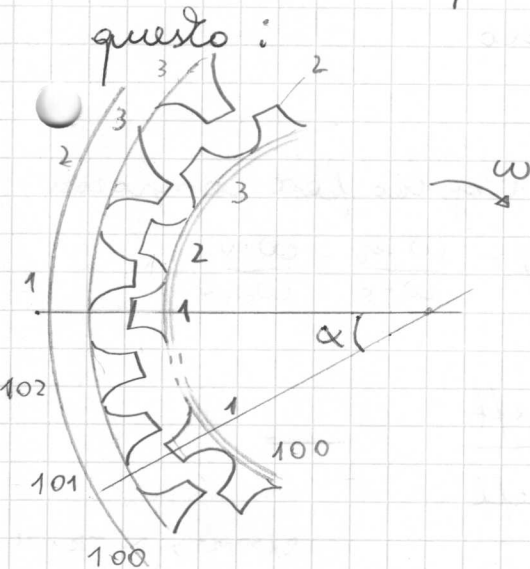
Il disegno è questo. Tuttavia l'elemento ellittico è volutamente esageratamente schiacciato mentre, nella realtà, a stento lo si distingue da una circonferenza.

La flex spline (2) è un componente flessibile dentato alloggiato sulla superficie esterna del wave generator (1), e' una sorta di catena / cinghia, quindi può strisciare rispetto alla (1). E' il wave generator (solido ellittico) che dà quindi la forma alla flex spline ma non sono solidi. La ruota fissa (3) è detta tale perché appunto è fissa. IMP

Se la ruota fissa è tale, l'unico moto può essere quello relativo tra 2 e 1. Di fatti il Wave generator che ruotando fa ingrenare la flex spline in due punti diametralmente opposti. Ma il perimetro della 2 è minore di quello interno della 3 ed essendo tutti i denti dello stesso modulo questo vuol dire che la flex spline ha meno denti di quelli della ruota fissa!

Questo genera un importante effetto: immaginiamo che la flex spline abbia 100 denti e la ruota fissa 102.

Il moto di input è dato sempre alla wave generator. Succede



Praticamente per un giro completo della wave generator il dente 1 della flex spline ingrena con il dente 1 della ruota fissa e così via sino a che arrivato al 100 dente la flex spline ha finito per i suoi denti mentre alla ruota fissa rimangono il 101 e il 102, e come è possibile se il contatto non può essere perso tra la 2 e la 3?

La flex spline si striscia di una quantità angolare α ! il contatto lo perde la 2 con la 1, e ruota relativamente alla 1. Di fatti la flex spline ricomincia, col dente 1, prima: a un angolo precedente a quello di inizio! La loro differenza è α . Il verso di slittamento è quello contrario (opposto al verso di rotazione della wave generator ω) quindi il rapporto di trasmissione è negativo. α si calcola così:

ANGOLO SOTTOFO TRADUE DENTI

$$= \frac{360^\circ}{100} \approx 3,6^\circ \rightarrow \alpha = 3,6^\circ \cdot 2 = 7,2^\circ \text{ arco!}$$

Si esprime che se il numero di denti $Z_{RF} = Z_{FS} + 2$ il rapporto di trasmissione $\frac{Z_{RF}}{Z_{FS}} = 1,02$ ma quello effettivo è $-\frac{100}{2} = -50$ perché non usa tutti i denti, e come se slittasse di 2

• Rapporto di trasmissione:

WG $\rightarrow$ ω_{IN} velocità wheel generator = INGRESSO

FS $\rightarrow$ ω_{OUT} velocità flex spline = USCITA

Uso la formula del WILLIS in un riferimento solidale alla WG:

$$\epsilon_0 = \frac{\omega_{FS} - \omega_{WG}}{\omega_{RF} - \omega_{WG}}$$

Fermo

ma questo è quello per le due ruote dentate! e a noi interessa poco.

Oltre dividerlo ^{moltiplico per} ω_{FS} perché io voglio far comparire il rapporto di trasmissione effettivo $\epsilon_{eff} = \frac{\omega_{WG}}{\omega_{FS}} = \frac{\omega_{IN}}{\omega_{OUT}}$

$$\epsilon_0 = \frac{1 - \frac{\omega_{WG}}{\omega_{FS}}}{-\frac{\omega_{WG}}{\omega_{FS}}} = \frac{1 - \epsilon_{eff}}{-\epsilon_{eff}} \rightarrow$$

RAPPORTO DI TRASH EFFETTIVO

$$\rightarrow -\epsilon_0 \epsilon_{eff} = 1 - \epsilon_{eff} \rightarrow \epsilon_{eff} - \epsilon_0 \epsilon_{eff} = 1 \rightarrow \epsilon_{eff} = \frac{1}{1 - \epsilon_0}$$

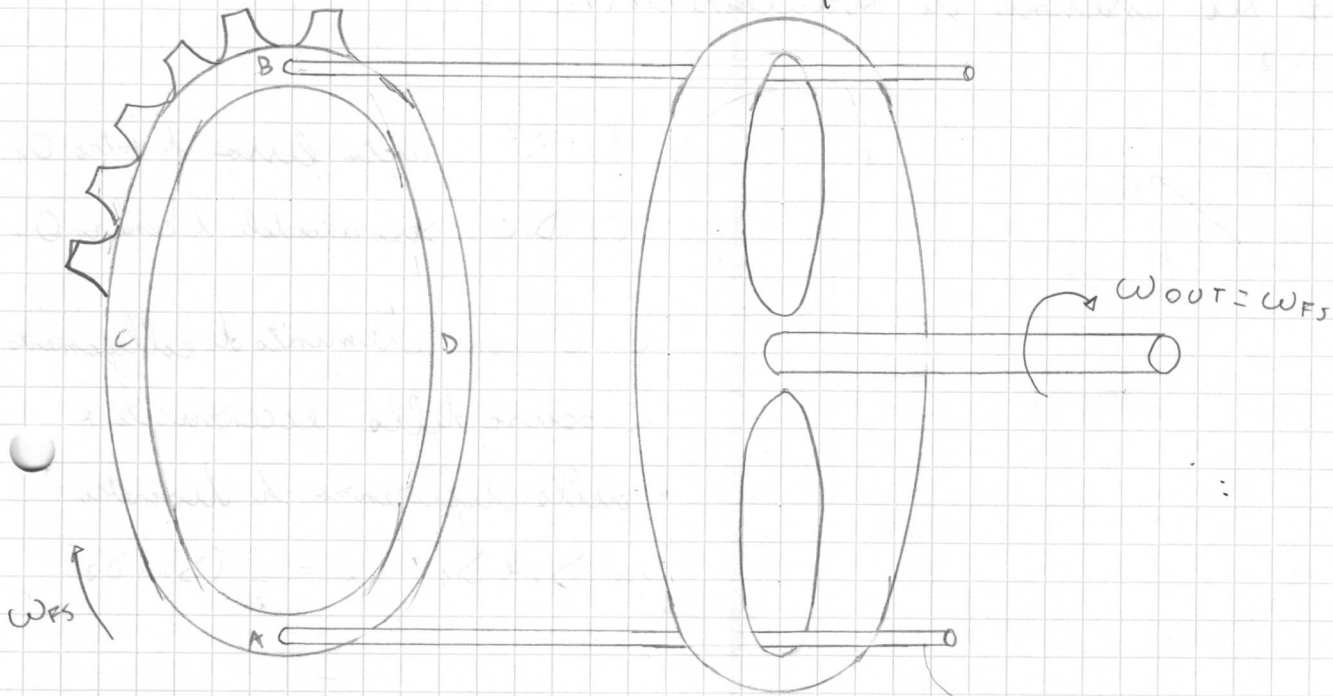
Quindi ϵ_0 lo sappiamo già dal rapporto tra i denti ed è pari a 1,02 quindi:

$$\epsilon_{eff} = \frac{1}{1 - 1,02} = -\frac{1}{0,02} = -50 \quad \text{VERIFICATO}$$

È un rapporto di riduzione elevatissimo! Quindi quanto più vicino è il numero di denti tanto più è elevato il rapporto di riduzione (dopo allontanarmi dalle forme ellittiche). Infatti se avessimo 1 solo dente in meno su FS $\rightarrow \epsilon_{eff} = -100$ ancora maggiore.

• Come raccogliere il moto della flex spline:

Resta il problema che la FS è una catena quindi il moto non può uscire da un albero al suo centro (lì c'è la WG). E allora? Si fa così:

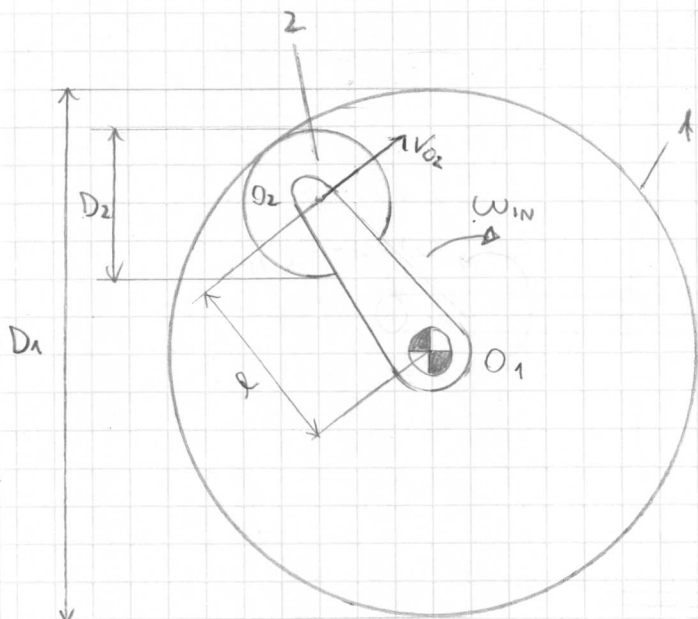


Il disegno è stato volutamente esagerato, i due piedi sono molto più piccoli e non sono stati disegnati tutti i denti della FS. Le asole garantiscono che quando i piedi sono in posizione C e D (sono solidali alla catena FS) avvicinandosi al centro, possono essere ancora "usati" per condurre ω_{OUT} .

Potrei anche usare 4 piedi mettendone altri due in C e D ma il membro di uscita sarà a croce con 4 asole.

ROTTISMI CICLOIDALI (riduttore)

Per comodità faremo il disegno senza denti ma in realtà ci sono (e non sono cononici, sono più arrotondati) ma l'importante è che vi sia assenza di strisciamento ($v_{slip} = 0$):



1. RF: ruota fissa di centro O_1

2. DC: Disco cicloidale di centro O_2

C'è un elemento di collegamento a causa della eccentricità e delle differenze di diametro tra D_2 e D_1 : $e = \frac{1}{2} (D_1 - D_2)$ *

In realtà ho esagerato anche qui: per ottenere elevato rapporto di trasmissione D_1 e D_2 devono essere vicini.

Il disco è epocicloidale (ruota all'interno della circonferenza).

Se rotola senza strisciare, in quanto esposto da ω_{IN} la sua velocità sarà: $v_{O2} = \omega_{IN} \cdot e$

Ma il disco possiederà una velocità angolare ω_D pari:

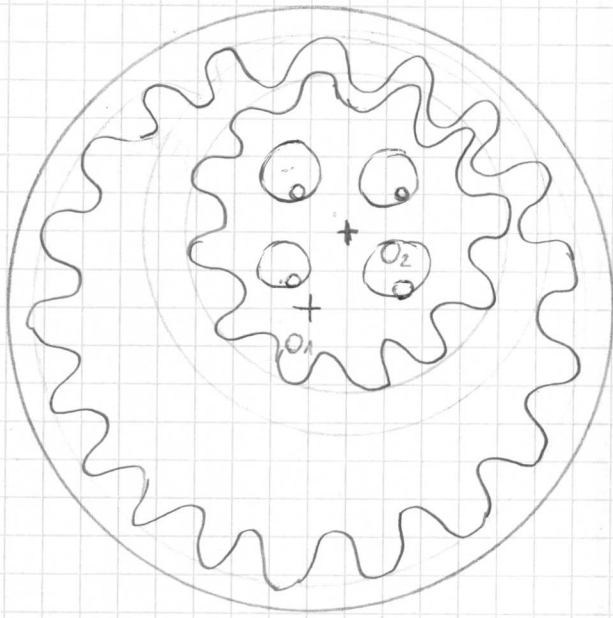
$\omega_D = v_{O2} / R = v_{O2} \cdot 2 / D_2$ ma con quale segno? antiorario opposto a ω_{IN} : $\omega_D = -v_{O2} \cdot 2 / D_2$. Ricaviamo il rapporto di trasmissione:

$$\varepsilon = \frac{\omega_{IN}}{\omega_D} = \frac{-D_2/2 \cdot \cancel{v_{O2}}}{\cancel{2} \cdot \cancel{v_{O2}} \cdot \frac{1}{2} (D_1 - D_2)} = \frac{-D_2}{D_1 - D_2}$$

* sostituisco

Quindi se $e \rightarrow 0$ ($D_1 = D_2$) $\varepsilon \rightarrow \infty$ è meglio!

La realizzazione pratica:



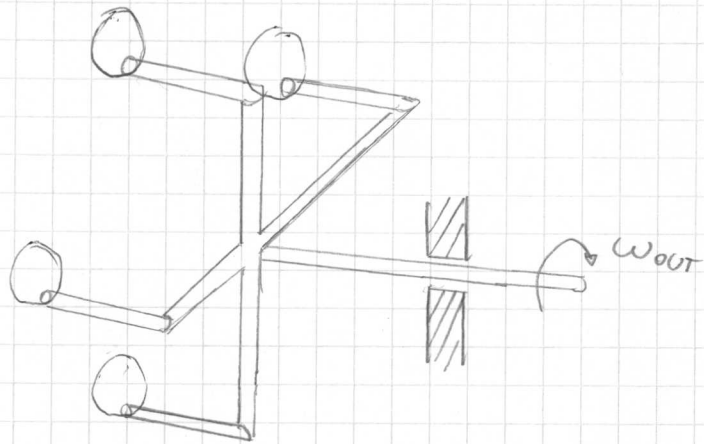
Le forme quasi sinusoidali dei denti serve a minimizzare lo strisciamento. Inoltre in verde è rappresentato il modo per raccogliere il moto ω_{out} . Le circonferenze verdi grandi fungono da "asse" come prime. Le circonferenze piccole

sono la sezione dei piedi:

Da destra vedi il disegno 3D.

Quindi vedi un'eccentricato anche tre piedi e fori (i piedi hanno rullini per muoversi per rotolamento e non per strisciamento)

Ci sono anche soluzioni a molti più piedi. (Sulle dispense vedi a 6 piedi)



La prima parte del
libro tratta di
elementi di
matematica
e fisica
e di
meccanica
e di
astronomia
e di
geografia
e di
storia
e di
filosofia
e di
teologia
e di
medicina
e di
arte
e di
scienza
e di
letteratura
e di
giurisprudenza
e di
economia
e di
politica
e di
sociologia
e di
psicologia
e di
pedagogia
e di
filologia
e di
linguistica
e di
filosofia
e di
teologia
e di
medicina
e di
arte
e di
scienza
e di
letteratura
e di
giurisprudenza
e di
economia
e di
politica
e di
sociologia
e di
psicologia
e di
pedagogia
e di
filologia
e di
linguistica

La seconda parte del
libro tratta di
elementi di
matematica
e fisica
e di
meccanica
e di
astronomia
e di
geografia
e di
storia
e di
filosofia
e di
teologia
e di
medicina
e di
arte
e di
scienza
e di
letteratura
e di
giurisprudenza
e di
economia
e di
politica
e di
sociologia
e di
psicologia
e di
pedagogia
e di
filologia
e di
linguistica
e di
filosofia
e di
teologia
e di
medicina
e di
arte
e di
scienza
e di
letteratura
e di
giurisprudenza
e di
economia
e di
politica
e di
sociologia
e di
psicologia
e di
pedagogia
e di
filologia
e di
linguistica

CRITERIO DI STABILITA' DI NYQUIST

ti permette di capire/discutere la stabilità (FRF) di un sistema dinamico CL (closed loop) guardando esclusivamente la $G_{OL}(s)$ di anello aperto OL. (come se avessi il sensore)

^{senza} Nyquist Praticamente consideriamo $H(s) = 1$ ossia anello di retroazione infinitamente pronto (il sensore non introduce ritardi)

Vediamo cosa succede alla funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso:

$$G_{CL}(s) = \frac{G_C(s) G(s)}{1 + G_C(s) G(s) H(s)} \xrightarrow{H(s)=1} G_{CL}(s) = \frac{G_C(s) G(s)}{1 + G_C(s) G(s)}$$

Analizzo il prodotto tra funz. di transf. del sistema di controllo $G_C(s)$ e sistema dinamico $G(s)$ in un unico $G(s)$:

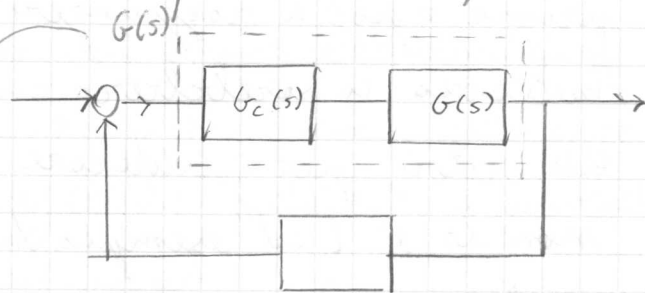
$$\left[G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \right]$$

Ora dovrai studiare i poli di tale funzione per vedere la stabilità.

A matlab non ci vuole niente a dirgli di trovare i poli s per cui il denominatore fa 0 (poli).

NYQUIST non fa tutto questo ma guarda quello di anello aperto:

$$G_{OL}(s) = G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{u}(s)}$$



MP Se questo ha K poli con parte reale positiva, il sistema in loop chiuso ($G_{CL}(s)$) è stabile

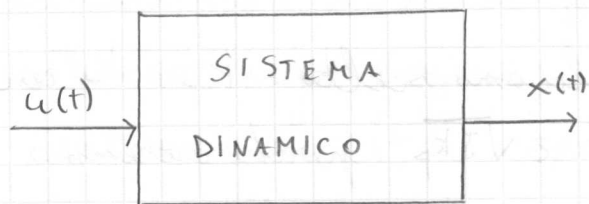
se e solo se

succede questo:

Qui invece si parla di non sapere la T e la f del sistema
 dove andremo a mettere il controllore o quantomeno queste vorran-
 no nel tempo (meglio perché, un giorno, di quel sistema si vorranno
 conoscere i parametri).

METODO ZIEGLER - NICHOLS

Questo metodo ci dice: o K noi del sistema sappiamo poco, di-
 scorso ignoriamo i parametri (per esempio ci sono processi chimici)
 o sono poco prevedibili e allora? Prendiamo un sistema dinamico
 generico che si vuole controllare:



Si sottopone, lo stesso, ad un ingresso $u(t)$
 che sia codificato, ben definito e guardo
 la $x(t)$. Da questa cerchiamo di fare
 delle valutazioni per ricavare K_p, K_d, K_i .

L'ingresso tipo che si dà è
 $u_0 \cdot 1(t)$ il gradino
 e mettiamo che il sistema risponde
 con una $x(t)$ come quella di destra.

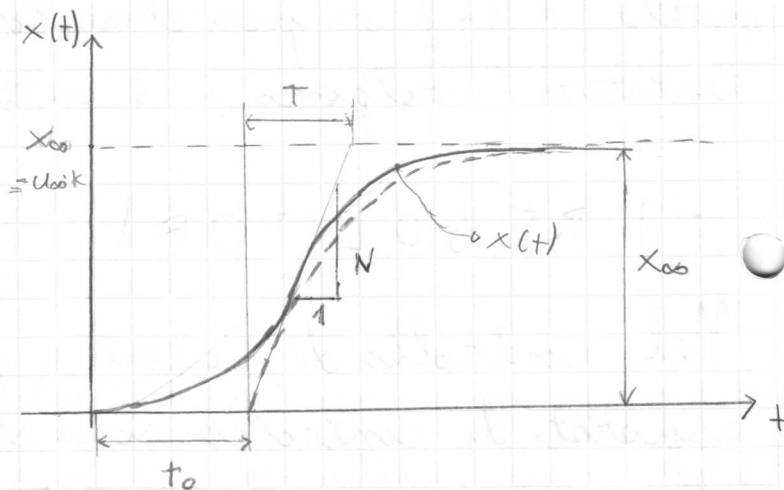
Non sappiamo che funzione è né
 il sistema di che ordine è.

Questa risposta viene approssimata

a una risposta di un sistema del I ordine (color rosso) che è spostato
 verso destra (siccome parte con derivata sempre $\neq 0$) altrimenti non lo potrebbe
 approssimare. Ha sue funz di transf. lo sappiamo:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-st_0}$$

e^{-st_0} è proprio per il ritardo con
 cui si desta. T invece è la costante di tempo
 del transitorio. $t_0, T > 0$
 t_0 è incognita come anche T



K invece è il guadagno statico e reale $[K = x_{\infty}/u_0]$ entrambe note perché u_0 lo impongo io e lo x_{∞} lo vedo e guardo.

Il problema è ricavare t_0 e T . Per farlo si fa una costruzione: Notiamo che la tangente al punto di flesso (dove $x(t)$ cambia curvatura) è uguale alla tangente della funzione del 1° ordine nel suo 0 (ovvero dove parte ossia t_0). Stiamo parlando della retta / così, la stessa che ci ha permesso di trovare la costante di tempo T . (In effetti quelle del primo ordine si costruisce proprio secondo questo criterio).

In dispense viene introdotto anche N che può essere visto tramite la costruzione in verde che è costruita in un punto a caso ed è una porzione del triangolo più grande rosso; quest'ultimo ha base T e altezza x_{∞} mentre quello verde ha altezza N e base 1 (per unità di tempo). Condividono la tangente e infatti sono proporzionali:

$$\left[\frac{N}{1} = \frac{x_{\infty}}{T} \right] = N \quad \begin{array}{l} N \text{ sta a } 1 \text{ come } x_{\infty} \text{ sta a } T. \text{ (è un od. denom. lo vogliamo)} \\ \text{Ora vediamo i:} \end{array}$$

CASI DEI VARI REGOLATORI

- Regolatore P (solo proporzionale)

È l'unico parametro utile nel controllo proporzionale è K_P :

$$\left[K_P = \frac{u_0}{N t_0} \left(1 + \frac{R}{3} \right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{Dove: } N = \frac{x_{\infty}}{T} \\ R = \frac{t_0}{T} \quad \text{il rapporto tra i ritardi} \end{array}$$

• Regolatore PD

$$K_P = \frac{u_0}{N t_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6} \right)$$

Cambia solo la parentesi

Al fine pratico conta copiare l'approccio non tutte le formule che poi prendiamo dalle letterature, non vanno ricordate a memoria. È importante che dall'ingresso e l'uscita si pesco tutti questi valori ($N, t_0, T, \dots$) che poi inserisco nelle formule.

Per ricavare K_d dobbiamo prima scrivere la funzione di trasferimento del controllore (G_c): È facile da ricordare, nel controllore entra l'errore $\bar{e}(s)$ ed esce la somma dei vari termini integrale, derivativo e proporzionale ($K_P \bar{e}(s) + \dots$):

$$G_c(s) = \frac{K_P \bar{e}(s) + K_d \overset{\text{derivato } \bar{e}(s)}{s \bar{e}(s)} + \frac{K_i}{s} \overset{\text{integrale errore } \bar{e}(s)}{\int \bar{e}(s)} = \underset{\text{mette in evidenza } K_P}{\bar{e}(s)}$$

$$= K_P \left(1 + \frac{K_d}{K_P} s + \frac{K_i}{K_P s} \right) =$$

Davanti le s vanno le costanti di tempo derivativo e integrale quindi sono i raggruppamenti: $T_d = \frac{K_d}{K_P}$ e $T_i = \frac{K_P}{K_i}$

$$G(s) = K_P \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Con questa equazione si può ragionare, invece che con la tripletta K_P, K_d e K_i , con la tripletta K_P, T_d, T_i .

È infatti Ziegler-Nichols nel caso PD non dà K_d ma T_d :

$$T_d = t_0 \frac{6 - 2R}{2.2 + 3R}$$

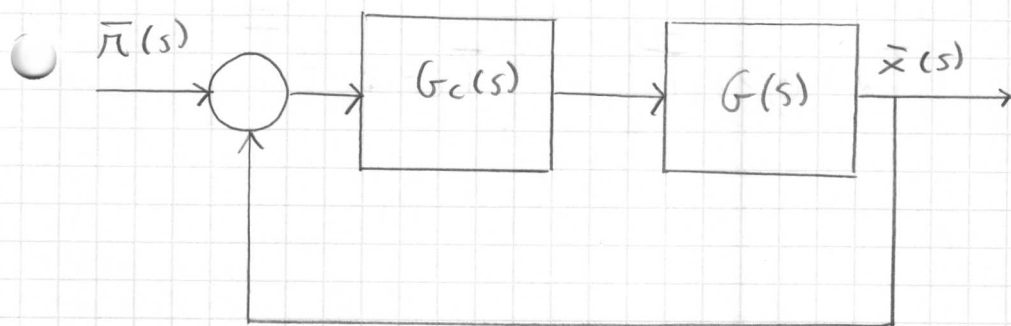
Regolatore PI

$$K_p = \frac{u_0}{N t_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12} \right)$$

$$T_i = t_0 \cdot \frac{30 + 3R}{9 + 20R}$$

METODO ZIEGLER-NICHOLS ALTERNATIVO

Lo scopo è sempre lo stesso determinare K_p, K_d, K_i per un sistema di cui non sappiamo nulla:

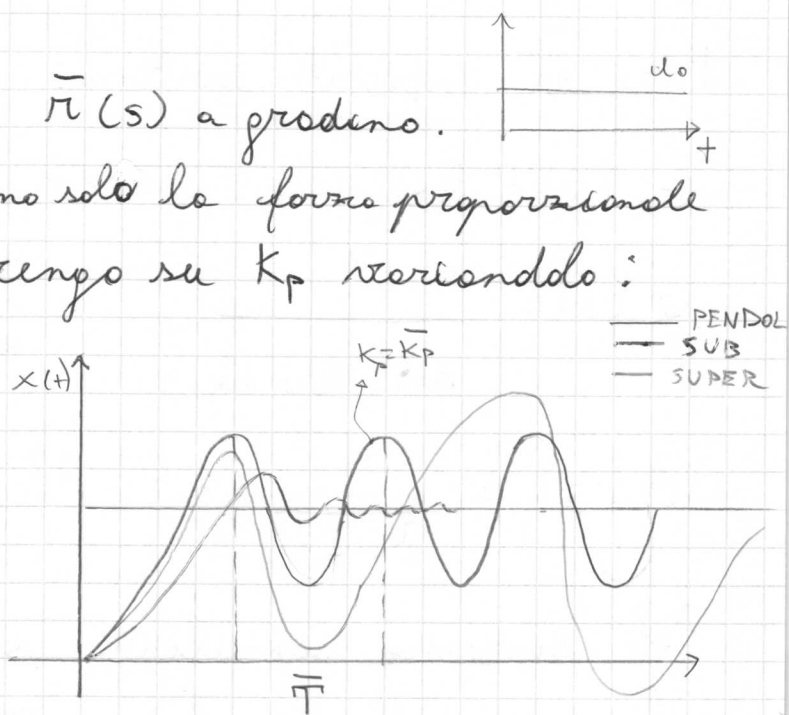


Di $G(s)$ non so nulla
mentre $G_c(s)$ lo
costruisco dandogli
i valori di K_p, K_d, K_i .

Si introduce un riferimento $\bar{r}(s)$ a gradino.

Per iniziare, in $G_c(s)$, lasciamo solo la forma proporzionale P (spegniamo I e D). Intervengo su K_p variandolo:

Ci sarà un valore di soglia $\bar{K}_p$ che ci darà una stabilità limite detta pendolazione che è al confine tra le condizioni subcritiche ($K_p < \bar{K}_p$) e le condizioni supercritiche ($K_p > \bar{K}_p$).



Il moto di pendolazione è periodico: allora ne registriamo il periodo $\bar{T}$. Otteniamo una coppia $\bar{K}_p, \bar{T}$.

Da qui ottengo i casi di tutti i regolatori:

• Regolatore P

$$[K_p = 0,5 \bar{K}_p]$$

Deve essere la metà del $\bar{K}_p$ quello di pendolazione

• Regolatore PD

$$K_p = 0,5 \bar{K}_p$$

$$[T_d = 0,2 \bar{T}]$$

Costante di tempo dell'azione derivativa

• Regolatore PID

$$[K_p = 0,6 \bar{K}_p]$$

$$[T_d = 0,12 \bar{T}]$$

$$[T_i = 0,5 \bar{T}]$$

E SE RCLIZIO

Per il seguente sistema:

$$G_c(s) = K_p$$

controllo

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + \pi s + k}$$

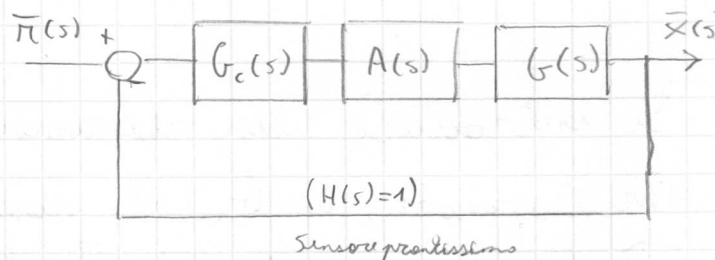
$$\begin{aligned} m &= 1 \\ \pi &= 2 \\ k &= 40 \end{aligned}$$

sistema

$$A(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

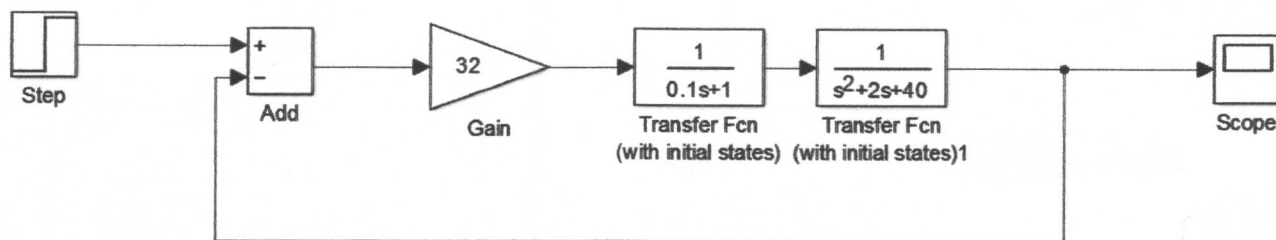
$$\tau = 0,1$$

disturbo

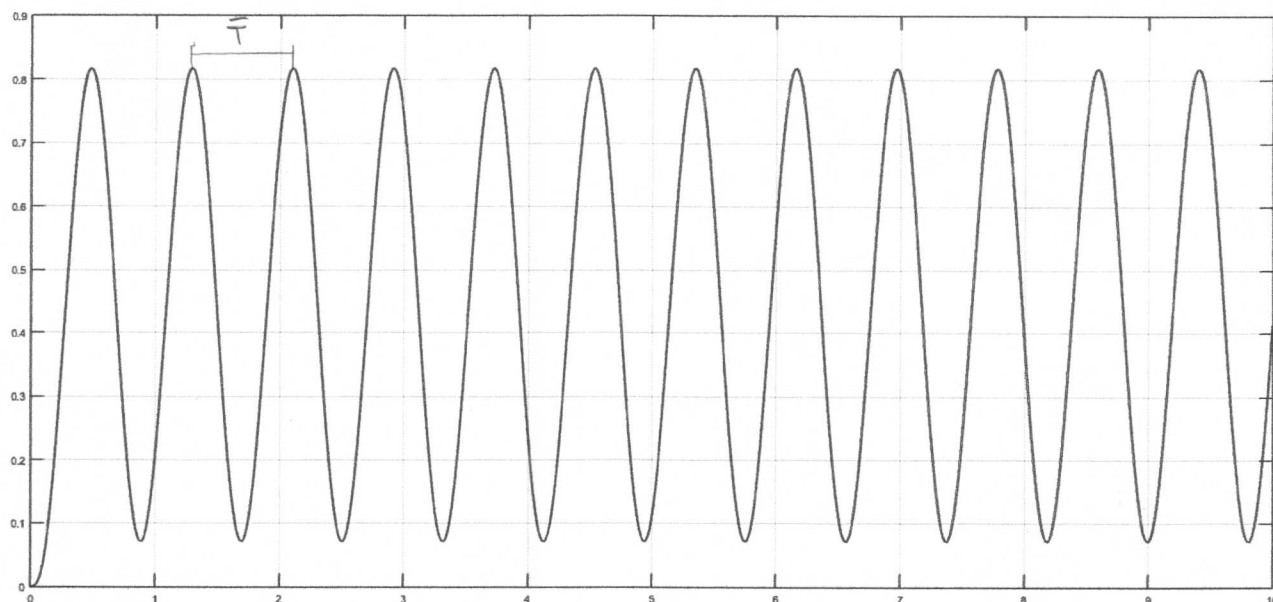


Il sistema simulink si impasta come a destra. Si vede che variando K_p , la pendolazione (scope) si annulla per $\bar{K}_p = 32$. $\bar{T}$ si legge dal grafico e fa circa 0,8.

Ricerca valore K_p di pendolazione (32):



Scope dell'uscita raggiunta la pendolazione:



SOLUZIONE ANALITICA

$$G_{CL} = \frac{H(s) G_c(s) A(s) G(s)}{1 + H(s) G_c(s) A(s) G(s)} = \frac{K_p \cdot \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{ms^2 + ns + k}}{1 + \frac{K_p}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{ms^2 + ns + k}}$$

Si trovano i poli di tale funzione e ricerchiamo le soluzioni complesse coniugate senza parte reale.

Ricerca valore λ di pendolazione (32)



Scopo dell'uscita raggiunta la pendolazione



12) CONTROLLO D'ASSE: CONTROLLO DI TRAIETTORIA

Ora la $|\theta_{des} = \theta_{des}(t)|$. Non vogliamo raggiungere una θ costante ma inseguire una θ che varia nel tempo con una sua legge.

Ci mettiamo sempre nelle condizioni del rotore a 1.G.D.L.

Aggiro sempre un disturbo ma in questo caso più "coltivo" perché varia nel tempo $d(t)$.

Così che cambia il l'errore: esso varia nel tempo:

$$\left[e(t) = \theta_{des}(t) - \theta(t) \right] \rightarrow \begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\theta}_{des}(t) - \dot{\theta}(t) \\ \ddot{e}(t) &= \ddot{\theta}_{des}(t) - \ddot{\theta}(t) \end{aligned}$$

Quello che aggiungeremo sarà:

TERMINE DI FEED-FORWARD (compensazione in avanti):

Il caso è quello di un regolatore PD. Scriviamo l'equazione del moto:

$$\hat{J} \ddot{\theta} + \hat{f} \dot{\theta} = -d(t) + \underbrace{K_p e(t) + K_d \dot{e}(t)}_{\text{ATTUATORE}} + \hat{J} \ddot{\theta}_{des}(t) + \hat{f} \dot{\theta}_{des}(t)$$

I termini del PD già li conosceremo, mentre i due termini di feed-forward sono nuovi: $\hat{J}$ e $\hat{f}$ (sono delle stime):

$\hat{J}$ Momento d'inerzia di massa stimato
 $\hat{f}$ Coefficiente d'attrito viscoso stimato

$\hat{J}$ e $\hat{f}$ sono quelli che ci dà la fisica del problema mentre $\hat{J}$ e $\hat{f}$ li stimiamo noi che progettiamo.

Tutti i termini sono proporzionali a qualcosa che varia nel tempo. Io devo cercare e scegliere i coefficienti davanti.

Oggi giorno $\hat{J}$ viene stimato abbastanza bene, con piccoli errori, tramite un disegno CAD. Mentre è più difficile

stimare $\hat{f}$, ma spesso pesa poco. In ogni caso se $\hat{f}$ è fatto delle corrette stime:

$$\left[\hat{J} \approx J \right] \text{ e } \left[\hat{f} \approx f \right] \quad \text{Ovvero sono prossimi ai valori reali.}$$

Ebbene vediamo che succede in questo caso. Portiamo tutto a destra e il disturbo a sinistra:

$$d(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + \hat{J} \ddot{\theta}_{des}(t) - J \ddot{\theta}(t) + \hat{f} \dot{\theta}_{des}(t) - f \dot{\theta}(t)$$

$$\downarrow \hat{J} = J; \hat{f} = f$$

$$d(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + J \underbrace{(\ddot{\theta}_{des}(t) - \ddot{\theta}(t))}_{\ddot{e}} + f \underbrace{(\dot{\theta}_{des}(t) - \dot{\theta}(t))}_{\dot{e}}$$

$$\downarrow \text{metto in evidenza } \ddot{e}$$

$$\left[J \ddot{e} + (f + K_d) \dot{e} + K_p e = d(t) \right] \quad \begin{array}{l} \text{EQ. DELLA DINAMICA} \\ \text{DELL'ERRORE} \\ \text{(nelle suddette ipotesi)} \end{array}$$

E' del tutto identico a quello nel controllo di posizione ossia punto - punto. Tuttavia non rassicura la dinamica del sistema perche' l'errore non e' uguale allo θ !

Primo valore $\dot{e} \neq \dot{\theta}$ ora non piu' perche' θ_{des} e' funzione del tempo e le sue derivate non sono nulle.

In piu' il secondo membro $d(t)$ varia nel tempo.

ESERCIZI:

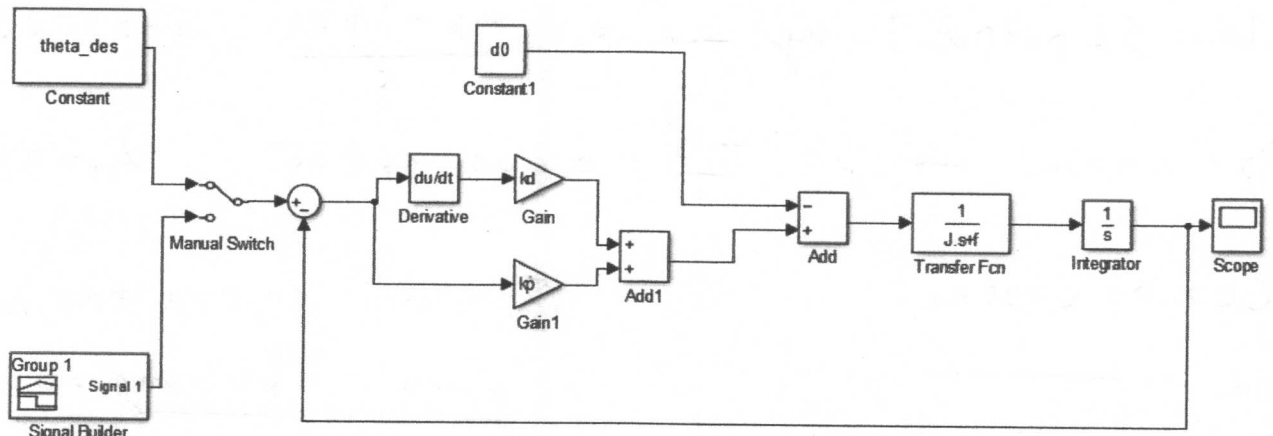
Nonostante $d(t)$ lo scegliamo costante e pari a d_0 . Scegliendo $\omega_{\infty} = 0,01$

Dati: $J = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $f = 0,1$

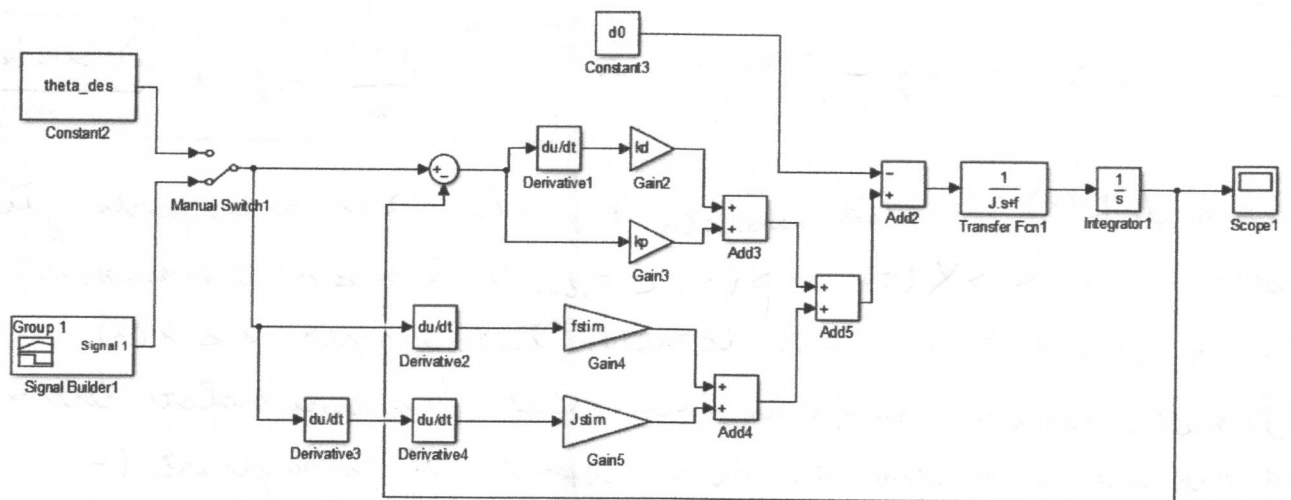
$$d_0 = 100 \text{ N} \quad \omega_{\infty} = 0,01 \Rightarrow K_p = \frac{d_0}{\omega_{\infty}} = 10^4 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \left| \quad K_d = 2\sqrt{J K_p} = 45 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{rad} \cdot \text{s}$$

$\hat{J}, \hat{f}$ li scegliamo noi (il prof sceglie $\hat{J} = 0,1$ e $\hat{f} = 0,2$)

CASO $\theta_{des} = \text{cost}$



CASO $\theta_{des}(t)$ [SIGNAL BUILDER]: ci sono i termini $\hat{\theta}$, $\hat{\dot{\theta}}$



Nel secondo caso si nota l'aggiunta dei termini $\dot{\theta}_{des}$ e $\ddot{\theta}_{des}$

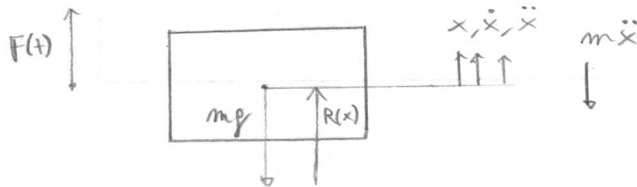
PROVA D'ESAME MOLLA PNEUMATICA

Ricerca i dati utili:

$$R(0) = S[p_0 - p_{atm}] = mg \rightarrow p_0 = \frac{mg + S p_{atm}}{S} = 3,223,540 \text{ Pa}$$

$$D = 0,02 \text{ m} \rightarrow S = \frac{\pi D^2}{4} = 0,0003142 \text{ m}^2 \quad h_0 = 0,01 \text{ m}$$

• CORPO LIBERO



① CASO SENZA $F(t)$, forza sinusoidale.

$$-m\ddot{x} + R(x) - mg = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{R(x)}{m} - g$$

② CASO CON $F(t)$

$$-m\ddot{x} + R(x) - mg + F(t) = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{R(x)}{m} - g + \frac{A \sin(2\pi h t)}{m}$$

Il verso di $R(x)$: è stato lasciato + perché $R(x)$ si comporta già da molla: se $x > x(0)$ $p(x) < p_{atm}$ e $R(x) < 0$ la forza opposta al verso di x , si oppone: è già una reazione. Viceversa per $x < x(0)$.

Nelle molle lineari mettiamo $-kx$ perché k è uno scalare dobbiamo dirgli noi che se x aumenta deve reagire nel verso opposto (-).

Lo schema a blocchi e gli scope sono alle pagine successive:

1) Basta mettere nel primo integratore (quello da cui esce $x_{p2} = \dot{x}$) initial condition $v = 2 \text{ m/s}$

Old' interno di F_{cm} vale: $p_0 \cdot (1 / (1 + u(1)/h_0)^8)$ $u(1)$ è l'ingresso.
 // F_{cm1} vale: $S \cdot [u(1) - p_{atm}]$

2) Il periodo si vede dallo scope

3) Si aggiunge $F(t)$

4) Facciamo un grafico x y ($R(x) - x$) e vediamo l'inclinazione essente a $x = 0$.

Corso di MECCATRONICA
Prof. A. SENATORE
Prova del xx

Una *molla pneumatica semplice* è schematizzabile mediante un cilindro metallico contenente aria in pressione (fig. 1). Ipotizzando una perfetta tenuta tra pistone e cilindro ed indicando con S la superficie del pistone, la reazione della molla pneumatica semplice è quindi:

$$R(x) = S[p(x) - p_{atm}]$$

in cui

$$p(x) = p_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{h_0}\right)^\gamma} \quad \text{trasformazione adiabatica } \gamma=1.41$$

ove h_0 e p_0 sono, rispettivamente, la posizione del pistone e la pressione nel cilindro quando la massa m è in equilibrio statico ($x=0$):

$$R(0) = S[p_0 - p_{atm}] = mg$$

Assumendo i seguenti dati:

alesaggio pistone = 20 mm; $m = 100$ kg; $h_0 = 100$ mm.

- 1) si simuli il comportamento dinamico del sistema *massa - molla pneumatica semplice* con condizioni iniziali $x(0)=0$, $v(0)=2.0$ m s⁻¹;
- 2) si valuti il periodo delle oscillazioni libere;
- 3) si simuli la risposta dello stesso sistema quando è presente una forza verticale sinusoidale di ampiezza 1000 N e frequenza 1.0 Hz;
- 4) si valuti la rigidezza κ della molla pneumatica definita come derivata, valutata nella posizione di equilibrio, della reazione $R(x)$, presa col segno cambiato, rispetto alla variazione di altezza x .

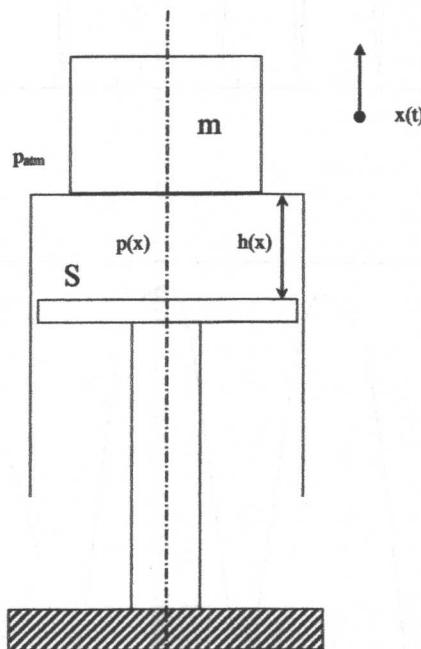
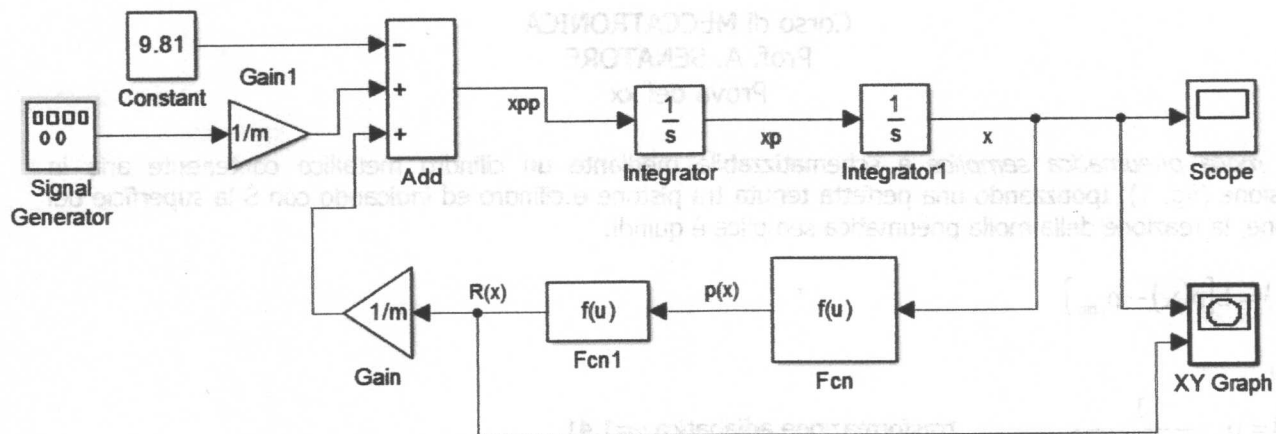
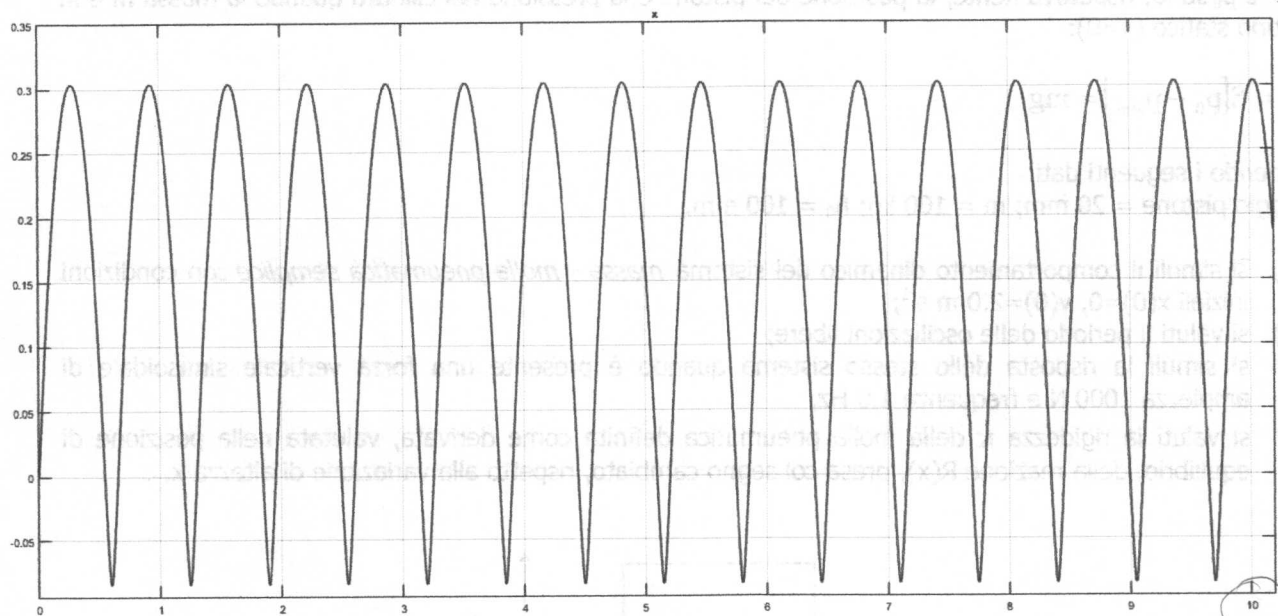


figura 1

$p_{atm} = 101325$ Pa

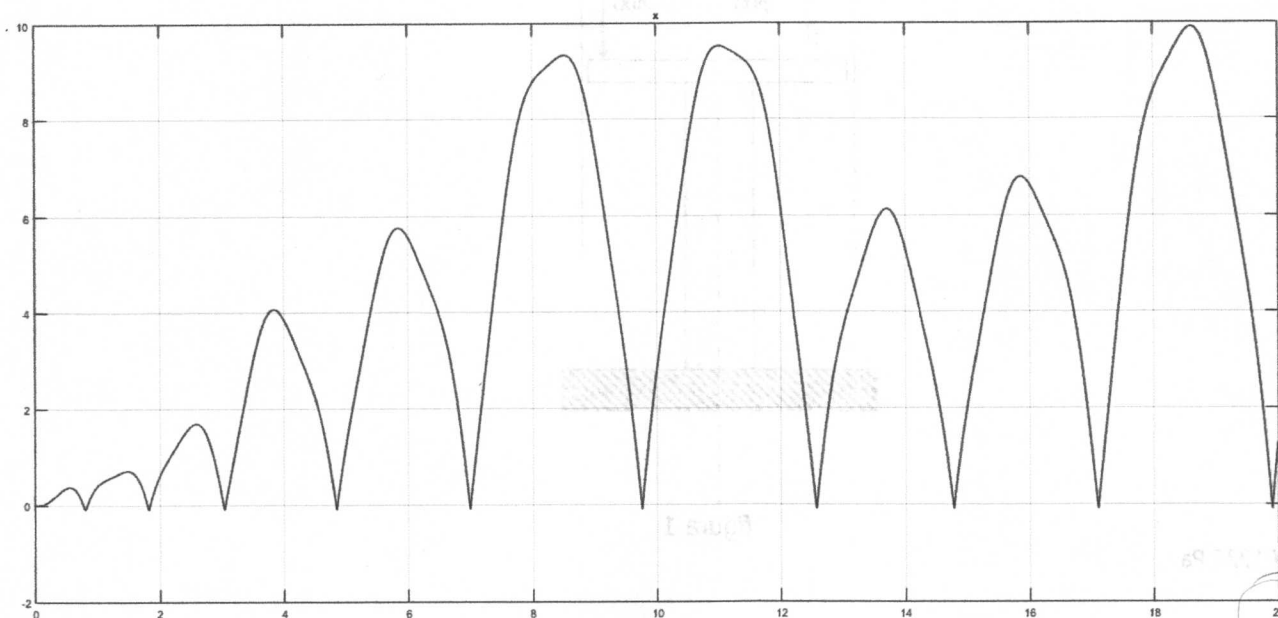


• CASO SENZA $F(t)$ ma con $V_0 = 2 \text{ m/s}$



SU 10 SEC

• CASO CON $F(t)$



SU 20 SEC

0 non si vedeva

(15)

TIRE - ROAD FRICTION

(coefficiente d'attrito delle ruote gommata)

Perciò che stimare il coefficiente d'attrito relativo tra ruote (pneumatico) e suolo, si cerca di adottare, tramite una logica di controllo (una centralina), la dinamica (grazie ai freni) delle ruote ai diversi tipi di suoli nelle diverse condizioni.

Spesso si fanno prove dei test tramite:

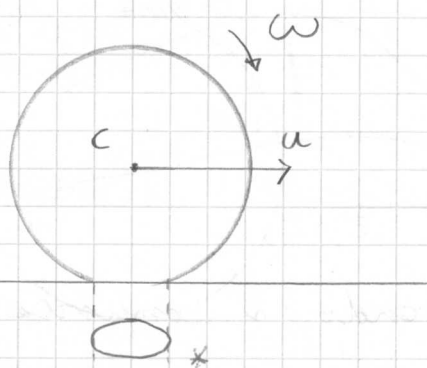
Hardware in the loop (HIL): Tecniche di testing di una unità di controllo elettronico (centralina auto) collegandole ad appositi banchi che riproducono in modo più o meno completo il sistema elettrico ed elettronico ^{del sistema ruote} a cui sono destinate. Il sistema è composto di sensori, attuatori, cablaggi e modelli.

Un caso in cui viene usato tale approccio è l'

• ABS (anti-locking system)

È importante difendere prima il fattore di slip

Slip ratio:

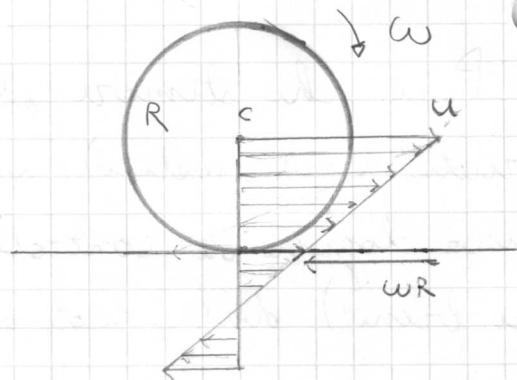


In condizioni normali (di puro rotolamento) la ruota procede con una velocità u dell'auto (dell'asse delle ruote) più la velocità di rotazione ω intorno a C . Sommate queste due velocità, ci permettano di vedere la pura rotazione rispetto al punto di

contatto. Il punto di contatto è istantaneamente fermo grazie alle forze d'attrito con l'asfalto che dipende dall'impronta dello pneumatico* (che aumenta la superficie di contatto).

Puo' capitare che, frenando, le ruote si bloccano e quindi che tutte le ruote proceda con velocità traslazionale u .

↑ In realtà la ruota attraversa fasi intermedie tra la velocità del punto di contatto a solo diversa da 0 perché quella rotazionale non bilancia la u . Se viene frenata (frenata ω , l'auto procede sempre con u) si riduce la velocità tangenziale



ωR dovuta alla rotazione (verrà, ω minore di quello a pag precedente, u è uguale). Quindi nel punto di contatto ho una velocità di strisciamento V_{SLIP} (rosso). Se continuo a frenare arrivo al punto che $\omega = 0$ e tutte le ruote striscia, traslo solidamente, con velocità u . (Riassumendo se $u \neq \omega R \rightarrow$ STRISCIAMENTO)

Allora l'obiettivo dell'ABS è quello di inseguire il punto di massima frenatura senza mai raggiungere il bloccaggio.

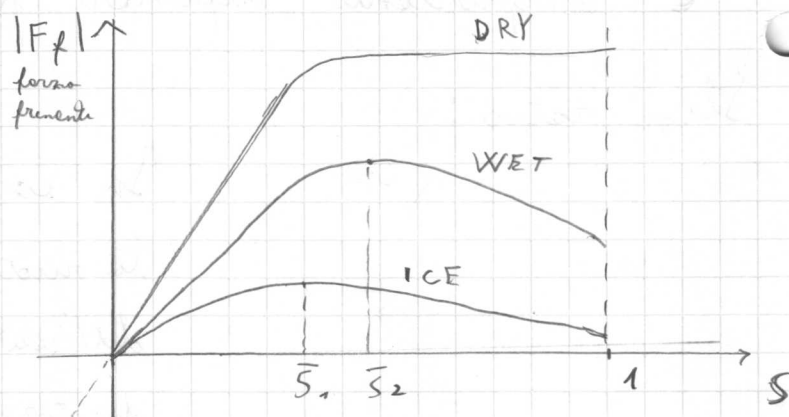
Si introduce a scopo grafico, lo SLIP RATIO una sorta di V_{SLIP} percentuale / frazionata; esso ha due espressioni:

• SLIP RATIO TEORICO

$$S = \frac{u - \omega R}{\omega R} = \frac{V_{SLIP}}{\omega R}$$

• SLIP RATIO PRATICO

$$S = \frac{u - \omega R}{u} = \frac{V_{SLIP}}{u}$$



Viene espresso in % e, in particolare al secondo, si comporta come vorremmo detto: se $u = \omega R \rightarrow S = 0$ NO SLITTAMENTO

Se $\omega = 0 \rightarrow S = 1$ bloccaggio della pneumatica.

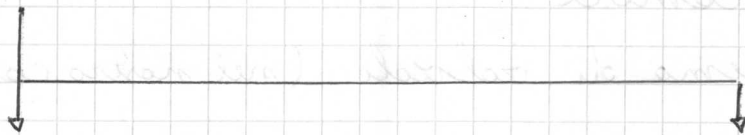
↑ In alto vi è anche un grafico che mostra nelle varie condizioni come si comporta la S in funzione delle forze frenanti applicate (si cerca di raggiungere il MAX $\bar{S}_1; \bar{S}_2$). Se supero ad esempio $\bar{S}_1$ il ABS scatta il freno. Tra curve continue anche nel 3° quadrante ma lì la forza è trascinante: posso aumentare ω talmente tanto da strisciare solo che

17) ATTUATORE OLEODINAMICO:

- È un sistema di regolazione di potenza che utilizza come vettore di energia olio minerale o sintetico.
- Grazie all'incompressibilità dell'olio è possibile generare forze molto elevate (senza grosse perdite) e seguire leggi di moto molto complesse con alta precisione.
- L'utilizzo dell'olio permette inoltre altri vantaggi:
 - lubrifica le parti in movimento relativo, mantiene puliti gli organi meccanici e li protegge dalla corrosione.
- Sono molto utilizzati per il posizionamento lineare di carichi elevati (con precisione anche di $0,01 \text{ mm}$).
- Gli svantaggi sono: la loro pesantezza e il loro costo.
- Si distinguono:

Cilindri oleodinamici
(attuatori lineari)

motori oleodinamici
(attuatori rotativi)

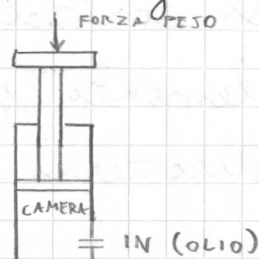


A DOPPIO EFFETTO

A SEMPLICE EFFETTO

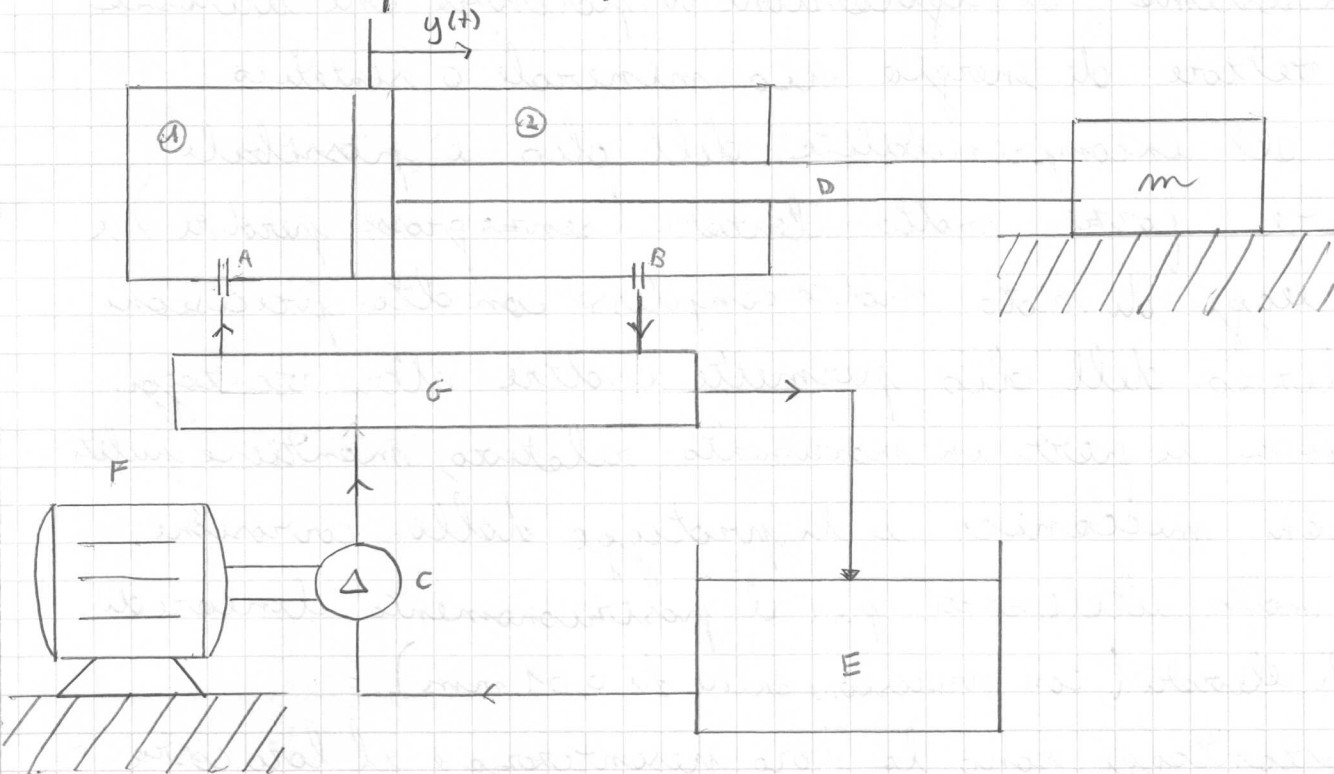
La spinta del pistone è prodotta per differenza di pressione del fluido presente in due camere. Il moto è dunque bidirezionale e controllato (elettronicamente)

La spinta è generata dall'olio in una sola camera, quindi non è controllabile il ritorno del pistone (se non ruotando la camera, o spesso si fa ritornare in posizione grazie alla forza peso)



• ATTUATORE (LINEARE) IDRODINAMICO A DOPPIO EFFETTO

Analizziamo questo tipo di attuttore:



Gli elementi costitutivi fondamentali sono:

- ① ② le due camere
- A B Un sistema di valvole (nel nostro caso 2)
- C Una pompa
- D un cilindro (attuatore) che in figura viene usato per spostare la massa m .
- E Un serbatoio che alloggia il fluido di lavoro necessario (Quello non presente nelle camere e nei "fili", le tubazioni)
- F Un motore (in genere elettrico) che aziona la pompa.
- G Servovalvole o valvole di regolazione / distribuzione. Il controllo avviene essenzialmente su questo elemento per regolare la distribuzione in ① e ② attraverso A e B

Equazioni costitutive:

Il bilancio di massa su un qualsiasi volume di controllo che sia ① o ② porta a scrivere:

$$\underbrace{(\rho Q)_{IN}}_{\text{Portata massica entrante}} - (\rho Q)_{OUT} = \frac{d}{dt} (\underbrace{\rho V}_{\text{massa dentro } V})$$

Se è per il singolo volume siamo portati a dire chi è $(\rho Q)_{OUT}$?
come può uscire? Ebbene la tenuta non è mai perfetta, parte
dell'olio irrefrile, lo vedremo dopo.

$$\dot{m}_{IN} - \dot{m}_{OUT} = \frac{d}{dt} (\rho V) \rightarrow \text{derivata del prodotto}$$

$$// \quad = V \frac{d}{dt} \rho + \rho \frac{dV}{dt}$$

Il problema adesso è derivare ρ perché è funzione
di due variabili $\rho = \rho(P, T)$, pressione e temperatura.

Ecco lo sviluppo in serie di Taylor fermato al primo
ordine, intorno al valore iniziale $\rho_0 = \rho(P_0, T_0)$

$$\rho = \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_{P_0} (P - P_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_0} (T - T_0) + \dots$$

non li uso

Divido e moltiplico tutto per ρ_0 :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_{P_0} (P - P_0) + \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_0} (T - T_0) \right)$$

Dove:

$$\frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_{P_0} = \frac{1}{\beta} \equiv \text{MODULO DI COMPRESSIBILITA' ISOTERMO}$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_0} = -\alpha \quad \text{COEFFICIENTE DI DILATAZIONE ISOBARO}$$

Ritoverremo le variazioni di temperatura irrilevanti ai fini della valutazione di ρ (inoltre l'olio all'interno di un motore idrodinamico passa da $5 \div 15^\circ$ a $50 \div 60^\circ$) $\rightarrow$

$\rightarrow$ TRASFORMAZIONI ISOTERME $\rightarrow \alpha = 0$

$$* \quad \rho \approx \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{\beta} \right) \quad \begin{array}{l} \text{IPOTESI 1} \\ \text{FLUSSO ISOTERMO} \end{array}$$

Ora però a me serve la derivata rispetto al tempo. Lo faccio considerando che ρ_0 è cost come P_0 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{\text{IPOTESI 1}^*}{=} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho_0}{\beta} \frac{dP}{dt}$$

Sostituisco nella formula intera:

$$(\rho Q)_{IN} - (\rho Q)_{OUT} = V \frac{\rho_0}{\beta} \frac{dP}{dt} + \rho \frac{dV}{dt}$$

In genere per un olio $\left| \frac{P - P_0}{\beta} \right| \ll 1$ la densità varia poco con la pressione. Quindi per la * $\rho \approx \rho_0$ la densità rimane prossima a ρ_0 !

$$(\rho Q)_{IN} - (\rho Q)_{OUT} = V \frac{\rho}{\beta} \frac{dP}{dt} + \rho \frac{dV}{dt}$$

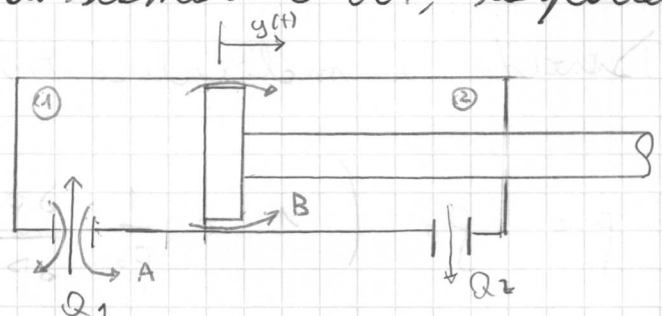
$$Q_{IN} - Q_{OUT} = \frac{V}{\beta} \frac{dP}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

Ora interviene il discorso di stemore Q_{OUT} , la portata che trofale:

Parte dell'olio fuoriesce steso dall'ingresso A ed è proporzionale alla pressione in camera ① P_1 .

Un'altra parte trofale da

una camera all'altra, da ① a ② ed è proporzionale alla differenza di pressione tra le camere: $P_1 - P_2$



I coefficienti di proporzionalità sono:

Per A: C_{ep} (coefficiente esterno di perdite)

Per B: C_{ip} (coefficiente interno di perdite)

La somma di tali quantità ci dà Q_{out} :

$$Q_{out} = C_{ip} (p_1 - p_2) + C_{ep} (p_1)$$

Sostituisco nella formula (adottata al volume ①)

$$Q_{1,1} = C_{ip} (p_1 - p_2) + C_{ep} p_1 = \frac{V_1}{\beta} \frac{dp_1}{dt} + \frac{dV_1}{dt}$$

La formula adottata per il volume ② è la stessa, solo che se il pistone si muove nella direzione $y(t)$, Q_2 dovrà uscire dal volume, quindi:

$$-Q_2 = C_{ip} (p_2 - p_1) + C_{ep} p_2 = \frac{V_2}{\beta} \frac{dp_2}{dt} + \frac{dV_2}{dt}$$

Riscriviamo il volume in funzione della variabile $y(t)$. Se la sezione della camera A è costante si avrà:

$$V_1(t) = V_{0,1} + A y(t)$$

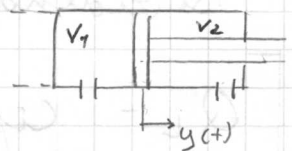
$$V_2 = V_{0,2} - A y(t)$$

Scelgo però:

una posizione
in cui $V_{0,1} = V_{0,2} = V_0$
ovvero $V = y(0) = 0$
vale V_0 stesso volume

$$V_1 = V_0 + A y$$

$$V_2 = V_0 - A y$$



1) Sommo membro a membro le due equazioni e le sottraggo

$$1) V_1 + V_2 = 2V_0$$

$$2) V_1 - V_2 = 2A y$$

Ricorro V_2 nella $\rightarrow V_2 = 2V_0 - V_1$

prima e lo sostituisco nella 2) $\rightarrow V_1 + V_1 - 2V_0 = 2A y$

$$V_1 = V_0 + A y$$

Quindi V_2 sostituendo V_1 nella prima

$$V_0 + A y + V_2 = 2V_0$$

$$V_2 = V_0 - A y$$

Sostituisco nelle equazioni per ① e ②:

$$\textcircled{1} \quad Q_1 - C_{ip} (P_1 - P_2) - C_{ep} P_1 = \frac{V_0 + A y}{\beta} \frac{dP_1}{dt} + A \ddot{y}$$

$$\textcircled{2} \quad -Q_2 - C_{ip} (P_2 - P_1) - C_{ep} P_2 = \frac{V_0 - A y}{\beta} \frac{dP_2}{dt} - A \ddot{y}$$

Trascuriamo il prodotto tre variabili di stato: $A y \approx 0$

$$\textcircled{1} \quad = \frac{V_0}{\beta} \frac{dP_1}{dt} + A \ddot{y} \quad \textcircled{2} \quad = \frac{V_0}{\beta} \frac{dP_2}{dt} - A \ddot{y}$$

Introduciamo il termine PORTATA MEDIA Q_L :

$$Q_L = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad \text{e chiamiamo } P_1 - P_2 = \Delta P \quad (\text{quindi } P_2 - P_1 = -\Delta P)$$

E sottraiamo la ② alla ①:

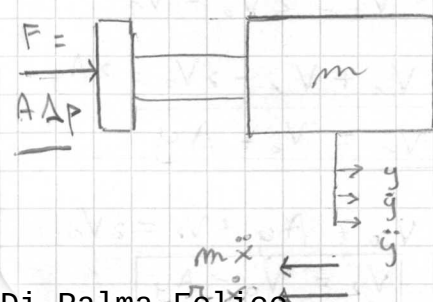
$$2 Q_L - 2 C_{ip} \Delta P - C_{ep} \Delta P = \frac{V_0}{\beta} \Delta \dot{P} + 2 A \ddot{y}$$

Dividendo tutto per 2:

$$\left[Q_L - C_{ip} \Delta P - \frac{C_{ep}}{2} \Delta P = \frac{V_0}{2\beta} \Delta \dot{P} + A \ddot{y} \right]$$

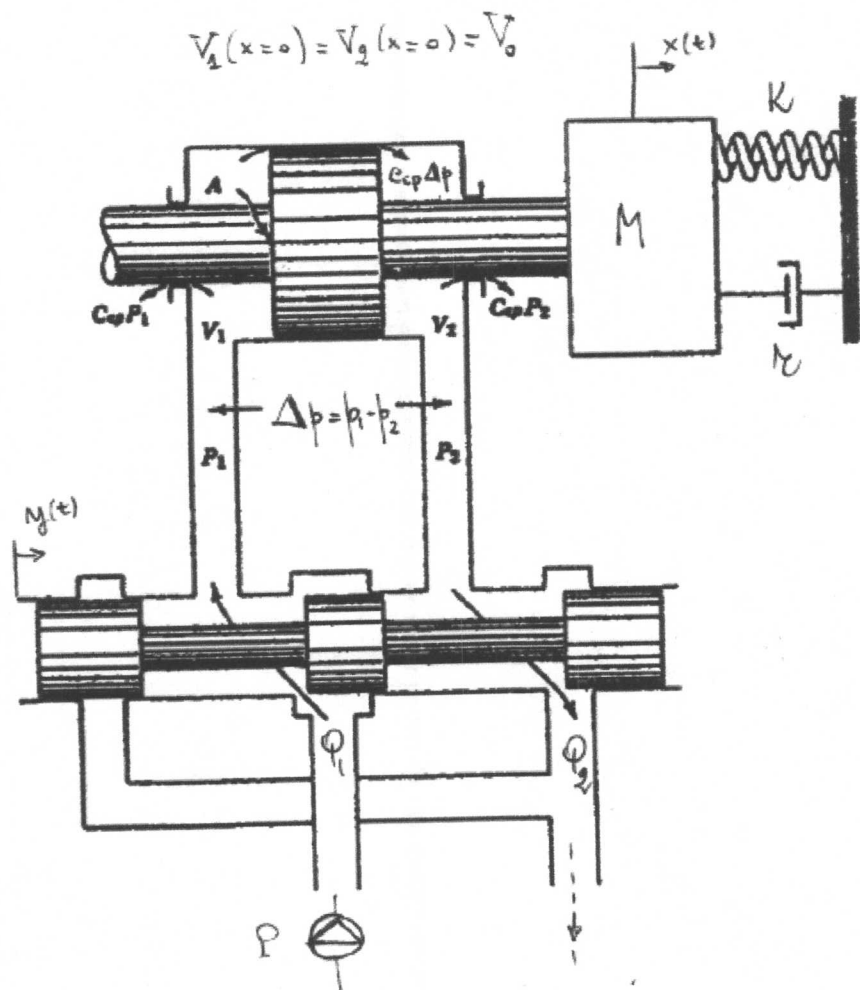
Scriviamo l'equazione della massa m : essa è soggetta a una forza $F = A \Delta P$ (è spinta dal pistone mosso della ΔP).

Inoltre è soggetta ad attrito viscoso (il cilindro scorre nel fluido, quindi (inoltre dipende dalla quantità $-y(t)$):



$$\left[m \ddot{y} + r \dot{y} = A \Delta P \right]$$

Mettendolo a sistema con quelle di prima:



SERBATOIO



$$\begin{cases} Q_L - (C_{ip} + C_p) \Delta p = \frac{V_0}{2\beta} \Delta \dot{p} + A \dot{y} \\ m \ddot{y} + 2 \dot{y} = A \Delta p \end{cases}$$

Il fatto che sia uscita un sistema (y contenuto in entrambe le equazioni) fa capire che per gli attuatori idrodinamici non posso mai studiare l'attuatore indipendentemente al sistema dove andrà collegato (si usa sempre closed loop).

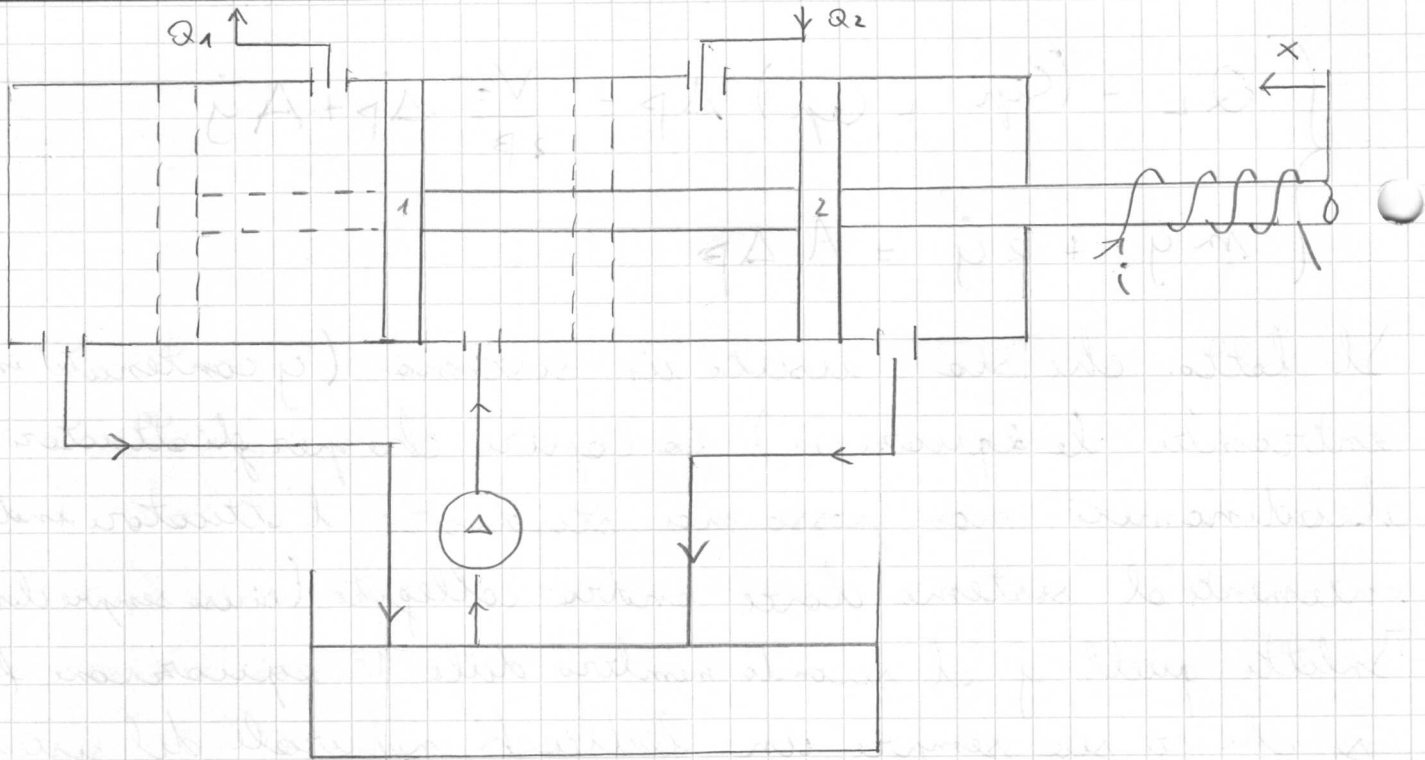
Infatti quell' $\dot{y}$ al secondo membro della 1ª equazione fa sì che vi sia sempre un feedback naturale del sistema controllato. Per capire come si sposterà il gestore devo collegarlo al sistema dinamico controllato.

Il controllo avviene essenzialmente tramite il controllo delle:

SERVOVALVOLA (o Valvola a comando)

Eccelliamo sull'elemento G del primo disegno. Esso ha due condotti verso l'attuatore e 3 verso le pompe e il serbatoio (in quel disegno ne ho 1 verso il serbatoio ma sono 2). Vedere disegno pag. successiva.

Le servovalvole sono costituite da una valvola principale (quella di mezzo) ed attuazione pneumatica o idrodinamica e da una valvola pilota (quella più a destra) ed azionamento elettrico e da un'astina che collega gli organi molli delle due valvole (servo a controreazione meccanica).



Se faccio scorrere una corrente i posso muovere tutto il blocco dei due pistoni (spolette) lungo x .

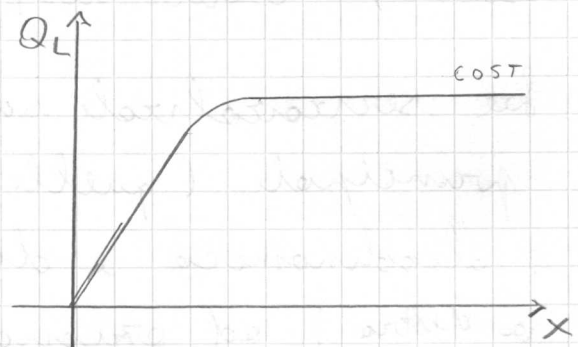
Vogliamo capire quanto vale Q_L in funzione del $\frac{d}{dx}$ gradiente di pressione Δp e della posizione x della serba valvola.

1) Se spostiamo il cilindro (si muove nel verso della posizione tratteggiata) ci possiamo mettere in posizione tale da ostruire il primo orifizio (da cui esce Q_1) con la spolette 1.

Quella è una posizione stabile $Q_1 = 0 \rightarrow Q_2 = 0$ ossia se niente entra niente esce (Q_2) $\rightarrow Q_L = 0$.

Se ci spostiamo ancora liberiamo il passaggio, la portata aumenta man mano che si scopre l'orifizio (lasciando libertà alla pompa di spingere).

Quando l'orifizio sarà completamente (posizione tratteggiata) scoperto la portata resta costante. Se a $x=0$ la spolette ostruisce l'orifizio, il grafico ottenuto è quello a destra.



2) Siamo nella porzione tratteggiata. Se Δp aumenta la portata media diminuisce perché p_1 sta aumentando ma p_2 sta diminuendo (pressioni delle due camere dell'attuatore). Quindi a un certo punto p_1 sarà quasi quanto la pressione della pompa p_r (camera centrale servovalvola) e p_2 sarà quasi quanto la pressione del servototale (camera destra servovalvola), quindi tenderanno ad annullarsi i gradienti tra dove entra Q_1 e dove esce Q_2 (le uguali per Q_2) facendo tendere a 0 Q_L e Q_2 quindi Q_L . Il grafico è quello a destra.



In definitiva:

$$Q_L = K_x \cdot x - K_p \Delta p$$

$$K_x > 0$$

$$K_p > 0$$

Sono una sorta di controlli, aumentando K_x o K_p otteniamo gli effetti suddetti.

$$\begin{cases} Q_L - \left(C_{pr} + \frac{C_{pr}}{2} \right) \Delta p = \frac{V_o}{2\beta} \Delta \dot{p} + A g \\ Q_L = K_x \cdot x - K_p \Delta p \end{cases}$$

Riscriviamo in funzione di Δp

$$\begin{cases} \frac{V_o}{2\beta} \Delta \dot{p} + \left(C_{pr} + \frac{C_{pr}}{2} \right) \Delta p = Q_L - A g \\ Q_L = K_x \cdot \underbrace{K_i \cdot i}_{x} - K_p \Delta p \end{cases}$$

Per una dinamica veloce $x = K_i \cdot i$ ossia è proporzionale / proporzionale a i per una costante K_i

Sostituiamo Q_L sopra:

$$\frac{V_0}{2\beta} \Delta \dot{p} + \left(C_{ip} + \frac{C_{ep}}{2} \right) \Delta p = K_x K_i i - K_p \Delta p - A \dot{y}$$

Raccogliamo i termini in Δp

$$\frac{V_0}{2\beta} \Delta \dot{p} + \left(C_{ip} + \frac{C_{ep}}{2} + K_p \right) \Delta p = K_x K_i i - A \dot{y}$$

Trasformiamo nel dominio di Laplace

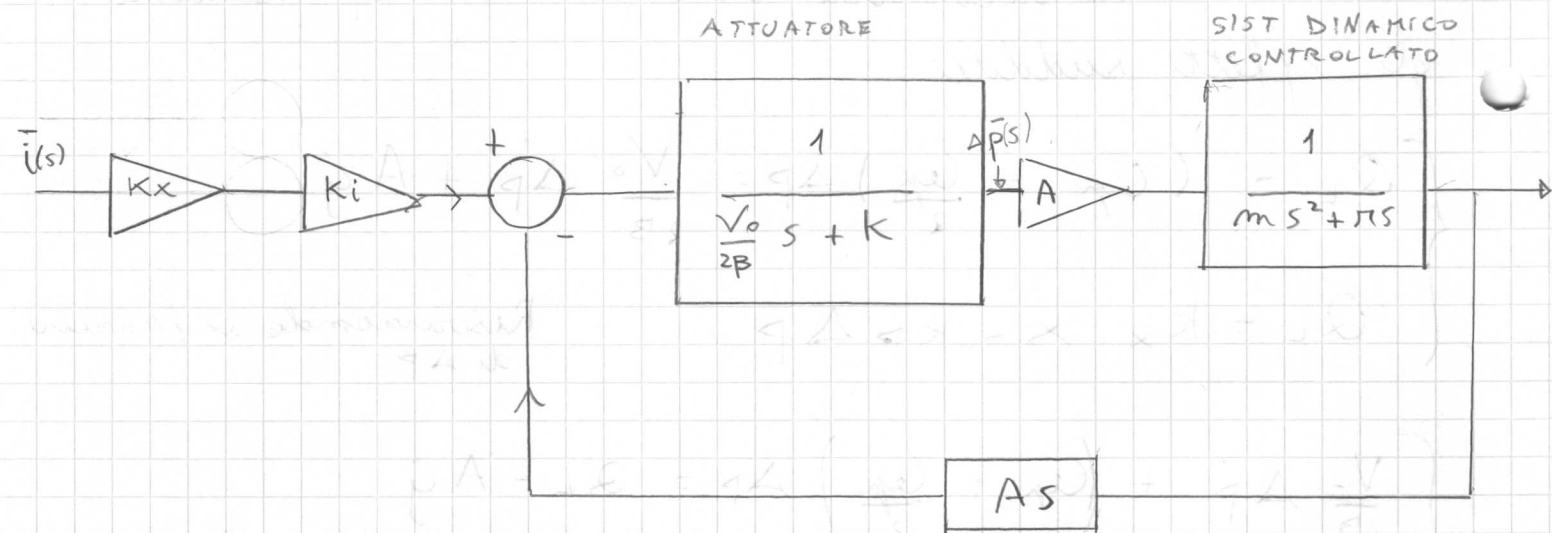
$$(1) \left[\frac{V_0}{2\beta} s + \underbrace{\left(C_{ip} + \frac{C_{ep}}{2} \right) + K_p}_K \right] \Delta \bar{p}(s) = K_x K_i \bar{i}(s) - A s \bar{y}(s)$$

Trasformo l'eq. del moto della massa ($m \ddot{y} + r \dot{y} = A \Delta p$):

$$(2) (m s^2 + r s) \bar{y}(s) = A \Delta \bar{p}(s)$$

Posso sostituirlo nella (1) e ottenere una equazione per ingresso $\bar{i}(s)$ e uscita $\Delta \bar{p}$

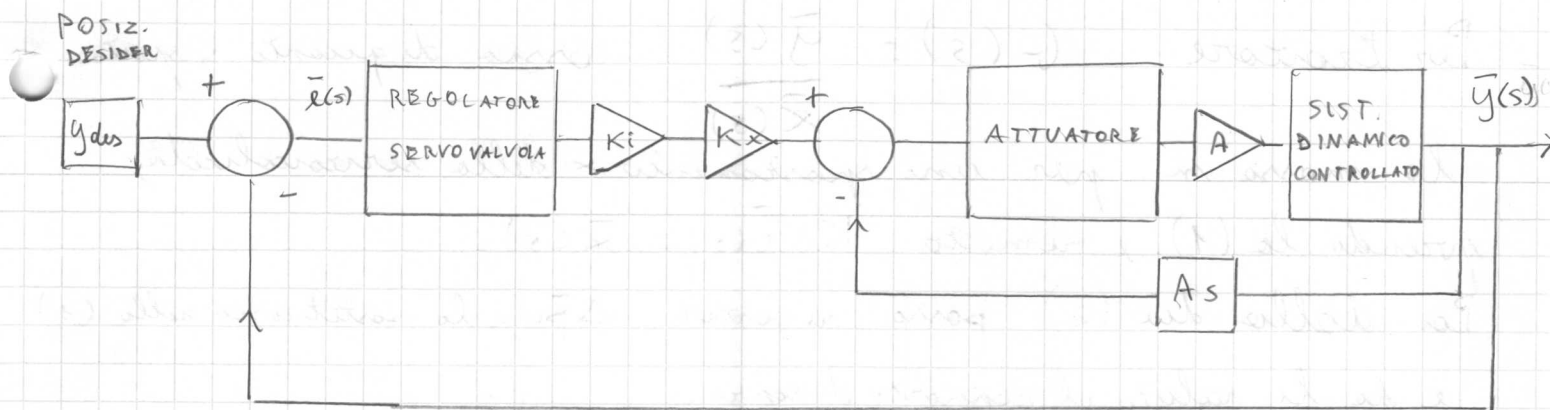
• Lo schema a blocchi (della 1)



Nel + e nel - entrano i secondi termini della (1)

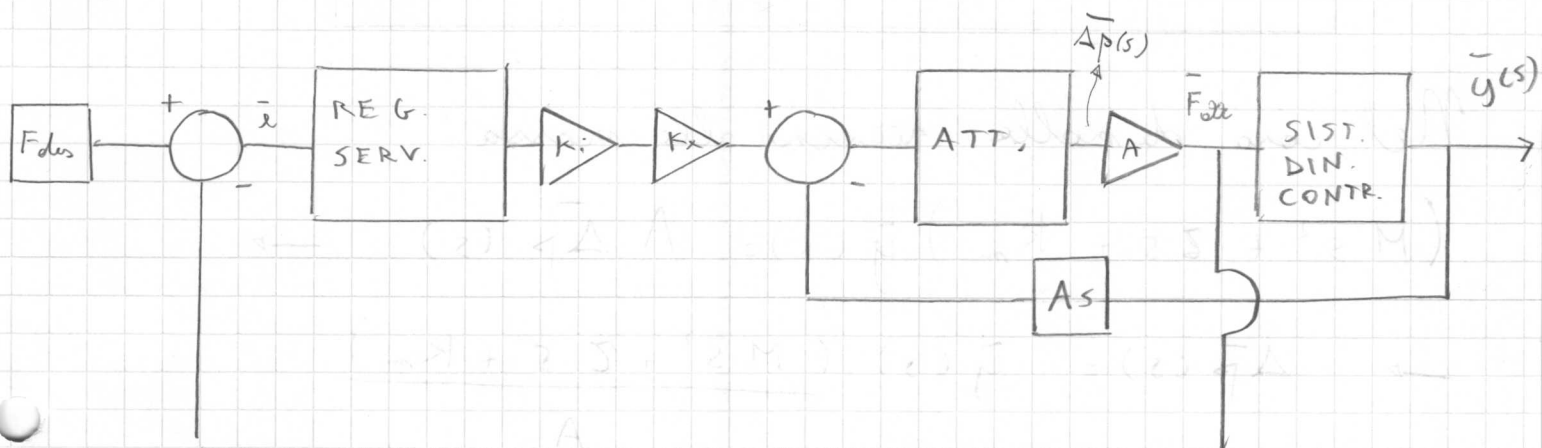
Ricordiamo che $K = C_{ip} + \frac{C_{ep}}{2} + K_p$.

• CONTROLLO DI POSIZIONE



Il regolatore della servovalvola deve adeguare la corrente all'errore (se l'errore è 0 adeguo la corrente per l'errore nullo, non è detto che $i = 0$)

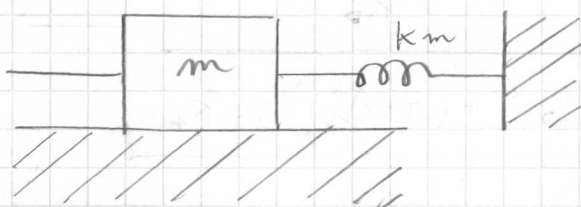
• CONTROLLO IN FORZA



Qui dobbiamo prelevare la forza $\bar{F}(s)$ in quanto:

$$e(t) = F_{des} - A \Delta p$$

Se il sistema dinamico ha una k elastica (chiamandola k_m) possiamo appiungerle tranquillamente.



FUNZIONE DI TRASFERIMENTO SERVOVALVOLA

Per trovare $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{x}(s)}$ ossia di quanto si sposta

la massa m per uno spostamento x della servovalvola, prendo la (1) e rimetto $K_i \bar{i}(s) = \bar{x}(s)$.

Poi dalla (2) posso ricavare $\Delta \bar{p}(s)$ e lo sostituisco nella (1) e da lì scalo il rapporto di sopra.

Per evitare calcoli lunghi scriviamo ⁽¹⁾ nel caso di

• FLUSSO INCOMPRESSIBILE: $\frac{1}{B} = 0 \rightarrow \frac{V_0}{2B} s = 0$

• PERDITE PER TRAFILAMENTO NULLE: $\cancel{C_{ip}} + \frac{\cancel{C_{ep}}}{2} + K_p = K_p$

$$(1)^* \quad K_p \Delta \bar{p}(s) = K_x \underbrace{K_i \bar{i}(s)}_{\bar{x}(s)} - A s \bar{y}(s)$$

CASO INCOMPRESSIBILE
SENZA PERDITE

Nel caso di molla ricorro alla massa:

$$(M s^2 + \pi s + k_m) \bar{y}(s) = A \Delta \bar{p}(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta \bar{p}(s) = \bar{y}(s) \frac{(M s^2 + \pi s + k_m)}{A}$$

Sostituisco nella (1*): (e divido tutto per K_p , e moltiplico tutto per A mmi)

$$\frac{K_p}{A} (M s^2 + \pi s + k_m) \bar{y}(s) = \underbrace{A K_x \bar{x}(s)}_{K_p} - A s \bar{y}(s)$$

$$\left[M s^2 + \left(\pi + \frac{A^2}{K_p} \right) s + k_m \right] \bar{y}(s) = \left(\frac{A}{K_p} K_x \right) \bar{x}(s)$$

Ecco trovata $G(s)$

$$\bar{x}(s) \rightarrow G(s) = \frac{\frac{A K_x}{K_p}}{M s^2 + \left(\pi + \frac{A^2}{K_p} \right) s + k_m} \rightarrow \bar{y}(s)$$

18) ACCOPIAMENTO MOTORE-CARICO

- CARATTERISTICHE MECCANICHE TIPO

Si intende $M = M(\omega)$ coppia in funzione di ω

- RAPPORTO DI TRASMISSIONE ϵ

Sia per quanto riguarda ϵ a regime che la sua influenza nel transitorio

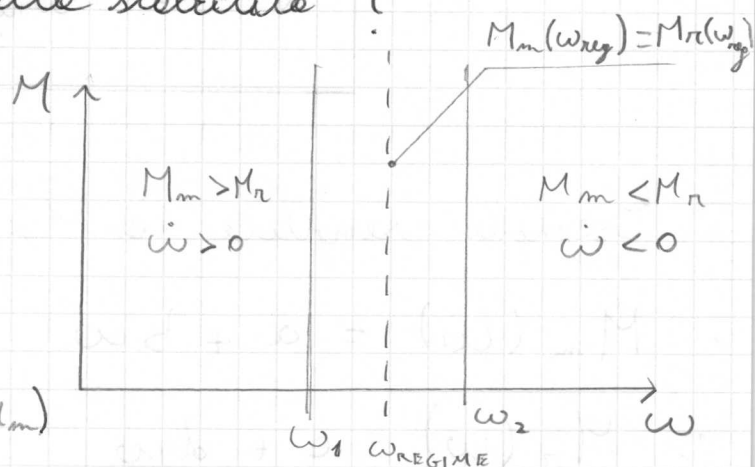
- STABILITA' DEL GRUPPO

Perché nasce il problema della stabilità?

A regime (ω_{REG}) le due coppie, resistente e motrice si eguagliano: il gruppo non accelera né decelera.

Allora capisco che nella regione

a sinistra al MOMENTO MOTORE (M_m)



sia maggiore del MOMENTO RESISTENTE (M_r)

allora il gruppo accelera, viceversa nella zona a destra così da riportarmi sempre al valore di ω (ω_{REGIME}) desiderato.

Per capirci:

$$1) M_m(\omega_1) > M_r(\omega_1)$$

$$2) M_m(\omega_2) < M_r(\omega_2)$$

Cambiato segno alle 1):

$$-M_m(\omega_1) < -M_r(\omega_1) \rightarrow M_r(\omega_1) - M_m(\omega_1) < 0$$

$$\text{Dalle 2)} \rightarrow M_m(\omega_2) - M_r(\omega_2) > 0$$

Quindi:

$$M_r(\omega_1) - M_m(\omega_1) < 0 < M_r(\omega_2) - M_m(\omega_2)$$

Dividendo entrambi per $(\omega_2 - \omega_1)$ e isolando M_m da M_r :

$$\frac{M_m(\omega_2) - M_m(\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} < \frac{M_r(\omega_2) - M_r(\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1}$$

Sono dei rapporti incrementali allora faccio il limite per $\omega_1 \rightarrow \omega_{reg}$; $\omega_2 \rightarrow \omega_{reg}$:

$$\left(\frac{\partial M_m}{\partial \omega} \right)_{\omega_{reg}} < \left(\frac{\partial M_r}{\partial \omega} \right)_{\omega_{reg}}$$

• Esempio semplice con $M_m(\omega)$ e $M_r(\omega)$ lineari (rette):

• $M_m(\omega) = a + b\omega$

• $M_r(\omega) = c + d\omega$

Sfrutto l'equazione:

$$M_m - M_r = \mathcal{I} \dot{\omega}$$

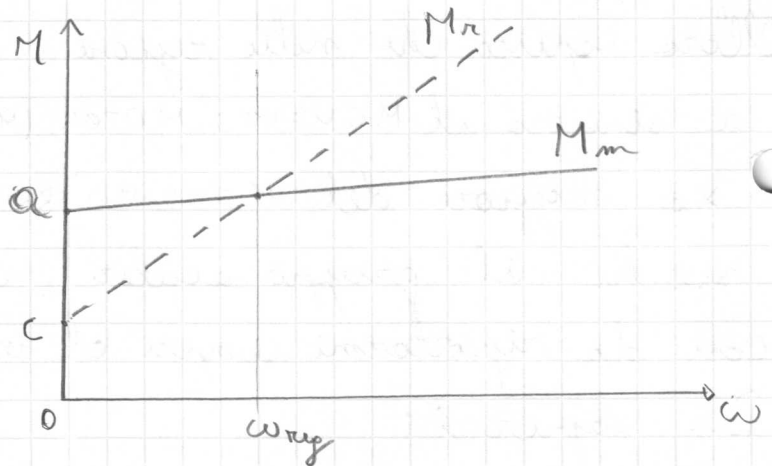
$$a + b\omega - c - d\omega = \mathcal{I} \dot{\omega}$$

$$(a - c) + (b - d)\omega = \mathcal{I} \dot{\omega}$$

$$\mathcal{I} \dot{\omega} + (d - b)\omega = a - c$$

Ecco l'equazione del transitorio (del primo ordine)

Il gruppo è stabile se $d > b$ (in ω_{reg})



Ma dividiamo tutto per $d-b$ (consi del fatto che per la stabilità $d-b > 0$; $a-c > 0$ per salita; $J\dot{\omega} > 0$)

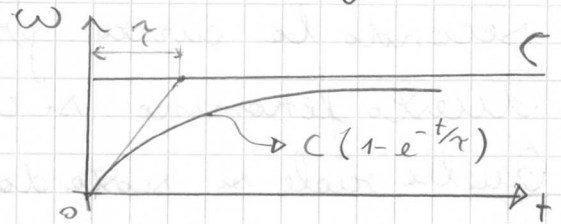
$$\frac{J\dot{\omega}}{d-b} + \omega = \frac{a-c}{d-b} = C > 0$$

COSTANTE

$\tau \dot{\omega} + \omega = C$ è una dinamica del primo ordine e τ si comporta come ci aspettiamo:

Ossia il transitorio è tanto più lento quanto più J è grande (grande inerzia grandelentezza). Se $d-b$ si somigliano cresce τ fino a quando (se $d=b$) non si estinguerà mai il transitorio.

C lo possiamo vedere come un gradino imposto al tempo 0: $C \cdot 1(t)$



Quel C infatti è un valore particolare

Se vogliamo trovare analiticamente ω_{reg} , infatti, dobbiamo imporre che le rette si intersecano in un punto:

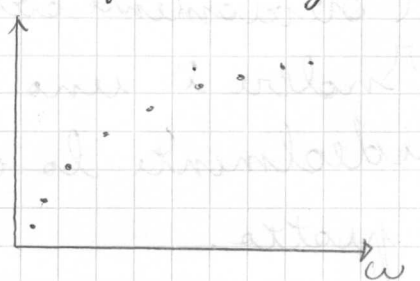
$$a + b \omega_{reg} = c + d \omega_{reg} \longrightarrow \boxed{\omega_{reg} = \frac{a-c}{d-b} = C}$$

Se C coincide con la $\omega_{reg} \rightarrow$ a transitorio estinto $\omega = \omega_{reg}$. Ma è proprio così? Così ci arriveremo in tempi infiniti alla ω_{reg} ? O sono limiti del modello?

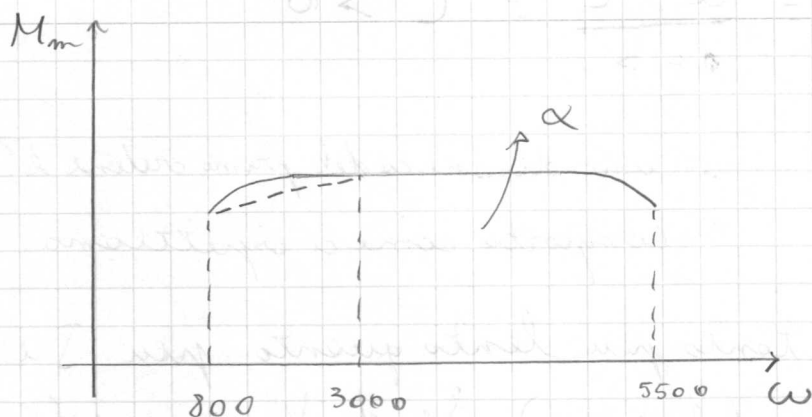
È dovuto al fatto che la curva caratteristica meccanica $M_m(\omega)$ è ricercata punto punto, regolando un freno sul banco di prova e attraversando diverse fasi di regime (andamento quasi statico), verso ω_{reg} .

Come nelle figure a destra.

Oltre al freno controllo anche l'ascensore.



Queste curve sono comode ma si prestano male alla descrizione dei transistori (soprattutto quelli veloci).
 Ed esempio per un motore a combustione:



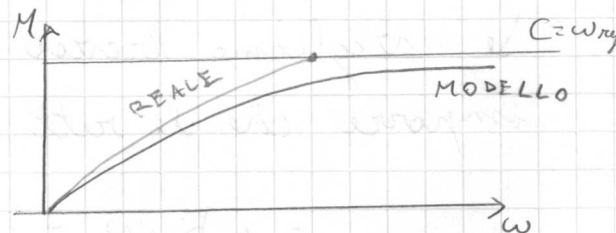
α è la posizione dell'acceleratore (si tende ad avere una bella zona a coppia costante, nei motori moderni) Abbiamo messo dei valori d'esempio.

Se si vuole arrivare a 3000 giri da 800 non ci vorranno secondo la curva grigia ma secondo la tratteggiata.

Questo fenomeno si chiama TORQUE BACKUP?

Quella reale si scosta da quella ideale (c'è ritardo nel raggiungere la condizione di regime rispetto a quello calcolato).

Invece il modello ci dice che a regime ω_{reg} si raggiunge per tempi infiniti (e non possiamo dargli troppo torto)



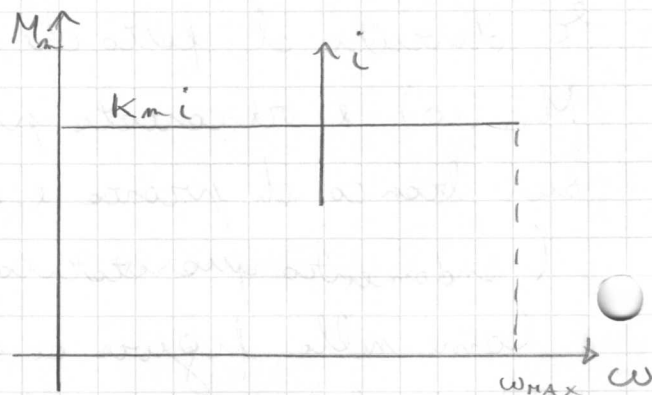
● CARATTERISTICHE MECCANICHE TIPO

• CARATTERISTICA MECCANICA A COPPIA COSTANTE

Uno di questi è il DC-BRUSHLESS

Ha una coppia costante per una determinata corrente (ovviamente zero al limite ω_{max})

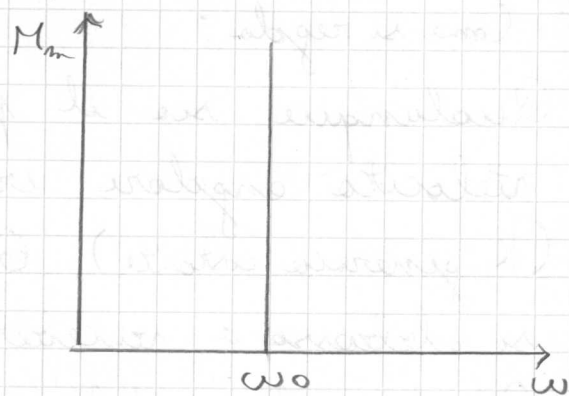
Inoltre è una approssimazione: idealmente la caratteristica è



Il punto analogo è la caratteristica a velocità costante (motore DC-BRUSHLESS

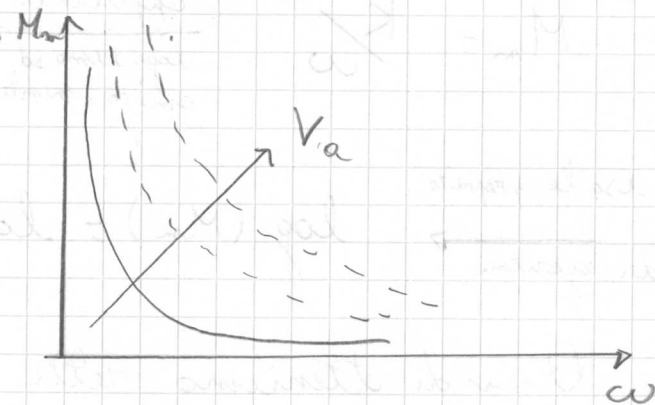
controllato in velocità). Precede Momento=0 a una ω fissa (ω_0) che è uguale al momento max: Inseguo lo ω_0

indipendentemente dal carico applicato (ho bisogno di un controllo in retroazione). Viene pilotato in tensione, inseguendo lo ω_0 .



CURVA CARATTERISTICA A POTENZA COSTANTE:

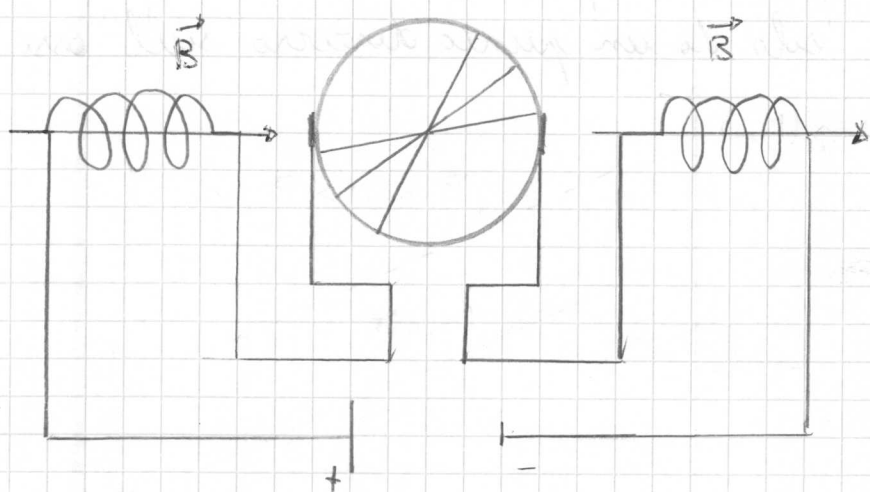
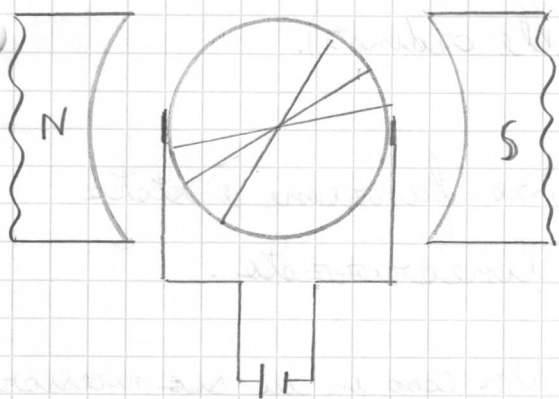
$$P = M_m \omega = \text{cost} \rightarrow \text{un'iperbole!}$$



Descrive bene il motore a corrente continua con eccitazione in serie:

Significa che il campo magnetico è generato non da magneti permanenti ma da avvolgimenti:

SERIE



Gli avvolgimenti rotorici e statorici sono in serie tra

loro: i fili che portano la differenza di potenziale alle spazzole sono gli stessi che generano il campo magnetico.

Come si regola:

Qualunque sia il punto di funzionamento in termini di velocità angolare eroga una coppia $M_m = \frac{cost}{\omega} = \frac{K}{\omega}$ (K generica costante). Quindi per velocità crescente la coppia si elabora e viceversa.

Quel grafico dell'iperbole non ci piace! È curvo ed è scomodo nella discussione della stabilità, preferiamo rette. (Inteso nella rappresentazione). Quindi si rappresenta su un grafico in scala logaritmica:

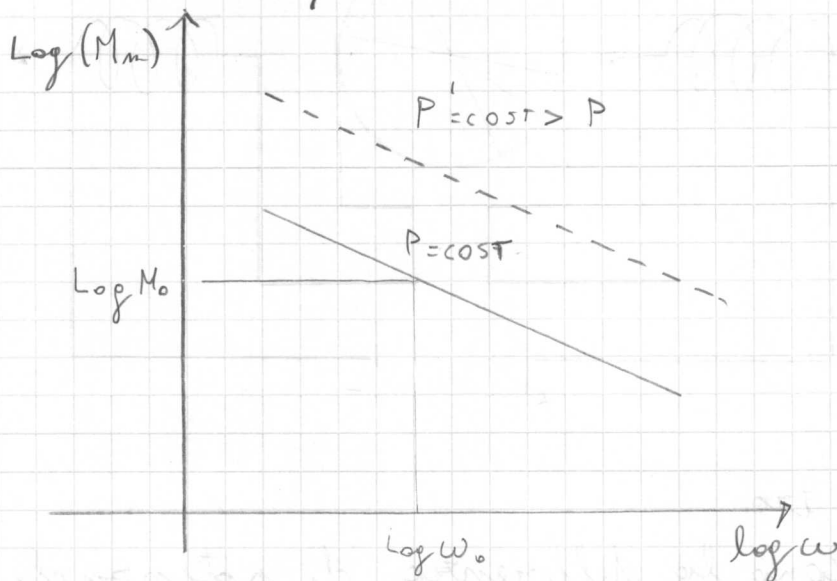
$$M_m = \frac{K=P}{\omega} \xrightarrow{\text{applico il logaritmo ad ambo i membri}} \log(M_m) = \log(K/\omega)$$

uso la proprietà
dei logaritmi

$$\log(M_m) = \log(K) - \log(\omega) \stackrel{\text{è ancora una costante}}{=} K' - \log(\omega)$$

Quindi otteniamo rette $\log(M_m) = K' - \log(\omega)$

Ma K era la potenza, quindi le curve a K' costante sono quelle a potenza costante (sono tutte rette parallele che portano solo da un punto diverso sull'asse delle ordinate):



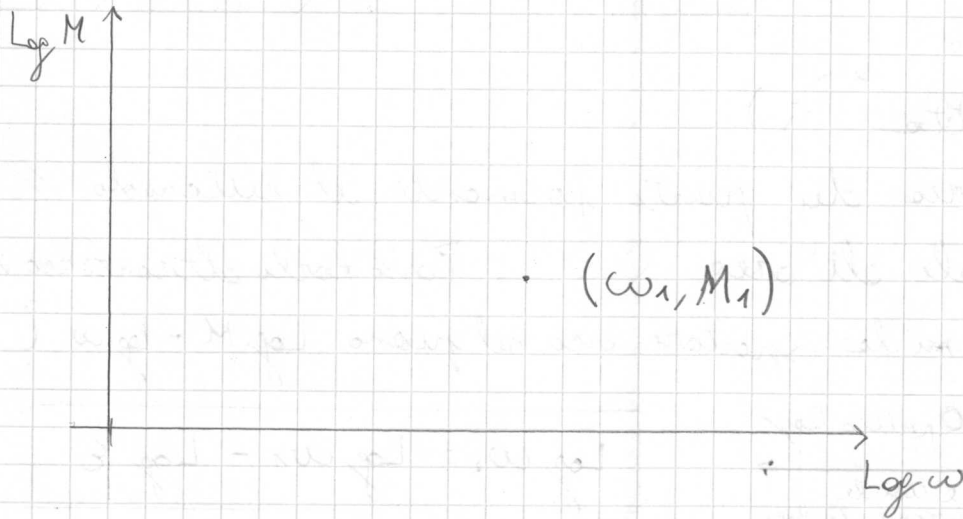
La funzione è stata linearizzata.

Un caso in cui sia necessaria potenza costante è quello, ad esempio, del tornio parallelo ove la forza per strappare il truciolo è costante ma

anche la velocità del mandrino regglio sia costante. Però il diametro del pezzo si riduce e so regglio che durante queste fasi la $P = M\omega$ rimane costante.

INFLUENZA DEL RAPPORTO DI TRASMISSIONE SULLE CARATTERISTICHE VISTE:

Per risolverlo partiamo da un punto di interesse e ordinato pari a (ω_1, M_1) sempre valori logaritmici.



Uglio trasporta solo quel punto sul piano per effetto del rapporto di trasmissione.

Il rapporto di trasmissione è $\boxed{\varepsilon = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{IN}{OUT}}$

Quindi la nuova ω (verso la quale mi sto spostando) ossia ω_2 :

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\varepsilon} \xrightarrow[\text{meccanico } \eta=1]{\text{Per rendimento}} M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2 \xrightarrow[M_2 \text{ e } \varepsilon]{\text{quindi l'uscita}}$$

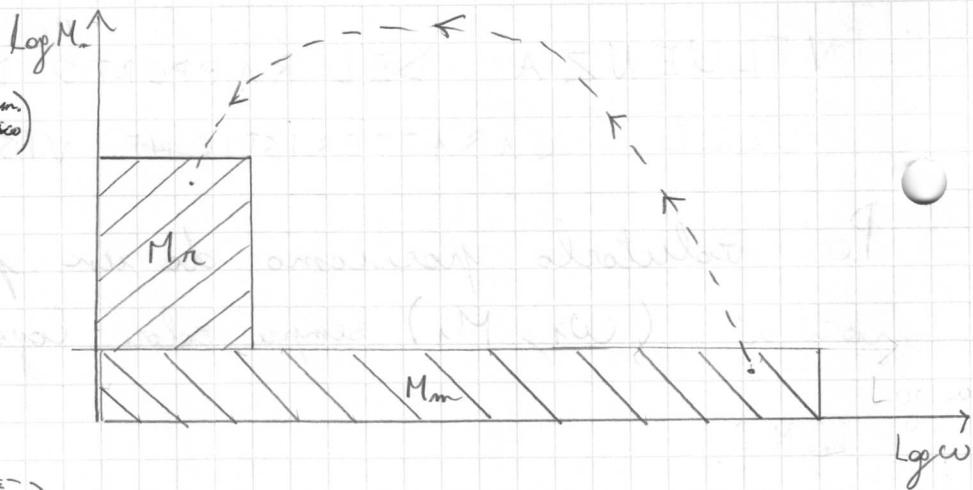
$$M_2 = M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = M_1 \varepsilon \longrightarrow \text{posso risolvere il nuovo punto } (\omega_2, M_2)$$

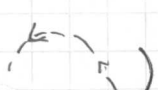
Nel 99% dei casi è un riduttore $\longrightarrow |\varepsilon| > 1$

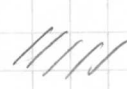
In questo caso ho la certezza che $\omega_2 < \omega_1$

Ma perché in genere è un riduttore? perché il motore opera spesso per range alti di velocità (anche molto alte) e basse coppie. Mentre il carico spesso necessita di coppie elevate a basse velocità.

 LUOGO DEI CARICHI
 (insieme delle condizioni di funzionamento
 a regime in cui è previsto il carico
 possa trovarsi)
 LUOGO DEL MOTORE



In qualche modo devo
 portare i punti dell'
 area M_m a entrare
 nell'area M_n (Percorso )

Certo è che l'area dei punti formanti il rettangolo 
 deve essere uguale all'area . Posso farlo attraversando un
 riduttore. Come mi fa spostare esso nel piano $\text{Log } M - \text{Log } w$?

$$w_2 = w_1 / \epsilon$$

Applico Log
 e uso le
 propr. dei Log

$$\text{Log } w_2 = \text{Log } w_1 - \text{Log } \epsilon$$

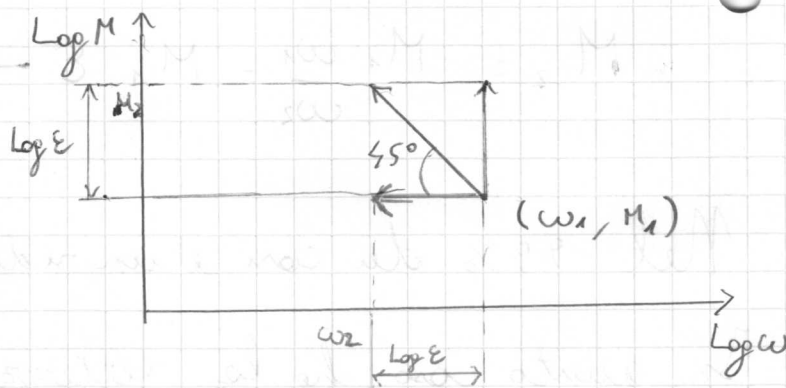
$$M_2 = M_1 \epsilon$$



$$\text{Log } M_2 = \text{Log } M_1 + \text{Log } \epsilon$$

$\text{Log } w_2$ si ottiene spostandosi a sinistra di $\text{Log } \epsilon$ (diminuendo
 la w a partire da w_1). Viceversa per M_2 ! Allora continuo
 il grafico di pag precedente:

Mi sono spostato della stessa
 quantità quindi l'angolo dello
 spostamento risultante è 45° . Ed
 è proprio quello che succede nel
 caso di potenza costante.



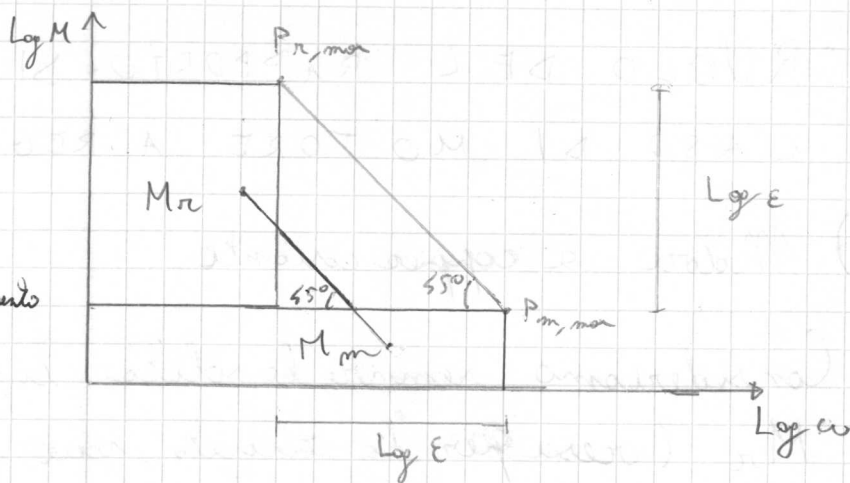
Questo significa anche che il disegno in cima alla
 pagina è sbagliato per il nostro caso di potenza costante.



N.B. Sia per motore che utilizzatore quel vertice
 è P_{max} o il prodotto $M \cdot w$ è max.

Questa è il disegno è corretto:

Infatti posso spostarmi tra le due ore solo con linee a 45° perché lo spostamento sui due assi è uguale in modulo e pari a $|\log \epsilon|$.



Se come punto di partenza particolare scelgo proprio $P_{m, max}$ ottengo l'effetto di portare il rettangolo M_m a sovrapporsi a M_n . In verde invece è per un punto generico.

E se il rendimento non è unitario?

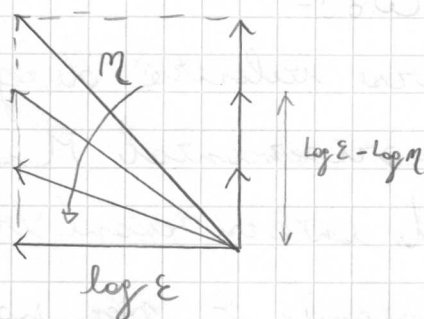
Esistenziale il contatto tra i denti deve essere rispettato

quindi: $\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| = \frac{z_2}{z_1}$ per forza! $|\omega_2| = |\omega_1| z_1/z_2$

Quindi la nuova velocità è vincolata da un aspetto geometrico imprescindibile. Ciò che cambia è il momento perché la potenza in uscita è minore di quella in ingresso (non più costante):

$$\eta = \frac{P_u}{P_i} = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1} \rightarrow \left[M_2 = \eta \frac{M_1 \omega_1}{\omega_2} = \eta M_1 \epsilon \right]$$

Si perde il discorso dei 45° (l'ideale). In particolare se a ridursi l'ordinata, il momento ottenibile (mentre l'ascissa è costante).



Tale effetto si vede a sinistra dove lo spostamento a ω_2 è sempre dato da $-\log \epsilon$ mentre: $\log \eta < 0$ perché $\eta < 1$

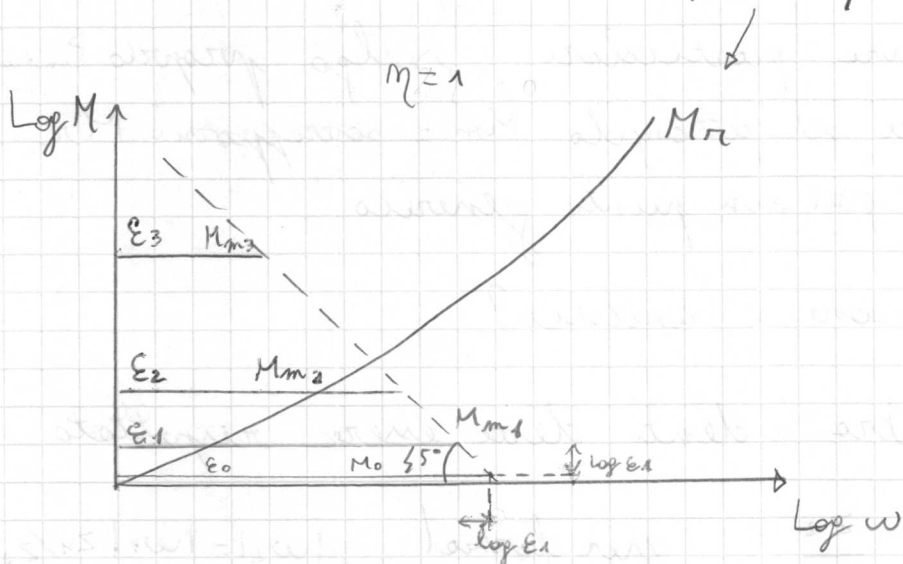
$$\log M_2 = \log \eta + \log M_1 + \log \epsilon$$

quindi $\log M_2$ è $>$ di $\log M_1$ ma di meno di $\log \epsilon$

• RUOLO DEL RAPPORTO DI TRASMISSIONE NEL CASO DI MOTORE A REGIME:

1) Motore a coppia costante

Consideriamo sempre la solita tipologia di momento resistente M_r (cresce con la velocità, riuo per altri oltre)



Se mi metto nel caso di $\eta = 1$ e sono nella situazione (M_m orizzontale) a coppia costante, se ad esempio ho un motore che eroga una coppia M_0 (per $\varepsilon_0 = 1$) ovvero bisogno di un riduttore

per vincere il momento resistente. Però essendo $\eta = 1$ mi posso muovere solo lungo la retta di 45° (---); quindi potrei passare usando un riduttore con ε_1 ed ottenere la coppia costante (orizzontale) M_{m1} spostandomi lungo l'asse x ordinate di $|\log \varepsilon_1|$. Se uso riduttori con ε ancora più spinti ($\varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$) ottengo le curve (in realtà rette) M_2, M_3 e così via.

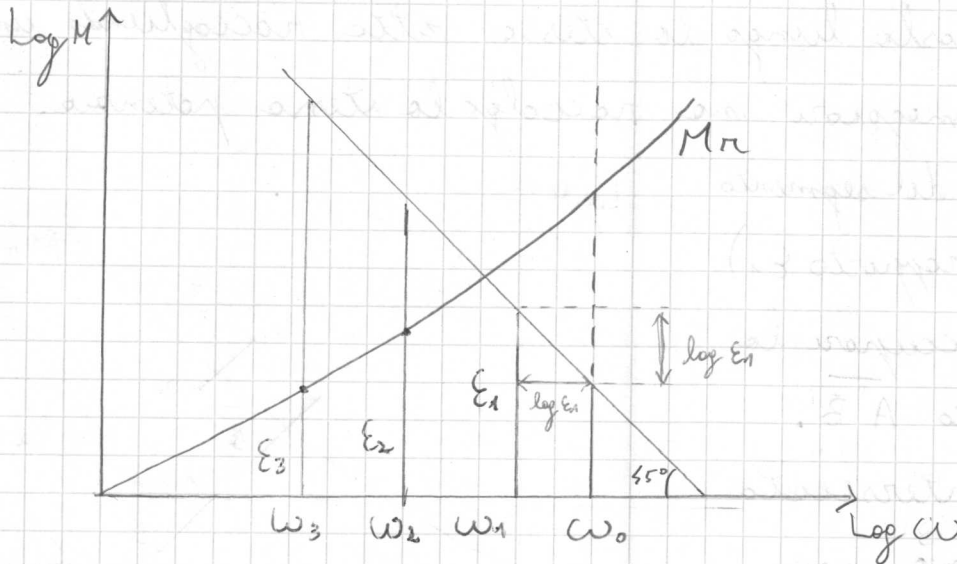
N.B. la prima curva (grasse) M_0 è del motore in assenza di riduttore perciò $|\varepsilon_0| = 1 \rightarrow \omega_{IN} = \omega_{OUT}$.

Varcando ε posso lavorare a diverse velocità di regime trovate dall'intersezione tra le rette orizzontali M_m e la curva M_r . Tuttavia dal punto di intersezione tra M_r e la retta a 45° (X) anche aumentando ε non posso lavorare in una condizione di regime M_m e M_r non si potranno intersecare mai più.

È quello che succede con le marce dell'auto (infatti $M_m(\theta)$ ha un tratto costante o si cerca di tenerlo): se aumenti il carico (una salita) scegli di tenere un ϵ di riduzione elevato: (I marcia ha $\epsilon >$ II marcia) questo comporta che il gruppo accelera.

2) Motore a velocità costante:

M_r è una curva uguale a prima, mentre ω_0 è quella del motore senza riduttore: ($\eta = 1$)

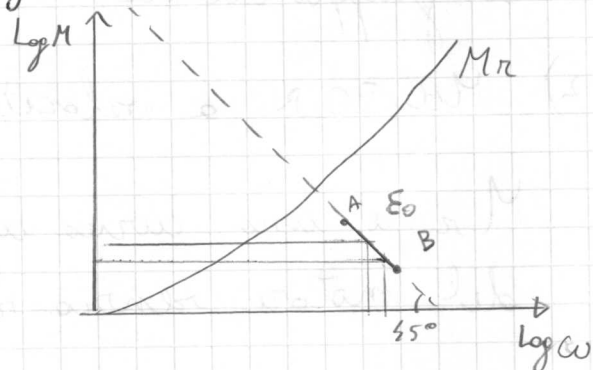


Si nota che da ω_0 mi serve un riduttore per sovrapporre le due caratteristiche meccaniche.

Vale sempre $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$. Qui succede però l'opposto di prima, ossia, per lo stesso M_r , all'aumentare di ϵ la velocità del gruppo diminuisce: se da "colturi" progettisti ignoriamo le curve caratteristiche, pensiamo che aumentando la velocità del gruppo aumentando il rapporto di riduzione e invece otteniamo l'effetto opposto.

3) Motore a potenza costante ($\eta = 1$ sempre)

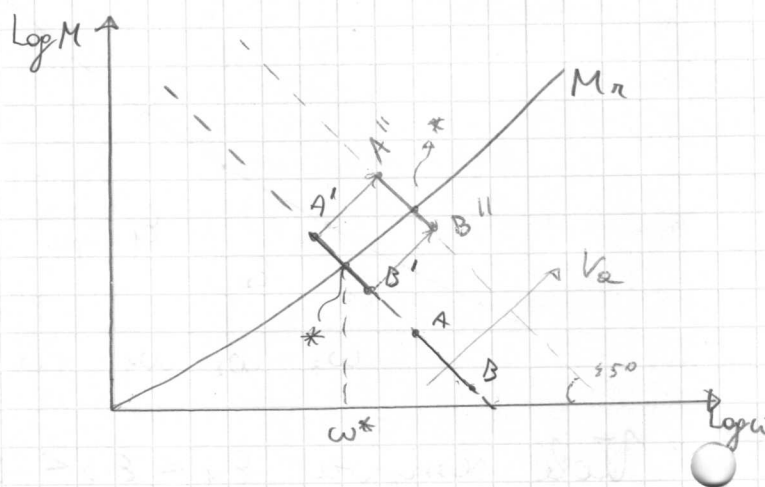
Se la potenza è costante non ho né una retta verticale né orizzontale ma deliquesce a 45° . Tuttavia quella retta non la copro per tutta la sua lunghezza ma per un tratto AB o per ogni punto di tale segmento il prodotto $M \cdot \omega$ è costante (tanti rettangoli con un vertice in $\overline{AB}$ in verde)



E se metto un riduttore?

Il segmento lo trovo lungo la stessa retta raccogliendo una trazione di coppie maggiori ma raccolgo la stessa potenza.

Ogni singolo punto del segmento $\overline{AB}$ lo trovo (se uso rapporto E_1) di $\log E_1$ fino a occupare la posizione del segmento $\overline{A'B'}$.



Ho decisamente intersecato la curva $M_r(\omega)$ ma non mi è servito a niente perché

se M_r aumenta non lo raggiungo più: non cambio il punto di funzionamento a regime! è sempre il punto *.

È il caso dei TRAM o il motore è DC con eccitazione serie, e non hanno il combacchio! Non servirebbe variare E .

Il punto di regime si varia dal punto di vista delle correnti (parametri elettrici). C'è un rapporto di trasmissione (overdriving) che fa questo match tra segmento e $M_r(\omega)$ ma poi si aumenta la potenza aumentando la tensione di alimentazione V_a (linea rossa) spostando il segmento in $\overline{A''B''}$. Posso muovermi lungo linee a 45° così se aumento V_a e così se aumento E .
Overdriving si aumenta V_a $P = \text{cost}$ ma è > del caso precedente

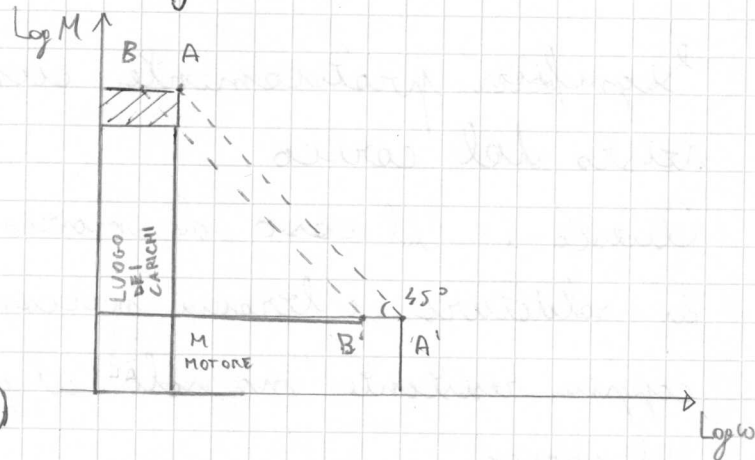
19) ACCOPIAMENTO MOTORE-CARICO

- EFFETTO DI ϵ SU TRANSITORIO

In genere $|\epsilon| > 1 \rightarrow$ RIDUTTORE

Ci occupiamo però e valutare il transitorio: il gruppo non sta sempre a regime, ha bisogno di accelerare e decelerare lungo le fasi transitorie. Significa che il momento motore deve vincere il momento resistente, a destra si vede il

Caso sempre per $\eta = 1$. Quindi applicando un riduttore minimo da A' ad A così come da B' a B



garantendo un MARGINE DI COPPIA (shaded area)

Se mi muovessi da punti più bassi di A' e B' probabilmente non garantirei tale margine. In termini di equazione

$$M_m - M_r^R = (I_m + I_u^R) \dot{\omega}_1$$

$$\text{se } M_m > M_r^R \\ \dot{\omega}_1 > 0$$

Dove $\begin{cases} M_r^R = \text{momento resistente ridotto (carico che si riduce grazie a } \epsilon) \\ I_u^R = \text{Masse e inerzie ridotte a un unico momento di inerzia. (tutto ridotto all'asse delle macchine motrici)} \end{cases}$

$$M_m - \frac{M_r}{\epsilon} = \left(I_m + \frac{I_u}{\epsilon^2} \right) \dot{\omega}$$

PARTIAMO DA QUESTA EQUAZIONE

Obtengo sostituendo l'espressione ridotta: più aumenta ϵ più M_r motore si riduce. A I_u c'è ϵ^2 perché dipende dalla uguaglianza dell'energia cinetica.

Distinguiamo due casi:

1) CARICO PREVALENTEMENTE INERZIALE ($M_r \approx 0$)

Praticamente con il momento motore devo solo accelerare delle masse!

Proveremo a ridurre (il momento motore e I_m) all'asse del carico che è l'opposto di prima:

$$M_m \varepsilon - M_r = (I_m \varepsilon^2 + I_u) \dot{\omega}_2$$

Significa praticamente aumentare il momento motore visto dal carico.

Questo è il caso di movimenti di precisione, quelli per le di saldatura e bracci meccanici, ora non devo vincere una coppia resistente ma solo il peso del braccio stesso ($I_{inerzia}$) e quello del carico.

Supponiamo ora di voler raggiungere una $\dot{\omega}_{2, max}$ ce lo imponiamo noi. L'equazione di sopra diventa:

$$M_m \varepsilon = (I_m \varepsilon^2 + I_u) \dot{\omega}_{2, max}$$

E ovviamente ε è tale da permettercelo e:

$$\varepsilon = \frac{\dot{\omega}_{1, max}}{\dot{\omega}_{2, max}} \longrightarrow \left[\dot{\omega}_{2, max} = \frac{\dot{\omega}_{1, max}}{\varepsilon} \right] \begin{array}{l} \text{Quindi accelero il} \\ \text{motore a } 300 \text{ rad/s}^2 \\ \text{il carico accelera a} \\ \frac{300}{\varepsilon} \text{ rad/s}^2 \end{array}$$

Quindi $\dot{\omega}_{2, max}$ è una costante che imponiamo. Ma quindi anche le coppie d'inerzia ($I_m \dot{\omega}_{2, max}$; $I_u \dot{\omega}_{2, max}$) sono dati di progetto perché I_m e I_u sono costanti. In questo modo posso concentrarmi su ε .

Lo scopo è quello di minimizzare M_m !

Qual'è M_m minimo tale da raggiungere $\dot{\omega}_{max}$?

C'è un grado di libertà per fare ciò: posso modificare solo ε . Significa minimizzare i costi (d'acquisto, manutenzione, di ingombro) che dipendono dalle Taglie del motore (M_m).

Matematicamente per trovare il minimo dovuto M_m rispetto a ε :

$$M_m \varepsilon = (I_m \varepsilon^2 + I_u) \dot{\omega}_{2, \max} \xrightarrow{\text{divido per } \varepsilon} M_m = \left(I_m \varepsilon + \frac{I_u}{\varepsilon} \right) \dot{\omega}_{2, \max}$$

Devo derivare quella:

$$\frac{d M_m}{d \varepsilon} = \left(I_m - \frac{I_u}{\varepsilon^2} \right) \dot{\omega}_{2, \max} = 0$$

Eguaglio a 0 per trovare il minimo:

$$\left(I_m - \frac{I_u}{\varepsilon^2} \right) = 0 \longrightarrow \boxed{\varepsilon_{\text{OPT}} = \sqrt{\frac{I_u}{I_m}}} \quad \varepsilon \text{ OTTIMALE}$$

Ma siamo sicuri che è un minimo e non un massimo?

Per essere minimo la derivata seconda deve essere > 0 :

$$\left. \frac{d^2 M_m}{d \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon_{\text{OPT}}} = \frac{2 I_u}{\varepsilon_{\text{OPT}}^3} \dot{\omega}_{2, \max} > 0 \quad \text{è un minimo}$$

Qual'è il significato di ε ottimale?

È l'energia cinetica, anche se riduco il momento motore, si deve conservare:

$$\frac{1}{2} I_m^R \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_m \omega_1^2 \longrightarrow I_m^R = I_m \varepsilon^2$$

Se scelgo ε uguale a ε_{OPT} :

$$I_m^R = \frac{I_m}{I_m} I_u = I_u \text{ IMP. È quello che permette di pareggiare le energie cinetiche di macchina}$$

motrice e utilizzatrice. È come dire che il motore è chiamato ad accelerare solo delle masse rotanti, e quindi l'energia che mette in gioco serve per metterlo ad accelerare se stesso e per muovere il carico.

2) CARICO MISTO

Ritorno M_R :

$$M_m \varepsilon \rightarrow M_R = (I_m \varepsilon^2 + I_u) \dot{\omega}_{2, \max}$$

Mi interessa derivarlo, allora solo M_m :

$$M_m = \left(I_m \varepsilon + \frac{I_u}{\varepsilon} \right) \dot{\omega}_{2, \max} + \frac{M_R}{\varepsilon}$$

Ne faccio la derivata e la eguaglio a 0.

$$\frac{dM_m}{d\varepsilon} = \left(I_m - \frac{I_u}{\varepsilon^2} \right) \dot{\omega}_{2, \max} - \frac{M_R}{\varepsilon^2}$$

$M_R \approx \text{cost}$

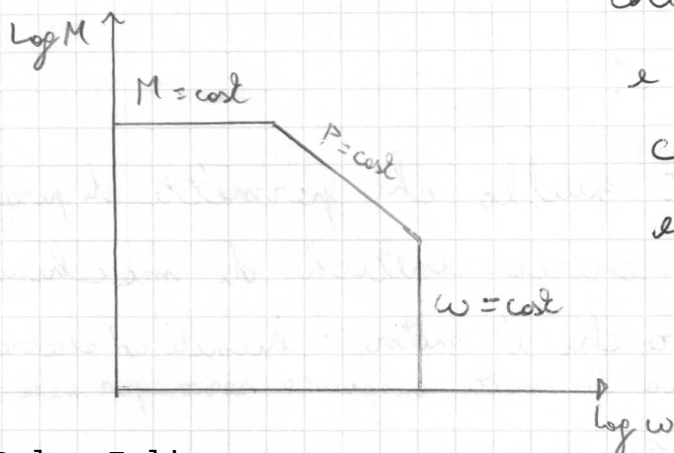
Quindi ho che ε OTTIMALE :

$$\varepsilon_{\text{OPT}} = \sqrt{\left| \frac{I_u \dot{\omega}_{2, \max} + M_R}{I_m \dot{\omega}_{2, \max}} \right|}$$

mettiamo il modulo perché
vale anche nel caso di decelerazione

• CAMBIO DI VELOCITÀ

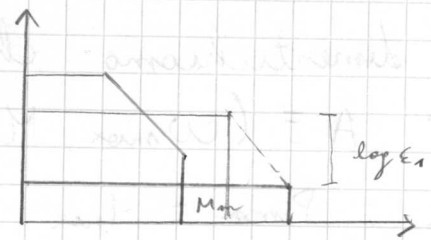
Nel caso in cui si debba progettare un cambio per accoppiare il tipo di macchina (a coppia cost, vel. costante o P costante) al tipo di carico, dovrei conoscere quest'ultimo per accoppiare caratteristiche simili. Per costruire il caso più generale facciamo che il momento resistente debba tutte



e 3 le tipologie: un tratto a coppia costante, un tratto a potenza costante e un tratto a velocità costante.

Praticamente non è un rettangolo (il luogo dei carichi)

L'idea è quella di accoppiarla con un motore ad $M_m = \text{cost}$ (anche il motore a combustione interna per un tratto lo è) e di spostarmi su linee a 45° grazie a $E \cdot M_m$ e il rettangolo di destra. Con $E = E_1$ ad esempio schiaccio e obro il rettangolo seguendo la linea tratteggiata.



Se prendo poi dei motori come a destra. Nel caso ① ho sovradimensionato il motore: mi garantisce di vincere sempre M_r anche senza cambio. Invece lo scopo è come sopra, avere un motore "piccolo", e con il cambio ricoprire tutte le condizioni di M_r .

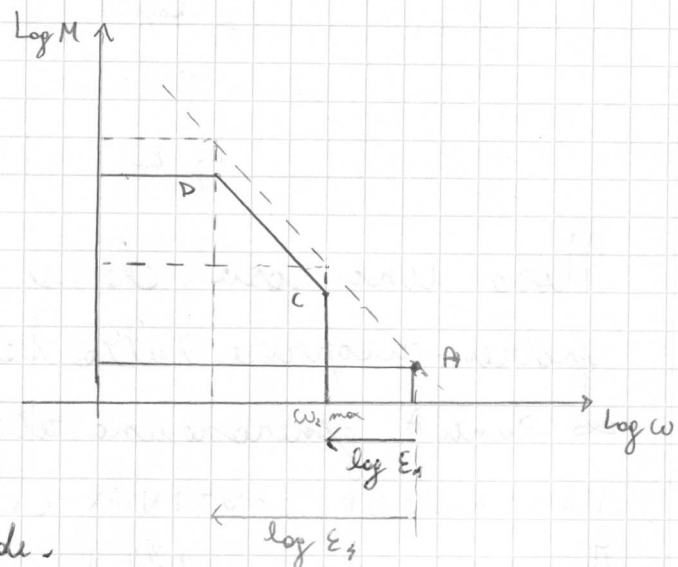


Ma devo stare attento o come nel caso ②



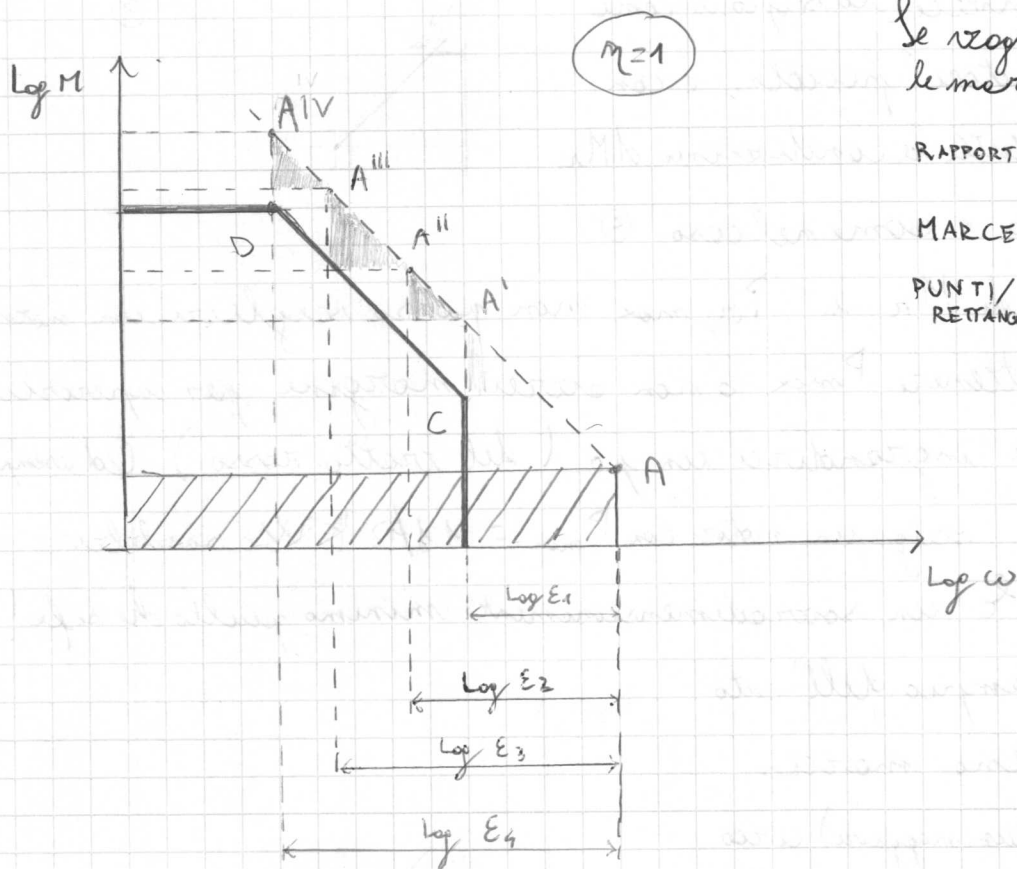
se il tratto diagonale di M_r è $P_{r, \max}$ non posso scegliere un motore che mi permetta di ottenere $P_{\max}$ o non avrei margine per superarlo e accelerare. Senza ingrandirci un po' (del tratto rosso). Ad esempio se $P_{r, \max} = 10 \text{ kW}$ scelgo un motore con $P_{\max} = 11/2 \text{ kW}$ o sarebbe sottoadimensionato. E' un sovradimensionamento minimo quello che si fa!

Se facciamo l'esempio dell'auto Megari con la prima marcia (rettangolo rosso, rapporto di riduz. maggiore) cerco di ricoprire $M_{r, \max}$ con un margine per accelerare, spostandomi di $\log E_1$ e usore, ad esempio, la IV marcia per le condizioni meno gravose (a livello di M_r): Portiamo del rettangolo verde.



Per le altre condizioni soddisfacendo con le marce intermedie II e III

N.B. Non dimentichiamo che, ad esempio, il punto A è tale che $A \equiv (w_{max}, M_{max})$ ossia dove ha la sua potenza max: $P_{max} = M_{max} \cdot w_{max}$; tuttavia il motore può lavorare in tutto quel rettangolo (non sta per forza sempre al massimo) quindi quelle (in particolare il segmento orizzontale M_{max}) sono le condizioni per la massima apertura delle valvole e forfelle. Poi con ϵ andiamo a costruirci altri rettangolini con w_{max} e M_{max} diversi (rispetto A di $\log \epsilon$ a 45°).
 Invece la w in C (tratto rettilineo) è la $w_{2, max}$: velocità massima del corso.



Se vogliamo fare un esempio con le marce dell'auto:

RAPPORTI: $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \epsilon_4$

MARCE: IV III II I

PUNTI/RETTANGOLI: A' A'' A''' AIV

Nota una cosa: che se faccio tendere i rapporti a ∞ (∞ marce) potrei ricoprire tutta la retta a potenza costante (---), ossia ∞ punti A generano una retta. È quello che fanno i CAMBI a VARIAZIONE CONTINUA (CVT) grazie a pulegge coniche.

In ogni caso, se effettuo una equa ripartizione tra le marce abbiamo che:

7. Triangolini riempiti in proprio sono uguali! (sempre se $\eta=1$)

Quindi succede che:

$$\log \varepsilon_2 - \log \varepsilon_1 = \log \varepsilon_3 - \log \varepsilon_2 = \log \varepsilon_4 - \log \varepsilon_3$$

Praticamente tali differenze, cateti inferiori dei triangoli, sono uguali. Da sopra uso le proprietà dei logaritmi:

$$\log(\varepsilon_2/\varepsilon_1) = \log(\varepsilon_3/\varepsilon_2) = \log(\varepsilon_4/\varepsilon_3)$$

Per essere uguali devono essere uguali gli argomenti:

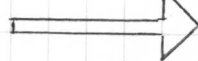
$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} = q \quad \text{una costante}$$

Da cui:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot q$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \cdot q = \varepsilon_1 \cdot q^2$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 \cdot q = \varepsilon_2 \cdot q^2 = \varepsilon_1 \cdot q^3$$



$$\boxed{\varepsilon_N = \varepsilon_1 \cdot q^{N-1}}$$



$$\boxed{q = \sqrt[N-1]{\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_1}}}$$

Vediamo come si usa tale fattore:

Come prima cosa le velocità non viene ridotte solo dal cambio, ma prima di passare all'asse delle ruote viene ridotte di un fattore $3 \div 4 = \varepsilon_{RF}$ (RIDUZ. FINALE)

Quindi il rapporto di trasmissione totale $\tilde{\varepsilon}$ vale:

$$\tilde{\varepsilon} = \overset{\text{CAMBIO}}{\varepsilon_C} \cdot \varepsilon_{RF} = 2,5 \div 14 = \frac{\omega_{\text{MOTORE}}}{\omega_{\text{RUOTE}}}$$

Se come detto prima $\varepsilon_{RF} = 4 \rightarrow \frac{1}{4}$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_{RF}} = \varepsilon_C = 0,625 \div 3,5$$

A PERTU
CAMBIO
(Vedere primo rapporto
trasmissione $\rightarrow$ vedere
ultimo rapporto)

• Quindi nell'esempio dell'auto se ho 4 marce $\rightarrow N=4$
 Caso 4 marce ($N=4$)

ϵ_4 (devi perentormi) = 3,5 come rapporto di riduzione

$$\epsilon_1 = 0,625$$

Uso la formula di q:

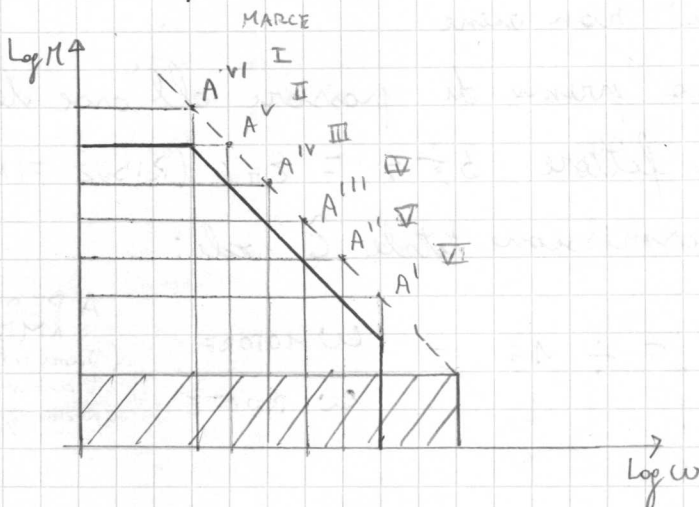
$$q = \sqrt[N-1]{\frac{3,5}{0,625}} = 1,48$$

Moto che la terza marcia è quasi in presa diretta con il motore (lo sarebbe se fosse proprio 1)

• Caso 6 marce ($N=6$)

$$q = \sqrt[6-1]{\frac{3,5}{0,625}} = 1,41$$

Per quanto riguarda la coppia mi posso mettere a potenza più vicina a quella del carico:



$$\epsilon_4 = 3,5$$

↓ diviso per 1,48

$$\epsilon_3 = 1,94$$

↓ diviso per 1,48

$$\epsilon_2 = 1,10$$

↓ diviso per 1,48

$$\epsilon_1 = 0,625$$

Marce

I

II

III

IV

$$\epsilon_6 = 3,5$$

I

$$\epsilon_5 = 2,48$$

II

$$\epsilon_4 = 1,76$$

III

$$\epsilon_3 = 1,25$$

IV

$$\epsilon_2 = 0,88$$

V

$$\epsilon_1 = 0,625$$

VI

Ottenuti dividendo

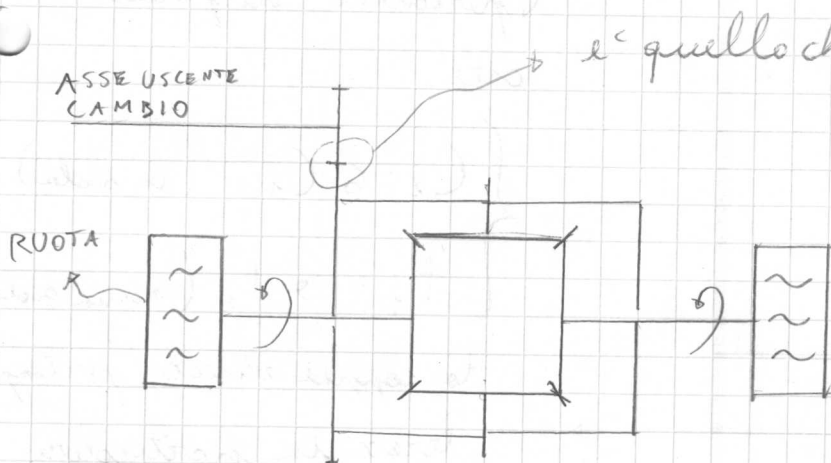
sempre per

$$1,41$$

Overalmente vale sempre il discorso dei triangolini e dei log ϵ .

Conclusione: + marce + precisione.

Le proprio ci chiediamo ancora chi è ϵ e ϵ_{rf} :



ϵ è quello che si ha qui! Tra l'asse uscente dal cambio ed il differenziale delle ruote su alcuni fuoristrada non è proprio così ma è tipo le bici: posso variare ancora tra due rapporti vicino

al differenziale e quindi se ho 5 marce, in realtà ne ho 10. Come sulle bici vario le marce vicino le ruote (ovviamente 6) ma al motore (vicino i pedali) ne ho 3 quindi ho 18 rapporti ossia 18 combinazioni.

RUOLO DEL VOLANO NEL RIDURRE LA TAGLIA DEL MOTORE

In MAM avremo visto come il volano riduceva il grado di irregolarità nel periodo. Tale irregolarità è sempre imposta dal carico.

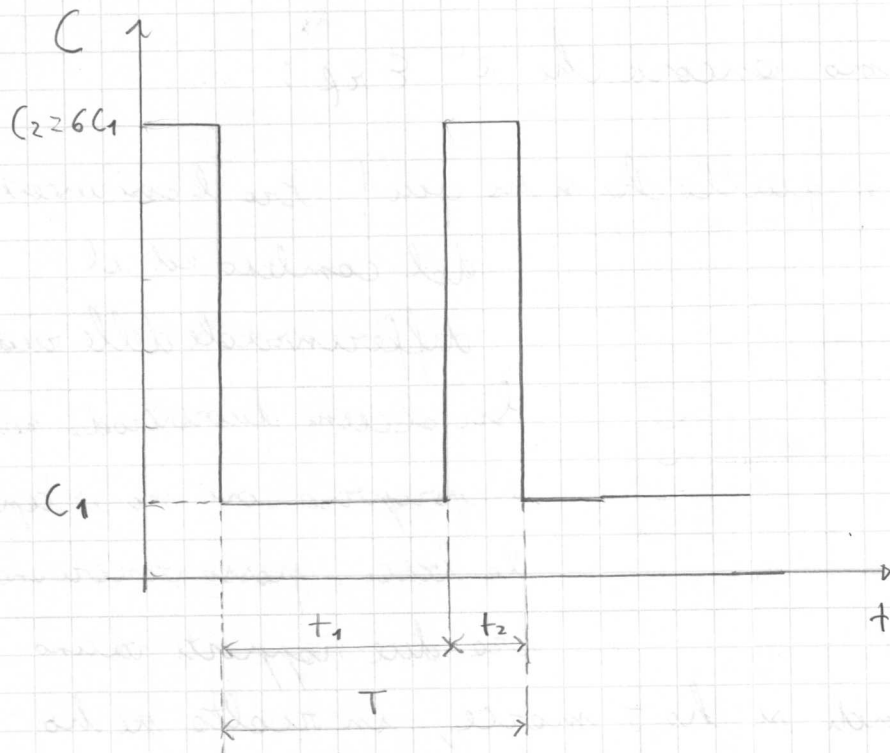
Qui invece lo scopo è di accoppiare un motore asincrono, che ha la caratteristica meccanica di destra, ad un carico fatto come a pagine successive.

Chiameremo:

$M \sim$ COPPIE MOTRICI

$C \sim$ COPPIE RESISTENTI (CARICO)





È un carico ciclico
(periodico) di periodo T
ore:

$$\begin{cases} C_2 = 6 C_1 \text{ (in scala)} \\ t_1 = 9 t_2 \text{ (non in scala)} \end{cases}$$

Ho coppie elevate per tempi
brevi in particolare
 C_2 incide per il 90% del tempo.

La coppia che il motore riesce a garantire M_{max} deve
essere almeno:

$$M_{m, max} \geq C_{max}(C_2)$$

Se vi è una trasmissione interposta ovviamente dobbiamo
tenere conto di ϵ .

Un altro parametro che deve essere soddisfatto è quello
della coppia nominale M_n :

$$M_n \geq ?$$

È quello che il motore può sostenere / erogare in tempi
infinitamente lunghi (preservando quindi la propria integrità).

Ossia il motore ha una coppia massima ma di certo
non possiamo spingerlo al massimo per tutto il tempo o
"si romperà", probabilmente per surriscaldamento. Quindi

M_{max} è una coppia di picco e ci dovremo prestare per quei
piccoli tratti C_2 . Ma in base a che carico va dimensionata?

Per esempio per il DC-BRUSHED il momento era
proportionale a K_i : $M = K_i$

La potenza dissipata per effetto Joule è:

$$Q = R_{eq} i^2$$

Quando questo effetto è bilanciato siamo alla coppia nominale altrimenti siamo al di sopra e la potenza generata non viene dissipata ed è

perduta velocemente. Tuttavia sopra i è i^2 ! Quindi a noi interessa il quadrato della coppia (perché la coppia va con i).

$Q \propto M^2$ dello stesso ordine.

Quindi non si usa il valore medio del coseno ma il:

ROOT MEAN SQUARE (C_{rms})

$$C_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T C^2 dt}$$

È il teorema della media applicato al quadrato di C .

Quindi a quel punto interrogatorio di pag precedente sappiamo che metterci:

$$M_n \geq C_{rms}$$

Anche detta COPPIA EQUIVALENTE TERMICA

• Applicazione a caso in esame:

$C_{max} = C_2$ È integrale lo vediamo come somma di aree al quadrato:

$$C_{rms} = \sqrt{\frac{1}{10t_2} [C_1^2 t_1 + 36 C_1^2 t_2]} = \sqrt{\frac{C_1^2}{10t_2} [25t_2]} = 2,1 C_1$$

$\downarrow$ $T = 9t_2 + t_2$

$$C_{rms} = 2,1 C_1$$

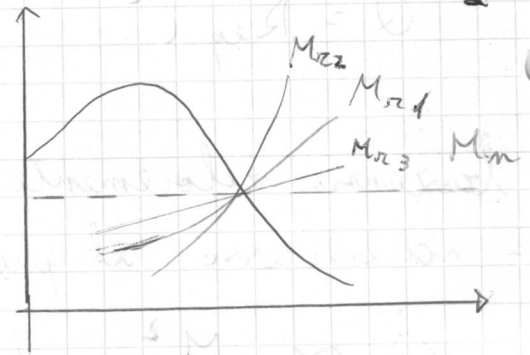
La prima condizione è che $M_{max} \geq C_{max}$ ma la seconda è che:

$$M_n \geq C_{rms}$$

Ma qual'è la coppia nominale di un motore asincrono?

In genere per un motore asincrono vale $M_n \equiv \frac{M_{max}}{2}$

Perché? e perché è quello che mi dà stabilità a regime per quasi tutti gli M_n . Da destra si vede come si cerca di far coincidere M_n con quel punto (M_n) del motore asincrono, o meglio, della sua coppia.



Quali delle due condizioni seguenti è più limitante?

$$1) M_{max} \geq C_{max} \quad \overset{C_{max} = C_2}{\Rightarrow} M_{max} \geq C_2 \quad \overset{C_2 = 6C_1}{\Rightarrow} M_{max} \geq 6C_1$$

$$2) M_n \geq 2,1 C_1 \quad \overset{M_n = \frac{M_{max}}{2}}{\Rightarrow} \frac{M_{max}}{2} \geq 2,1 C_1 \Rightarrow M_{max} \geq 4,2 C_1$$

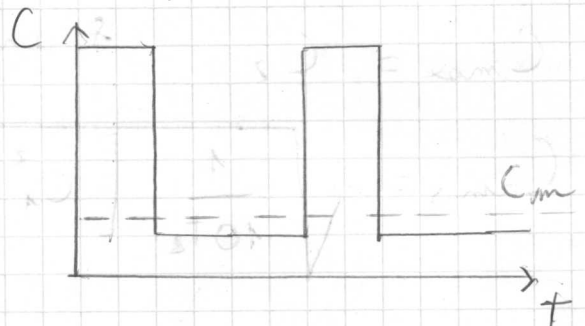
Si vede che nel nostro caso è più restrittiva la 1) che è lo stesso di dire $M_n \geq 3 C_1$.

• AGGIUNTA DEL VOLANO

Si regolarizza la ω del carico (si appiattisce la curva di C):

Viene aggiunto un termine di inerzia tale da appiattire C . Il motore quindi vede un carico pari al valor medio delle curve di prima?

$$C_m = \frac{6 C_1 t_2 + C_1 t_2}{10 t_2} = 1,5 C_1$$



Quindi otteniamo che:

$$M_n \geq 3 C_1 \xrightarrow{\text{CON VOLANO}} M_n \geq 1,5 C_1$$

Questo vale nell'ipotesi che il volano appiattisca la curva fino a diventare uguale a C_m (un valore continuo e costante):

$$C \approx C_m$$