

Si consideri un condensatore piano e a area parallela costituito da due lastre di area  $S = 1 \text{ mm}^2$ , caricate con una carica  $Q = 10^{-6} \text{ C}$  e separate da una distanza  $d = 1 \text{ mm}$ .

Calcolare l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore e il lavoro che sarebbe necessario fornire per ridoppiare la distanza tra le armature del condensatore.

Si consideri poi un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 3$  e si calcoli la differenza di potenziale tra le armature del condensatore prima e dopo che lo spazio compreso tra le armature è stato riempito in parte (come illustrato in figura) con il dielettrico indicato.

Rispondere quindi alle seguenti domande:

- 1) La differenza di potenziale tra le armature, prima che il condensatore sia parzialmente riempito con il dielettrico, vale:

Condensatore prima:



Condensatore dopo:



$$Q = C \cdot |\Delta V| \Rightarrow |\Delta V| = \frac{Q}{C} \quad \left| C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\Delta V| = \frac{d \cdot Q}{\epsilon_0 \cdot A} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \approx 0,112 \text{ PP} \cdot 10^9 \approx 1,13 \cdot 10^8 \text{ V}$$

- 2) L'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore in queste condizioni vale:

$$U = \frac{1}{2} C \cdot |\Delta V|^2 \Rightarrow \left| C = \frac{Q}{|\Delta V|} \right| \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-6}}{1,13 \cdot 10^8} \cdot 1,13 \cdot 10^8 \approx 0,565 \cdot 10^2 \approx 56,5 \text{ J}$$

- 3) Il lavoro necessario per ridoppiare la distanza tra le armature vale:

$$L = -\Delta U = U_f - U_i \quad U_f = \frac{1}{2} \cdot C_{fd} \cdot |\Delta V|_{fd}^2 \quad \left| C_{fd} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{2d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = 4,425 \cdot 10^{-15} \text{ F} \right|$$

$$U_f = \frac{1}{2} \cdot 4,425 \cdot 10^{-15} \cdot 0,225 \cdot 10^9 \approx 4,425 \cdot 0,051 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{18} \approx 0,113 \cdot 10^3 = 113 \text{ J}$$

$$L = U_f - U_i = 113 \text{ J} - 56,5 \text{ J} = 56,5 \text{ J}$$

- 4) La differenza di potenziale tra le armature, dopo che lo spazio compreso tra le armature è stato riempito in parte con il dielettrico indicato, vale:



1) Condensatore con riempito epoxiale e due conduttori piatti paralleli, in cui:

$$C_p = C_{(eo)} + C_{(er)} \quad \left| \quad C_{eo} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-3}} = 4,425 \cdot 10^{-15} F \right.$$

$$C_{er} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} = \epsilon_r \cdot C_{eo} = 4,425 \cdot 10^{-15} F \cdot 3 = 13,275 \cdot 10^{-15} F$$

$$C_p = (4,425 + 13,275) \cdot 10^{-15} F = 17,7 \cdot 10^{-15} F$$

$$| \Delta V | = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-6} C}{17,7 \cdot 10^{-15} F} \approx 0,05649 \cdot 10^9 V \approx 5,65 \cdot 10^7 V$$

Esercizio n° 2

Sono date tre cariche  $Q_1, Q_2, Q_3$  poste nei punti  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , come in figura. Si determini il valore del potenziale elettrico nel punto  $O(0,0)$ , origine del sistema di riferimento. Si determini inoltre il valore del campo elettrico nello stesso punto  $O$ . Si determini, infine, l'energia totale elettrostatica del sistema. Valori numerici:  $Q_1 = 1 \mu C, Q_2 = -2 \mu C, Q_3 = -2 \mu C, P_1(0,2)m, P_2(-2,0)m, P_3(2,0)m; K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$ .

Rispondere alle seguenti domande:

⑤ Il potenziale elettrico nel p.to  $(0,0)$  origine del sistema vale:

$$V_0 = V_0^{(Q_1)} + V_0^{(Q_2)} + V_0^{(Q_3)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|r_i|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1 \cdot 10^{-12}}{2} + \frac{-2 \cdot 10^{-12}}{2} + \frac{-2 \cdot 10^{-12}}{2} \right) = 9 \cdot 10^9 N \cdot \left( \frac{1}{2} - 1 - 1 \right) \cdot 10^{-12} = 9 \cdot 10^9 \cdot (-1,5) \cdot 10^{-12} = -13,5 \cdot 10^{-3} V = -13,5 mV$$

⑥ La componente  $E_x$  del campo elettrico nel p.to  $(0,0)$  vale:

Le componenti lungo x dei campi generati dalle cariche  $Q_2$  e  $Q_3$  in  $O$  sono uguali e opposte. Le componenti lungo x del campo generato dalla carica  $Q_1$  in  $O$  è invece nulla (il campo è diretto tutto lungo l'asse y). Quindi il campo totale lungo x è nullo  $E_x^{tot} = 0$ .

⑦ La componente  $E_y$  del campo elettrico nel p.to  $(0,0)$  vale:

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{|r_1|^2} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-12}}{2^2} = -2,25 \cdot 10^{-3} N/m$$

(meno perché il campo è diretto nel verso negativo dell'asse y)



⑧ L'energia elettostatica totale del sistema sarà:

$r \rightarrow$  distanza tra le cariche  $Q_1$  e la carica  $Q_3$  (e tra la carica  $Q_2$  e la carica  $Q_3$ )

45

$$U_{tot} = - \sum_{i=1}^3 L_{\infty, p_i} \quad L_{\infty, p_1} = 0 \quad L_{\infty, p_2} = \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left( -\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r}$$

$$L_{\infty, p_3} = L_{\infty, p_3}^{(Q_1)} + L_{\infty, p_3}^{(Q_2)} \quad L_{\infty, p_3}^{(Q_1)} = \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r^2} \cdot d\vec{r} \quad Q_3 = Q_2 \quad L_{\infty, p_3}^{(Q_1)} \Rightarrow L_{\infty, p_3} = L_{\infty, p_2}$$

$x \rightarrow$  distanza della carica  $Q_2$  e  $Q_3$  dall'origine

$$L_{\infty, p_3}^{(Q_2)} = \int_{\infty}^{2x} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r^2} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_2 \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{2x} = -\frac{Q_2 \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2x}$$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,82$$

$$x=2 \quad 2x=4$$

$$L_{tot} = L_{\infty, p_1} + L_{\infty, p_2} + L_{\infty, p_3}^{(Q_2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1 \cdot (-2) \cdot (10^{-14})^2}{2,82} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - 1,418) \cdot (10^{-14})^2}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot (1 - 9,418) \cdot 10^{-24} = 9 \cdot 10^9 \cdot (-8,418) \cdot 10^{-24} = -7,5762 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

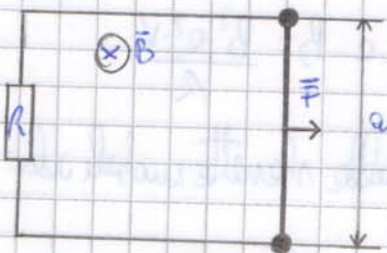
Esercizio n° 3:

Nel circuito rettangolare conduttore, mostrato in figura, un lato è costituito da una sbarretta conduttrice mobile, di lunghezza  $a$ , che può scorrere senza attrito. Nel circuito è inserita una resistenza  $R$ . Il circuito è immerso in un campo magnetico di modulo  $B$ , entrante nel piano della figura. Alla sbarretta mobile è applicata una forza esterna  $F$  che determina il moto della sbarretta verso destra. Si calcoli la velocità con cui si muove verso destra la sbarretta mobile, la potenza dissipata nella resistenza e il lavoro fornito di tempo fatto dalla forza  $\vec{F}$ .

Valori numerici:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $R = 0,1 \Omega$ ,  $B = 5 \text{ T}$ ,  $F = 9,5 \text{ N}$ .

Rispondere alle seguenti domande:

① La corrente indotta nel circuito scorre in verso orario. Questo si ripete considerando il fatto che il verso del campo magnetico  $B$  è tale che,



spingendola la mano da sinistra verso il piano del foglio, il verso di chiusura della lista sarebbe orario. La corrente indotta scoppia e tale verso, perciò è in verso orario.

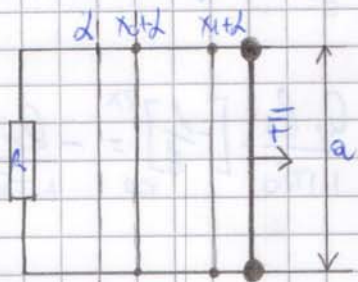
② Detta  $v$  la velocità della sbarretta mobile, la variazione del flusso del campo  $B$  attraverso



verso il elemento nell'unità di tempo le modulo:

Per calcolare:  $\frac{d\phi(t)}{dt}$   $d\phi = B \cdot dS = B \cdot (e \cdot dx) = B \cdot e \cdot dx$   
 $\frac{d\phi}{dt} = B \cdot e \cdot \frac{dx}{dt} \xrightarrow{v} \frac{d\phi}{dt} = B \cdot e \cdot v$

Un metodo alternativo sarebbe quello di considerare due istanti di tempo  $t_0$  e  $t_1$ , prende un istante all'altro le sbarrette cambie posizione (ripete verso destra) di un passo  $(x_1 - x_0)$ :



Per calcolare  $\frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t}$

$$\phi_B(S, x=x_0) = B \cdot S(x=x_0) = B \cdot e \cdot (x+x_0)$$

$$\phi_B(S, x=x_1) = B \cdot S(x=x_1) = B \cdot e \cdot (x+x_1)$$

$$\Delta\phi_B(S) = \phi_B(S, x=x_1) - \phi_B(S, x=x_0) = [B \cdot e \cdot (x+x_1)] - [B \cdot e \cdot (x+x_0)] = B \cdot e \cdot x + B \cdot e \cdot x_1 - B \cdot e \cdot x - B \cdot e \cdot x_0$$

$$= B \cdot e \cdot (x_1 - x_0) \quad \frac{\Delta\phi_B(S)}{\Delta t} = \frac{B \cdot e \cdot (x_1 - x_0)}{(t_1 - t_0)} \xrightarrow{v} B \cdot e \cdot v$$

① La forza magnetica esistente sulle sbarrette perne de corrente del camp magnetico B le modulo:

Alimenta le sbarrette continue e muoversi di velocità  $\vec{v}$ , la forza magnetica si oppone alle forze esterne indipendentemente da esse, quindi non è cause di movimenti all'indietro, ma un effetto dovuto alla resistenza del filo magnetico. For vel, per la II<sup>a</sup> legge di Faraday:

$$d\vec{F}_m = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} = I \cdot d\vec{l} \cdot B \cdot \sin(\alpha) \xrightarrow{\alpha=90^\circ} I \cdot d\vec{l} \cdot B \quad \vec{F}_m = I \cdot B \cdot \int_L d\vec{l} = I \cdot L \cdot B \quad \left| \begin{array}{l} L=e \\ I = \frac{f_{em}}{R} = \frac{B \cdot e \cdot v}{R} \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_m = \frac{B \cdot e \cdot v}{R} \cdot e \cdot B = \frac{B^2 \cdot e^2 \cdot v}{R}$$

② La velocità delle sbarrette mobile vel:

$$\vec{F}_m = -\vec{F} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{B^2 \cdot e^2 \cdot v}{R} \Rightarrow v = \frac{R \cdot F}{B^2 \cdot e^2} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{25 \cdot 100} \cdot 10^9 \approx 0,2 \text{ m/s}$$

④ La f.e.m. indotte nel elemento le modulo:

$$f_{em} = \frac{\Delta\phi_B(S)}{\Delta t} = \frac{d\phi_B(S)}{dt} = B \cdot e \cdot v = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 92 \approx 4,6 \text{ V} \Rightarrow$$



(14) Le corrente indotte nel circuito ha modulo pari a:

$$I_{\text{IND}} = \frac{P_{\text{em, IND}}}{R} = \frac{0,1 \text{ V}}{0,1 \Omega} = 1 \text{ A}$$

(15) La potenza dissipata nella resistenza vale:

$$P_{\text{Diss}}^{(12)} = V \cdot I = P_{\text{em, IND}} \cdot I_{\text{IND}} = 0,1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 0,1 \text{ W}$$

$$P = F \cdot v = F \cdot \frac{dx}{dt} = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ W}$$

$$\text{oppure: } P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{L}{\Delta t} \Rightarrow L = P_{\text{Diss}}^{(12)} = 0,1 \text{ W}$$



Un condensatore è costituito da due lastre metalliche piane di lato  $l$ . Le distanze tra le lastre è pari a  $d$ . Un dielettrico di costante relativa  $\kappa$  viene inserito per un tratto  $x$  nel condensatore. Rispondere:

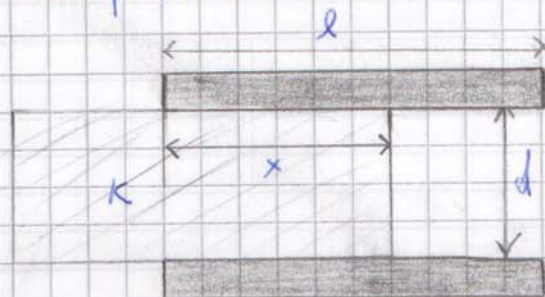
- La capacità equivalente del dispositivo
- L'energia immagazzinata nel condensatore se la differenza di potenziale è  $V$ .
- La densità e il modulo delle forze esercitate nel dielettrico (nel caso in cui le distanze siano infinite, trascurando gli effetti di bordo e gli eventuali attriti).
- Il valore delle forze aumentando che se  $l = 5 \text{ cm}$ ,  $V = 2000 \text{ V}$ ,  $d = 2 \text{ mm}$  e che il dielettrico è del vetro, con  $\kappa = 4,5$ . Rispondere purché ella reputi opportuno.

① La capacità equivalente del dispositivo è:

Il dispositivo può essere visto come un sistema di due condensatori posti in parallelo, per cui:

$$C_{eq} = C_0 + C_\kappa \quad \left| \quad \begin{aligned} C_0 &= \frac{\epsilon_0 \cdot (l-x) \cdot l}{d} \\ C_\kappa &= \frac{\epsilon_0 \cdot \kappa \cdot x \cdot l}{d} \end{aligned} \right.$$

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 \cdot l^2}{d} - \frac{\epsilon_0 \cdot l x}{d} + \frac{\epsilon_0 \cdot \kappa \cdot l x}{d} = \frac{\epsilon_0 \cdot l^2}{d} + \frac{\epsilon_0 \cdot l x (\kappa - 1)}{d}$$



② L'energia immagazzinata nel condensatore se la differenza di potenziale è  $V$  vale:

$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\epsilon_0 \cdot l^2}{d} + \frac{\epsilon_0 \cdot l x (\kappa - 1)}{d} \right) \cdot V^2 = \frac{\epsilon_0 \cdot l^2 + \epsilon_0 \cdot l x (\kappa - 1)}{2d} \cdot V^2$$

③ Le forze esercitate nel dielettrico nel caso in cui la differenza di potenziale rimane costante lo modulo:

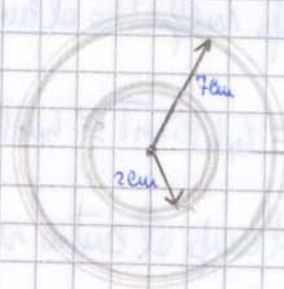


Nelle figure è mostrata una bobina di raggio  $2\text{ cm}$  concentrica con un'altra bobina di raggio  $7\text{ cm}$ . Ogni una delle bobine è costituita da 100 spire circolari. Si suppone che una corrente di  $5\text{ A}$  scorra nella bobina più grande. Calcolare le correnti che devono circolare nella bobina esterna affinché il campo magnetico al centro delle due bobine abbia i seguenti valori:

- $3,0\text{ mT}$  •  $2,0\text{ mT}$  •  $0\text{ T}$ . In ognuno di questi casi determinare inoltre la direzione di circolazione delle correnti nella bobina più piccola e la stanza di quella più grande oppure se è opposta esterne. Rispondere, finalmente, alle seguenti domande:

⑥ Il campo magnetico nel centro di una spira circolare di raggio  $r$  prodotta da una corrente  $i$  ha intensità:

$$B_{\text{spira}} = \frac{\mu_0 i}{2r} \quad \left( \begin{array}{l} \text{campo magnetico generato da una spira} \\ \text{prodotta da corrente } i \text{ nel suo centro} \end{array} \right)$$



⑦ Perchè il campo al centro delle due bobine sia pari a  $2,0\text{ mT}$ , nella bobina piccola deve circolare una corrente pari a:

Il campo totale al centro delle due bobine è pari alla somma dei campi generati dalle correnti di entrambe le bobine. Calcolo prima di tutto il campo magnetico generato dalla corrente che circola nella bobina più grande:

$$B_{\text{(bobina 1)}} = N \cdot B_{r=R_1}^{(\text{spira})} = N \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot R_1} = \frac{100 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-2}} \approx 4,4857 \cdot 10^{-3} \approx 4,485\text{ mT}$$

$$B_{\text{(bobina 2)}} = N \cdot B_{r=R_2}^{(\text{spira})} = \frac{100 \cdot \mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot 0,02} = \frac{100 \cdot \mu_0 \cdot I_2}{0,04} \quad \left( \begin{array}{l} \text{espressione del campo dovuto alla corrente nella} \\ \text{bobina più piccola} \end{array} \right)$$

Per ottenere un campo totale pari a  $2,0\text{ mT}$  si deve avere:

$$B_{\text{tot}} = B_1 + B_2 \Rightarrow 2\text{ mT} = 4,485 + B_2 \quad | \quad B_2 = 4,485\text{ mT} - 2\text{ mT} = 2,485\text{ mT}$$

$$2,485\text{ mT} = \frac{100 \cdot \mu_0 \cdot I_2}{0,04} = 2500 \cdot \mu_0 \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{2,485 \cdot 10^{-3}}{2500 \cdot \mu_0} \approx 9,714\text{ A}$$

⑧ Perchè il campo al centro sia pari a  $2\text{ mT}$ , le correnti nelle due bobine devono: circolare in senso opposto. Questo perché il modulo del campo magnetico generato dalla corrente  $I_2$  che circola nella bobina più piccola è maggiore rispetto a  $2\text{ mT}$ : bisogna quindi



di che corrente che circola nella bobina più grande fuori un campo magnetico  $B_{ext}$  in opposto a quello generato dalla corrente  $I_1$ : per tale motivo anche il verso di  $I_2$  sarà necessariamente opposto a quello di  $I_1$ .

50

9) Perchè il campo al centro sia pari a  $9,0 \text{ mT}$ , nella bobina grande deve circolare una corrente pari a:

$$B_1 = 4,485 \text{ mT} \quad B_2 = 2500 \mu\text{T} \cdot I_2 \quad 9 \text{ mT} = 4,485 \text{ mT} + B_2 \Rightarrow B_2 = 9 - 4,485 \text{ mT} = 4,515 \text{ mT}$$

$$I_2 = \frac{4,515 \text{ mT}}{2500 \mu\text{T}} \Rightarrow I_2 \approx \frac{4,515}{4,47 \cdot 2500} \cdot 10^4 \approx 1,44 \text{ A}$$

10) Il campo magnetico al centro dovuto al solo contributo della bobina grande è pari a:

$$B_1 = 4,485 \text{ mT} \approx 4,49 \text{ mT} \text{ (calcolato prima)}$$

11) Perchè il campo al centro sia pari a zero, nella bobina grande deve circolare una corrente pari a:

$$B_{tot} = 0 \Rightarrow B_2 = -B_1 \Rightarrow B_2 = -4,485 \text{ mT}$$

$$-4,485 \text{ mT} = 2500 \mu\text{T} \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{-4,485}{2500 \cdot 4,47} \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-7}} \approx -1,43 \text{ A}$$

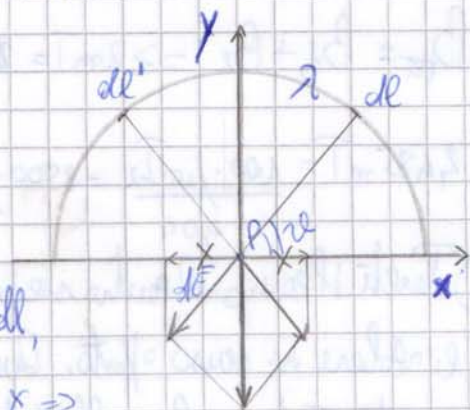
Esercizio n° 3

Si consideri un arco semicircolare in cui è distribuita una carica elettrica. Si assume che per  $\theta$  (costante) le cariche elettriche formate di lunghezza dell'arco e ne è il raggio dell'arco stesso.

Per questo esercizio si calcoli:

- le componenti  $\lambda_{inf x}$  del campo elettrico nel punto P (centro dell'arco di circonferenza)
- le componenti  $\lambda_{inf y}$  del campo elettrico nel punto P

12) Per la semicirconferenza uniformemente carica il modulo delle componenti  $\lambda_{inf x}$  del campo elettrico val:



Consideriamo un elemento di linea  $dl$ , con carica  $dp = \lambda dl$ , che genera nel punto P un campo elementare  $d\vec{E}$ , che facciamo l'angolo  $\theta$  con l'asse  $x \Rightarrow$



un angolo  $\varphi$  lo stesso che fanno il segmento che unisce il centro (punto P). È possibile, per ogni elemento  $dl$  di linee  $dl$ , individuare un elemento di linee simmetrico  $dl'$  tale per cui i due campi elementari generati dalle cariche  $dq$  (in  $dl$ ) e  $dq'$  (in  $dl'$ ) hanno componenti lungo  $x$  uguali ed opposte (per cui si annullano) e componenti lungo  $y$  uguali (in modulo) e con stesso verso (che quindi si sommano). Il campo totale è quindi l'unico lungo la direzione negativa della  $y$ : le componenti lungo  $x$  e per  $\phi$ :  $E_x = 0$

51

(13) Per la simmetria confermare uniformemente come il modulo delle componenti lungo  $y$  del campo  $dy$ :

Per il ragionamento precedentemente fatto, vale:

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \quad |dE_y| = |dE| \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow E_y = \int_{\text{arco}} dE_y = \int_{\text{arco}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \sin \varphi \right) dl = \int_{\text{arco}} dE_y$$

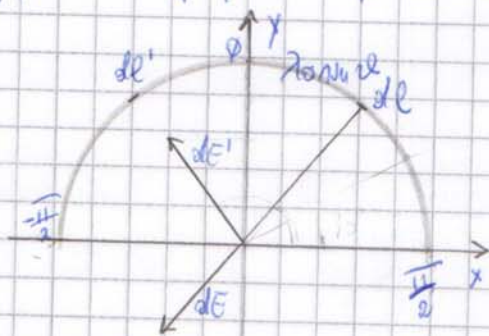
$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \int_{\phi} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} [\cos(\varphi)]_{\phi}^{\pi} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot (-1 - 1) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$|E_y| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Però anche se le cariche non ne fossero uniformemente distribuite lungo la semicirconferenza ma che  $\lambda$  ne fosse  $\lambda_0 \cdot \sin \varphi$ , con  $\varphi$  misurato in gradi. In queste condizioni si calcola:

• le componenti lungo  $x$  del campo elettrico in P • le componenti lungo  $y$  del campo elettrico in P

In questo caso ogni elemento di linee  $dl$  presso  $\frac{\pi}{2} + \phi$  avrà una carica positiva ( $dq = \lambda_0 \sin \varphi dl$ ), mentre il campo è diretto nel verso di allontanamento dalle linee. Per ogni elemento  $dl$  si può individuare un  $dl'$  con  $\varphi$  compreso tra  $\phi$  e  $\frac{\pi}{2}$  per cui le cariche risulta lo stesso in modulo, ma con segno opposto (il verso è opposto).



Per tale motivo anche il campo elementare  $d\vec{E}'$  sarà nel verso di avvicinamento alle linee. Così fatto, i due campi elementari hanno componenti lungo  $y$  uguali ed opposte (si annullano) e componenti lungo  $x$  uguali, ma in modulo di diverso (si sommano). Il campo totale  $E$  è quindi diretto tutto nella direzione negativa della  $x$ :



$$\lambda = \lambda_0 \cdot n \cdot v \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_0 n v^2}{r^2} dl \quad dE_x = |dE| \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_0 n v^2}{r^2} \cdot \cos\theta dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{tot} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_0 n v^2}{r^2} dl \quad dl = r \cdot d\theta \Rightarrow \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_0 n v^2}{r^2} \cdot r \cdot d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot n v^2 \cdot d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( n v^2 \theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \quad \cos(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta) \Rightarrow E_x = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{2} d\theta \right. \\ \left. - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{2} d\theta \right] = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \theta \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} - \frac{1}{4} \left[ \sin(\theta) \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \cdot (\pi) - \frac{1}{4} [\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \right]$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \pi - \phi \right) = \boxed{\frac{\lambda_0}{8\epsilon_0}}$$

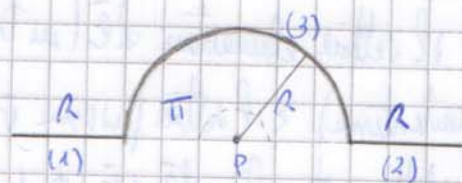
- (15) Per la risonanza conduttrice di onde  $\lambda = \lambda_0 \cdot n \cdot v$  il modulo delle componenti lungo y del campo elettrico vale  $E_y = \phi$  (per punto detto nel paragrafo).



### Esercizio n° 3

PROVA D'ESAME DEL 17/04/2010

$\lambda \rightarrow$  costante carica al centro  $\rightarrow \pi$



53

(1) La carica nel filo vale:

$$Q_{\text{tot}} = \lambda \cdot L \quad | \quad L = R + R + \frac{\pi R}{1} = 2R + \pi R = R(2 + \pi) \quad | \Rightarrow Q_{\text{tot}} = \lambda R(2 + \pi)$$

(2) Il potenziale nel punto P generato dalla carica di tutto il filo, rispetto all' $\infty$ , dove è nullo:

$$V_P^{\text{tot}} = V_P^{(1)} + V_P^{(2)} + V_P^{(3)} \quad dV_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} \quad V_P^{(1)} = \int_R^{2R} dV_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_R^{2R} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{2R}{R}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln(2)$$

$$V_P^{(2)} = V_P^{(1)} \quad V_P^{(3)} = \int_0^\pi dV_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \int_0^\pi R d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \pi$$

$$V_P^{\text{tot}} = 2 \cdot \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln(2) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot (2 \ln(2) + \pi)$$

Incomprimibile una carica puntiforme  $Q$  viene collocata nel punto P.

(3) L'energia potenziale elettrostatica della carica  $Q$  quando è posta nel punto P vale, rispetto all' $\infty$  dove è nullo:

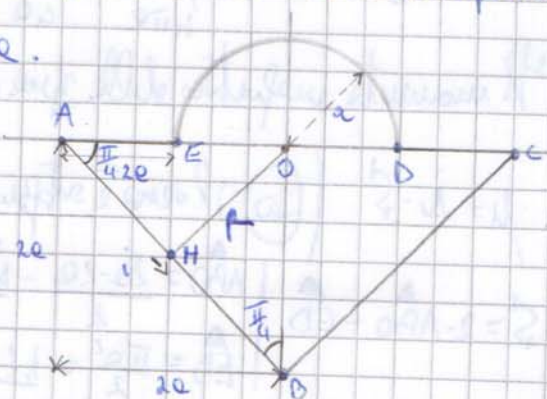
$$U_P = Q \cdot V_P = Q \cdot \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot (2 \ln(2) + \pi)$$

### Esercizio n° 4

Nelle spine mostrate in figura c'è in senso orario una corrente  $i = 1A$ . Calcolare: • campo magnetico in B nel punto O • il momento magnetico  $\vec{m}$  delle spine.

$$R = 10\text{cm} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

(1) Il campo magnetico  $\vec{B}$  nel punto O dovuto alle correnti nelle spine è ortogonale al foglio ed uscente. Chiedendo che vengano definite nel verso delle correnti il filo è uscente dal verso del foglio, perpendicolare ad esso.



$\Rightarrow$



15) Il comp magnetico in O dovuto alle correnti nel filo EA lo modulo:

$\phi$ , in quanto il vettore elementare  $d\vec{r}$  (in tratto di filo infinitesimo percorso da corrente, orientato nel verso della corrente stessa) e il vettore posizione  $\vec{r}$  nello stesso punto sono entrambi perpendicolari al prodotto vettoriale  $d\vec{r} \wedge \vec{r} = \phi$  (ma  $(480^\circ) = \phi$ )

54

16) Il comp magnetico in O dovuto alle correnti nel filo AB vale:

comp magnetico generato da un filo rettilineo finito percorso da corrente:  $\vec{B}_F = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)]$

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi R} \cdot (\cos(45^\circ) + \cos(45^\circ)) = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi R} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi R} \cdot \sqrt{2} \quad | R \equiv \overline{HO}$$

calcolo della lunghezza del tratto  $\overline{HO}$ :

$$\overline{AB} = \sqrt{(2e)^2 + (2e)^2} = \sqrt{4e^2 + 4e^2} = \sqrt{8e^2} = 2e\sqrt{2} \quad \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2e\sqrt{2}}{2} = e\sqrt{2}$$

$$\overline{HB} = \frac{\overline{AB}}{2} = e\sqrt{2} \quad \overline{HO} = R = \sqrt{(\overline{OB})^2 - (\overline{HB})^2} = \sqrt{4e^2 - 2e^2} = \sqrt{2e^2} = e\sqrt{2}$$

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi (e\sqrt{2})} (\sqrt{2}) = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi e}$$

17) Il comp magnetico nel punto O dovuto alle correnti nelle semicirconferenze di raggio  $a$  lo modulo:

comp magnetico generato da un filo a forma di arco di circonferenza, percorso da corrente, nel suo centro (con raggio al centro  $a$ ):  $B_{\text{arco}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \alpha$   $B_{\text{semicirc}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi e} \cdot \pi = \frac{\mu_0 I}{4e}$

18) Il comp magnetico nel punto O dovuto alle correnti nelle spire lo modulo:

$$B^{\text{tot}} = 2 \cdot B_{AB} + B_{\text{arco}} = 2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi e} + \frac{\mu_0 I}{4e} = \frac{2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 1A}{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10}} + \frac{\frac{\mu_0 \cdot 10^{-7} \cdot 1A}{1 \cdot 10}}{\frac{1 \cdot 10}{1 \cdot 10}} = 2 \cdot 10^{-8} + \pi \cdot 10^{-8} \approx 5,14 \cdot 10^{-8} \approx 0,514 \cdot 10^{-7} T$$

19) Il momento magnetico delle spire vale:

$$\mu = i \cdot S \quad (20) \text{ il vettore } \vec{S} \text{ è ortogonale al piano ed uscente da esso}$$

$$S' = 2 \cdot \triangle ABO + \triangle ED \quad \triangle ABO = \frac{2e \cdot 2e}{2} - \frac{2e^2}{2} = 2e^2 = 2 \cdot 10^3 = 200 \text{ m}^2$$

$$\triangle ED = \frac{\pi e^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 100}{2} = \frac{314}{2} = 157 \text{ m}^2$$

$$S' = 2 \cdot 200 + 157 = 557 \text{ m}^2$$



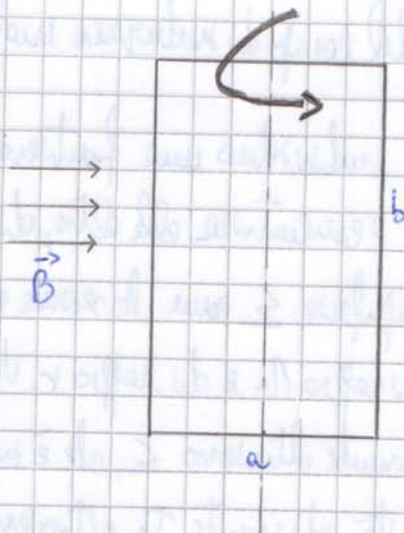
PROVA DEL 10/06/2010

Problema n°4:

$a=1\text{m}$   $b=0,8\text{m}$   $v=60\text{pi/s}$  (frequenza)

$B=0,5\text{T}$

- 21) L'angolo  $\vartheta$  che la superficie della spira forma con la direzione del campo magnetico varia nel tempo, secondo la legge:  $\vartheta = 2\pi v t \rightarrow (\omega t)$ , quindi:  
 $\vartheta(t) = 2\pi v \cdot t$



55

- 22) La f.e.m. indotta nella spira in funzione del tempo vale:

$\mathcal{E}_{\text{ind}}(t) = - \frac{d}{dt} \varphi_B(S, t)$       $\varphi_B(S) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\vartheta) = B \cdot S \cdot \cos(2\pi v t) = B \cdot a \cdot b \cdot \cos(2\pi v t)$

$\varphi_B(S, t) = B \cdot a \cdot b \cdot \cos(2\pi v t)$       $\mathcal{E}_{\text{ind}}(t) = B \cdot a \cdot b \cdot \frac{d}{dt} (\cos(2\pi v t)) = B \cdot a \cdot b \cdot 2\pi v \cdot \sin(2\pi v t)$

- 23) Se la spira ha una resistenza di  $1\text{k}\Omega$ , la corrente indotta nella spira ha un valore massimo pari a:

$I_{\text{IND}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{R} = \frac{0,5\text{T} \cdot (1 \cdot 0,8)\text{m}^2 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 60 \cdot \sin(2 \cdot 3,14 \cdot 60 \cdot t)}{1 \cdot 10^3 \Omega} = \frac{150,72\text{V}}{10^3 \Omega} \approx 150,72 \cdot 10^{-3} \text{V} = 0,15\text{A}$

1 (il seno max è per  $e \pm 1$ )  
 per  $2\pi v t = \frac{\pi}{2}$

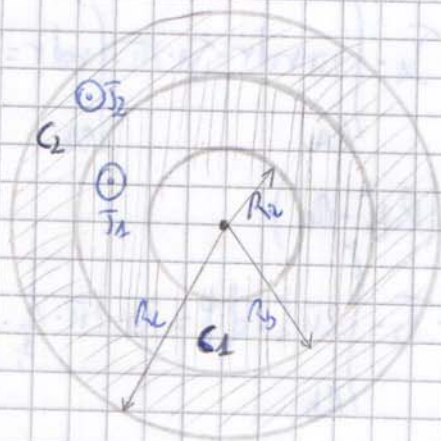
Problema n°5

Arspettivo cilindrico di lunghezza  $L \gg R_c$   
 (da considerarsi infinito)

$C_1 \rightarrow$  conduttore 1 attraversato da corrente di densità  $J_1$

$C_2 \rightarrow$  conduttore 2 attraversato da corrente di densità  $J_2$

$R_b = 2R_c$       $R_c = R_c$



- 24) Il modulo del campo di induzione magnetica  $B$  per  $\phi < R_c$  vale  $\phi$ , in quanto:

$B = \frac{\mu_0 \cdot I_{\text{int}}}{2\pi r}$ , ma in quanto  $r < R_c$  (levenza di raggio) non attraversa da alcuna corrente,  $I_{\text{int}} = \phi$ , per cui  $B = \phi$

$\Rightarrow$

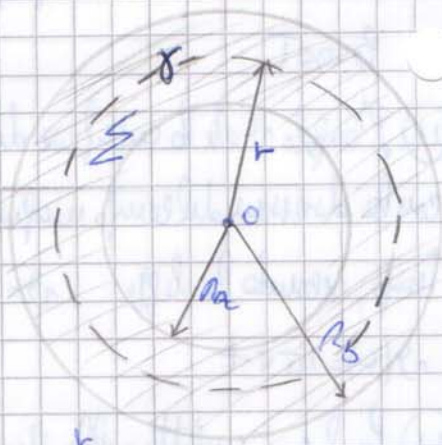


25) Il modulo del campo di induzione magnetica  $B$  per  $R_a < r < R_b$  vale:

56

$B = \frac{\mu_0 \cdot I_{conc}}{2\pi r}$  individua una porzione  $\Sigma$ , circolare e concentrica alle altre, di raggio  $r$ .

Considera la superficie  $\Sigma$  come la sezione del cilindro compreso tra le superfici di raggio  $R_a$  e di raggio  $r$ . Voglio calcolare l'intensità di corrente attraverso  $\Sigma$ , che è in sostanza il flusso delle densità di corrente  $J_1$  attraverso di esse:



$$I_{conc} = \int_{\Sigma} J_1 d\Sigma \quad \left| \begin{array}{l} d\Sigma = dr \cdot 2\pi r \\ J_1 \text{ costante} \end{array} \right. \Rightarrow I_{conc} = J_1 \cdot \int_{\Sigma} d\Sigma = J_1 \cdot 2\pi \int_{R_a}^r r dr = J_1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot [r^2]_{R_a}^r = J_1 \cdot \pi (r^2 - R_a^2)$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot J_1 \cdot \pi \cdot (r^2 - R_a^2)}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2r} \cdot J_1 (r^2 - R_a^2)$$

26) Il modulo del campo di induzione magnetica  $B$  per  $R_b < r < R_c$  vale:

Utilizzando la tecnica precedente:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_{conc}}{2\pi r} \quad I_{conc} = I_{conc}(\Sigma_1) + I_{conc}(\Sigma) \quad \left| \begin{array}{l} \Sigma_1 \rightarrow \text{sezione compresa tra le superfici di} \\ \text{raggio rispettivamente } R_a \text{ e } R_b \\ \Sigma \rightarrow \text{sezione compresa tra le superfici di} \\ \text{raggio } R_b \text{ ed } r \end{array} \right.$$

$$I_{conc}(\Sigma_1) = J_1 \cdot \int_{R_a}^{R_b} 2\pi r dr = J_1 \cdot 2\pi \cdot \int_{R_a}^{R_b} r dr = J_1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (R_b^2 - R_a^2)$$

$$= J_1 \cdot \pi \cdot (R_b^2 - R_a^2)$$

$$I_{conc}(\Sigma) = J_2 \cdot \int_{R_b}^r 2\pi r dr = J_2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot [r^2]_{R_b}^r = J_2 \cdot \pi \cdot (r^2 - R_b^2)$$

$$I_{conc} = J_1 \cdot \pi (R_b^2 - R_a^2) + J_2 \cdot \pi \cdot (r^2 - R_b^2) = \pi [J_1 (R_b^2 - R_a^2) + J_2 (r^2 - R_b^2)]$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_{conc}}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2r} \cdot \pi [J_1 (R_b^2 - R_a^2) + J_2 (r^2 - R_b^2)] = \frac{\mu_0}{2r} \cdot [J_1 (R_b^2 - R_a^2) + J_2 (r^2 - R_b^2)]$$

27) Supponendo ora che i vettori  $J_1$  e  $J_2$  abbiano verso opposto, affinché il campo di induzione magnetica  $B$  risulti sempre nullo per  $r > R_c$ , il rapporto tra i moduli delle densità di



Concentri  $j_1$  due eliche:

57

$$|\vec{B}|_{\text{Tot}} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot j_1 \cdot (\pi) \cdot (R_b^2 - R_c^2) + \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot (\pi) \cdot (R_c^2 - R_b^2) \quad |\vec{B}|_{\text{Tot}} = \frac{\mu_0}{2r} \cdot j_1 (R_b^2 - R_c^2) + \frac{\mu_0}{2r} \cdot j_2 (R_c^2 - R_b^2)$$

$$\Rightarrow |\vec{B}|_{\text{Tot}} = 0 \Rightarrow \frac{\mu_0}{2r} \cdot j_1 (R_b^2 - R_c^2) = \frac{\mu_0}{2r} \cdot j_2 (R_c^2 - R_b^2) \Rightarrow j_1 (R_b^2 - R_c^2) = j_2 (R_c^2 - R_b^2)$$

$$\left| \begin{array}{l} R_b = 2 \cdot R_c \\ R_c = 3 \cdot R_c \end{array} \right| \Rightarrow j_1 [(2R_c)^2 - (R_c)^2] = j_2 [(3R_c)^2 - (2R_c)^2] \Rightarrow j_1 \cdot 3R_c^2 = j_2 \cdot (9R_c^2 - 4R_c^2)$$

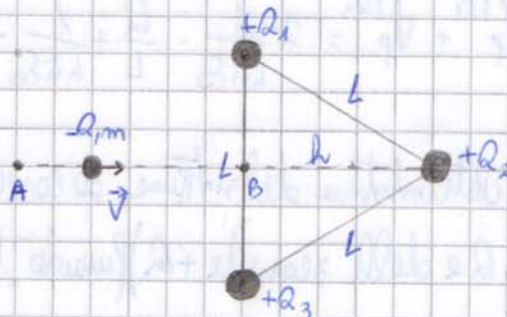
$$\Rightarrow 3j_1 = 5j_2 \Rightarrow j_1 = \frac{5}{3} j_2 \Rightarrow \frac{j_1}{j_2} = \frac{5}{3}$$

Problema n°6

Velocità delle cariche:  $+Q$

$$l_{AB} = L \quad \overline{AB} = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 28) Campo elettrostatico prodotto dalle sole cariche positive nel punto B e modulo:



$$\vec{E}_B = \sum_i \vec{E}_B^{(Q_i)} \quad \text{Le cariche si trovano} \quad E_B^{(Q_1)} = E_B^{(Q_3)} \quad (\text{moduli sono pari numerici}) \quad \vec{E}_B = \vec{E}_B^{(Q_2)}$$

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{3} \quad E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\frac{3L^2}{4}} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3L^2} = \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L^2}$$

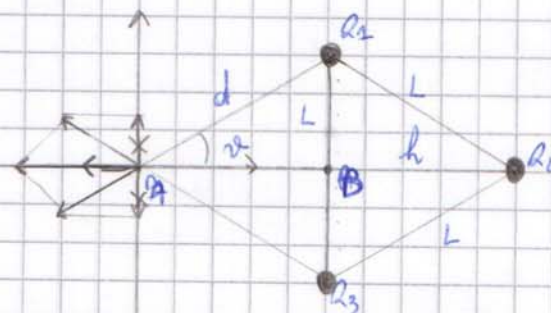
- 29) Campo elettrostatico prodotto dalle sole cariche positive nel punto A e: orientato verso sinistra, diretto come le rette che passano per i punti A e B.

- 30) Campo elettrostatico prodotto dalle sole cariche positive nel punto A e modulo:

$$E_y = 0 \quad (\text{numerici}) \quad E_x = |E| \cdot \cos(\alpha)$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{3L^2}{4}} = L$$

$$|E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L^2} \quad |E_x|^{(Q_1)} = |E| \cdot \cos(\alpha)$$



$$\left| \frac{L\sqrt{3}}{2} = L \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |E_x|^{(Q_1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(\frac{L\sqrt{3}}{2} + \frac{L}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{(L\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3L^2}$$

$$|E_x|^{(Q_1)} = |E_x|^{(Q_3)} \quad |E_x|^{(Q_2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(h + \overline{AB}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(\frac{L}{2}\sqrt{3} + \frac{L}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{(L\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3L^2}$$



$$|E_x|_{tot} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3L^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3L^2} = 3 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3L^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L^2}$$

58

31) Il potenziale elettrostatico prodotto dalle tre cariche positive nel punto A (vedi:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad (\text{potenziale generato da una carica puntiforme a distanza } r)$$

$$V_p^{1Q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L} \quad V_p^{1Q_2} = V_p^{1Q_1}$$

$$V_p^{1Q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{(L+AB)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L\sqrt{3}}$$

$$V_p^{tot} = 2 \cdot V_p^{1Q_1} + V_p^{1Q_3} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L\sqrt{3}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L} \cdot \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

32) L'energia elettrostatica del sistema di cariche (che è computata dalle cariche  $-Q$  e delle 3 cariche  $+Q$ ) facendo le cariche  $-Q$  e fissate in A (vedi



Es. n° 1

- ① In presenza del solo cavo coassiale, per  $r < r_{int}$ , il modulo del campo magnetico ha espressione:  
 Possi applicare il th di Ampere ad una linea chiusa come una circonferenza concentrica di raggio  $r$ , per cui vale:

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \cdot i_{conc} \quad | \quad i_{conc} = \int_S dS = J \cdot \pi r^2$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = J \cdot \pi r^2 \cdot \mu_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2}$$

- ② In presenza del solo cavo coassiale, per  $r_{int} < r < r_{ext}$ , il modulo del campo magnetico ha espressione:

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \cdot i_{conc} \quad | \quad i_{conc} = \int_S dS = J \cdot \pi r_{int}^2 \Rightarrow B \cdot 2\pi r = J \cdot \pi r_{int}^2 \cdot \mu_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot r_{int}^2}{2r}$$

- ③ In presenza del solo cavo coassiale, per  $r > r_{ext}$ , il modulo del campo magnetico ha espressione:

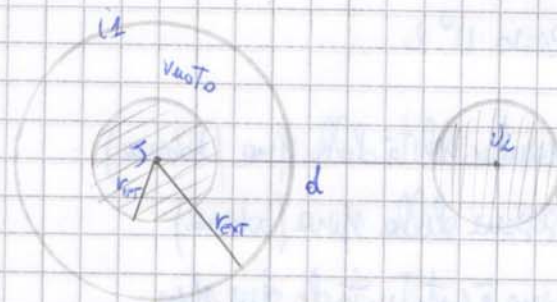
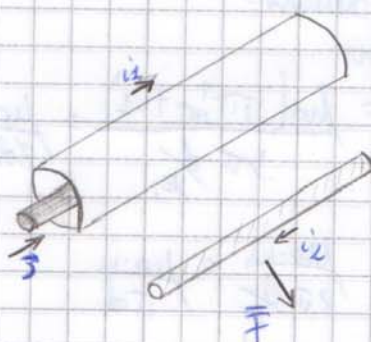
$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \cdot i_{conc} \quad | \quad i_{conc} = \int_S dS + i_2 = (J \cdot \pi r_{int}^2 + i_2) \cdot \mu_0 \Rightarrow B = \frac{(J \cdot \pi r_{int}^2 + i_2) \cdot \mu_0}{2\pi r}$$

- ④ Le forze tra il cavo coassiale ed il filo concentrico  $i_2$  è repulsive. Lo deriva dal fatto che, essendo il campo magnetico entrante nel piano del filo, facendo  $\vec{n}$  la normale al prodotto vettoriale  $\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$  ( $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ ), il vettore risultante è diretto nella direzione repulsiva,  $\perp$  al piano individuato da  $d\vec{l}$  e  $\vec{B}$  (vedi fig.).

- ⑤ Le forze per unità di lunghezza sul filo percorso da corrente  $i_2$  ha espressione:

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{I_2 \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}}{L} = \frac{I_2 \cdot \vec{L} \cdot B \cdot \sin(\theta)}{L} = i_2 \cdot B = \mu_0 \cdot \frac{(J \cdot \pi r_{int}^2 + i_2) \cdot i_2}{2\pi r}$$

- ⑥ In presenza di entrambi i fili, il modulo del campo magnetico è dato da  $\frac{1}{2}$  del centro del cavo coassiale vale:





I campi magnetici generati dai due correnti hanno stessa direzione e verso (entrante nel piano del foglio), per cui vanno sommati:

60

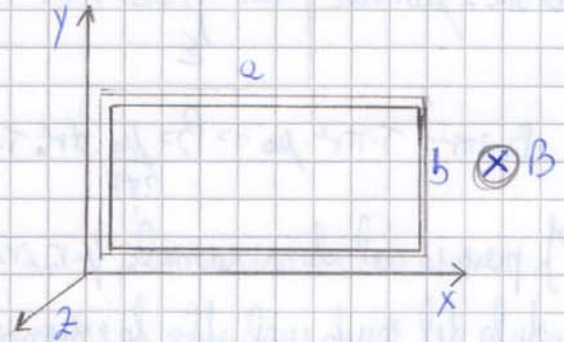
$$B(d/2) = \frac{\mu_0 (I_{\text{INT}} + I_1)}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0}{\pi d} \cdot I_{\text{INT}} + \frac{\mu_0}{\pi d} \cdot I_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_{\text{INT}}}{d} + \frac{\mu_0 I_1}{\pi d}$$

$$B(d/2) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d} + \frac{\mu_0 \cdot I_{\text{INT}}}{d} + \frac{\mu_0 I_1}{\pi d} = \frac{\mu_0 \cdot I_{\text{INT}}}{\pi d} + \frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{\pi d}$$

Esercizio n° 2

- $\sigma \rightarrow$  conducibilità della spina (bobina)
- $A \rightarrow$  sezione della spina (bobina)
- la bobina è costituita da due spine
- $\vec{B} = K \cdot x \cdot t^2 \cdot \hat{z}$  ( $K$  costante)



7) La resistenza totale della bobina vale:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \left| \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{\sigma} \\ L = 4a + 4b \end{array} \right. \Rightarrow R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{4(a+b)}{A}$$

8) Il flusso del campo magnetico attraverso una spina vale:

$$\Phi_B(S, t) = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a K \cdot x \, dx \int_0^b dy \cdot t^2 = K \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^a \cdot [y]_0^b \cdot t^2 = K \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot b \cdot t^2$$

9) Le fem indotte nella bobina ha modulo:

$$\text{fem} = - \frac{d}{dt} \Phi_B(S, t) \quad \Phi_B(S, t) = 2 \cdot \Phi_B(S, t) = 2 \cdot K \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot b \cdot t^2 = K \cdot a^2 \cdot b \cdot t^2$$

$$\text{fem} = - K \cdot a^2 \cdot b \cdot \frac{d}{dt} (t^2) = - K \cdot a^2 \cdot b \cdot 2t = - 2 \cdot K \cdot a^2 \cdot b \cdot t$$

10) La corrente indotta nella bobina ha intensità:

$$i_{\text{ind}} = \frac{\text{fem}}{R} = \frac{2 K a^2 b t}{\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{4(a+b)}{A}} = \frac{\sigma A \cdot K a^2 b t}{2(a+b)}$$



11) Le potenze dissipate nelle bobine le esprimiamo:

61

$$P_{diss} = I^2 \cdot R = \left[ \frac{\sigma A k e b t}{2(e+b)} \right]^2 \cdot \frac{\mu}{\sigma} \frac{(e+b)}{A} = \frac{\sigma^2 A^2 k^2 e^4 b^2 t^2}{4(e+b)^2} \cdot \frac{\mu(e+b)}{\sigma A} = \frac{\sigma A k^2 e^4 b^2 t^2}{4(e+b)}$$

12) L'energia dissipata nelle bobine dopo un tempo  $t = t^*$ :

$$P = \frac{dE}{dt} \quad dE = P dt \Rightarrow E = \int_0^{t^*} P dt = \int_0^{t^*} \frac{\sigma A k^2 e^4 b^2 t^2}{4(e+b)} dt = \frac{\sigma A k^2 e^4 b^2}{4(e+b)} \cdot \frac{1}{3} t^{*3}$$

13) Il momento magnetico delle bobine le esprimiamo:

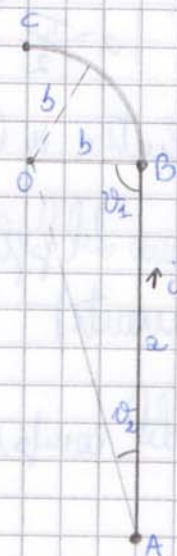
$$\mu = I \cdot S \quad (S = 2 \cdot (e \cdot b)) \quad \mu = I_{ms} \cdot 2eb \quad \text{il segno è negativo (-) in quanto il verso del campo magnetico è uscente (varrebbe una entrata in verso entrante, ma la  $i_{ms}$  si oppone e toglie verso)}$$

Esercizio n° 3

$$a = 10 \text{ cm} \quad b = 2 \text{ cm} \quad d = 1 \text{ mm} \quad \rho_{Ag} = 1,59 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\rho_{Al} = 1,67 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \quad V = V_A - V_C = 10 \text{ mV}$$

10) Rispetto ai capi A e C, le resistenze dei due tratti di filo, AB e BC, sono in serie (sono attraversati dalla stessa corrente, posti in sequenza)



15) Le resistenze del filo (AB + BC) val:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \quad R^{(AB)} = R^{(AB)} + R^{(BC)} \quad R^{(AB)} = \rho_{Ag} \cdot \frac{AB}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \rho_{Ag} \cdot \frac{a}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1,59 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2} \cdot 10}{\frac{3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{4}} = 20,254 \cdot 10^{-4} \Omega$$

$$R^{(BC)} = \rho_{Al} \cdot \frac{BC}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \rho_{Al} \cdot \frac{2\pi b}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1,67 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi}{\frac{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{4}} = 6,68 \cdot 10^{-4} \Omega$$

$$R^{(tot)} = R^{(AB)} + R^{(BC)} = (20,254 + 6,68) \cdot 10^{-4} \Omega = 26,93 \cdot 10^{-4} \Omega \approx 2,69 \text{ m}\Omega$$

16) La corrente che circola nel filo la indichiamo:

$$I = \frac{P_{em}}{R} = \frac{(V_A - V_C)}{R} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ V}}{2,69 \cdot 10^{-3} \Omega} \approx 3,71 \text{ A}$$



(17) Calcolo magnetico nel punto O dovuto alle correnti che escono nel tratto di filo AB le modulo:

62

Camp magnetico generato da un filo finito:  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$  <sup>(Filo)</sup>

nel nostro caso:  $R=b$   $\theta_1=90^\circ$   $\alpha = \overline{OA} \cdot \cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{\alpha}{\overline{OA}}$   $\overline{OA} = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} \approx 10,2 \cdot 10^{-2}$   
 $\cos\theta_2 = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{10,2 \cdot 10^{-2}} \approx 0,98 \Rightarrow |B| = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \cdot (0 + 0,98) \approx 18,2 \mu T$

(18) Calcolo magnetico nel punto O dovuto alle correnti che escono nel tratto di filo BC le modulo:

Camp magnetico generato da un filo a forma di arco di circonferenza, che finisce nel centro O, nel suo centro.

$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \alpha$   $\left| \begin{array}{l} R=b \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow |B| = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot b} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3,7 A}{4\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(\frac{3,14}{2}\right) \approx 29,2 \mu T$  <sup>circ.</sup>

(19) Calcolo magnetico in O generato dalle correnti nel filo  $(\vec{AB} + \vec{BC})$  e:

Perpendicolare al piano del filo, con verso uscente (chiusura la mano dx nel verso di percorrenza delle correnti)

(20) Il modulo del camp magnetico in O generato da tutto il filo  $(\vec{AB} + \vec{BC})$  (corrente di):

$|B|_{\text{tot}} = |B|_{\text{filo}} + |B|_{\text{circ.}} = 18,2 \mu T + 29,2 \mu T \approx 47,4 \mu T$

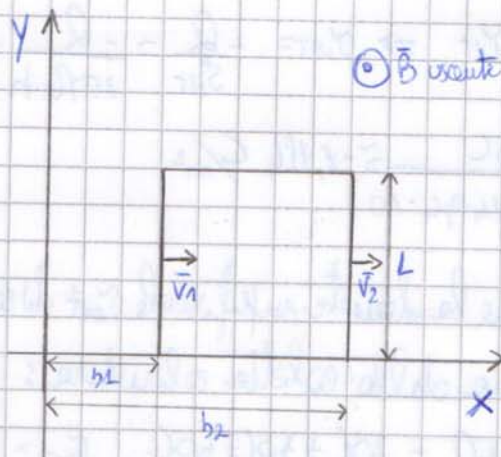


Problema n° 4

$$B(x,y) = k \cdot x^2 \cdot \hat{n} \quad L = 40 \text{ cm}$$

$$v_1 = 3 \text{ m/s} \quad v_2 = 5 \text{ m/s} \quad K = 0.2 \text{ T/m}^2$$

$$R = 50 \Omega$$



(21) Flusso del campo magnetico nella spira:

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{v_1 t}^{L+v_2 t} L \cdot k \cdot x^2 dx = K \cdot L \cdot \int_{v_1 t}^{L+v_2 t} x^2 dx =$$

$$\Rightarrow K \cdot L \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{v_1 t}^{L+v_2 t} = K \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot [(L+v_2 t)^3 - v_1^3 t^3] = K \cdot L \cdot \frac{1}{3} \cdot (L^3 + v_2^3 t^3 + 3L^2 v_2 t + 3L v_2^2 t^2 - v_1^3 t^3)$$

(22) La fem indotta nella spira vale:

$$\begin{aligned} \text{fem} &= \frac{1}{dt} (\Phi_B(t)) = \frac{1}{3} K \cdot L \cdot \frac{1}{dt} (L^3 + v_2^3 t^3 + 3L^2 v_2 t + 3L v_2^2 t^2 - v_1^3 t^3) = K \cdot L \cdot \frac{1}{3} (3v_2^3 t^2 + 3L^2 v_2 + 6L v_2^2 t - 3v_1^3 t^2) \\ &= K \cdot L \cdot (v_2^3 t^2 + v_2 L^2 + 2L v_2^2 t - v_1^3 t^2) \end{aligned}$$

(23) Il modulo della corrente indotta nella spira, al tempo  $t = 5 \text{ s}$ , vale:

$$\begin{aligned} I_{\text{ind}} &= \frac{\text{fem}}{R} = \frac{0.2 \cdot 0.4 \cdot (125 \cdot 5^2 + 5 \cdot (0.4)^2 + 2 \cdot 0.4 \cdot 25 \cdot 5 - 27 \cdot 5^2)}{50} = \frac{0.08 \cdot (3125 + 0.32 + 100 - 675)}{50} \\ &= 4.08 \approx 4.1 \text{ A} \end{aligned}$$

(24) La corrente indotta nella spira circola in verso orario (il flusso è crescente, il campo fornisce una corrente in verso antiorario).

(25) La conduttanza  $G$  della spira vale:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{50 \Omega} = 0.02 \text{ S}$$

Problema n° 5

$$h = 10 \text{ cm} \quad R_1 = 10 \Omega \quad Q = 30 \text{ C} \quad h = 10 \text{ cm} \quad R_2 = 40 \Omega \quad R_3 = 50 \Omega \quad Q' = 30 \text{ C}$$

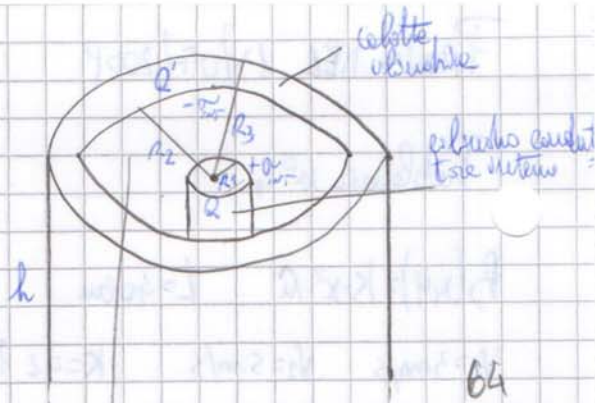
$h \gg R_1, R_2, R_3 \Rightarrow$



- 26) Calcolare la densità superficiale  $\sigma_{int}$  di carica sulle superfici interne delle bobine cilindriche:

$$Q_{int} = -Q \Rightarrow \sigma_{int} = \frac{-Q}{S_{int}} = \frac{-Q}{2\pi R_2 h}$$

$$= \frac{-30C}{2 \cdot 3,14 \cdot 9,4 \cdot 10} \approx -1,184 \text{ C/m}^2$$



- 27) Calcolare la densità superficiale  $\sigma_{ext}$  di carica sulle superfici esterne delle bobine cilindriche:

$$Q_{ext} = Q' + Q = 30C + 30C = 60C \quad \sigma_{ext} = \frac{Q_{ext}}{S_{ext}} = \frac{60C}{2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 9,5} \approx 1,11 \text{ C/m}^2$$

Carica per la bobina interna  
Carica per la bobina esterna

- 28) Calcolare il modulo del campo elettrostatico a distanza  $r = 7 \text{ cm}$  dall'asse del dispositivo:  
 $r = 7 \text{ cm} < R_1$ , perciò siamo all'interno del conduttore cilindrico, e perciò  $E = 0$

- 29) Calcolare il modulo del campo elettrostatico a distanza  $r = 20 \text{ cm}$  dall'asse del dispositivo:

Solo la superficie cilindrica di raggio  $r$  dove  $r = 20 \text{ cm}$ . Vali:

$$\varphi_B(r) = \int E \cdot dr \rightarrow E \cdot r = E \cdot 2\pi r \cdot h \quad \varphi_B(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0 r} \cdot \frac{Q}{h}$$

$$E = \frac{1}{6,28 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2} \cdot \frac{30C}{111,156} = \frac{30}{111,156} \cdot 10^{12} = 9,2698 \cdot 10^{12} \frac{N}{C} \approx 2,7 \cdot 10^{12} \frac{N}{C}$$

- 30) Calcolare il modulo del campo elettrostatico a distanza  $r = 48 \text{ cm}$  dall'asse del dispositivo:

Per  $r = 48 \text{ cm}$  siamo all'interno del secondo conduttore, perciò  $E = 0$ .

### Problema n° 6

Si consideri un anello isolante filiforme con raggio  $R_1$  che poggia sul piano xy con il centro posto nell'origine del sistema di riferimento. L'anello è distribuito in modo uniforme una carica elettrica positiva con densità  $\lambda$ . Un secondo anello, concentrico al primo e avente raggio  $R_2 > R_1$  è uniformemente carico con densità lineare costante  $\lambda$ . Si suppone che gli anelli siano in grado di ruotare liberamente intorno all'asse z con



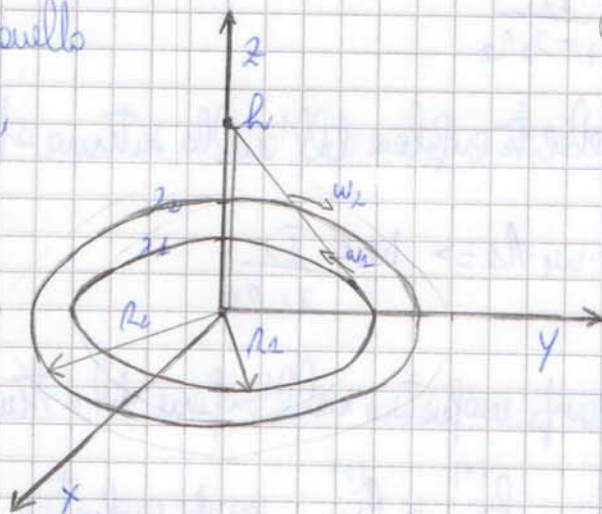
relate e gli altri  $w_1$  e  $w_2$  nel semispazio. Considerando due vetti fm, si calcolano  
il valore del campo elettrico  $E$ , di flusso dei due vetti, ed una distanza  $h$  dell'origine del  
sistema di riferimento lungo l'asse  $z$ :

⑤) Campo elettrico generato uniformemente dall'anello esterno, nel punto centrale  $h$  dell'anello interno, lungo l'asse  $z$  vale:

Comp elettrostatico generato da un cello  
carico nel futuro del mio ex:

$$E_{\text{null}} = \frac{\lambda}{4\epsilon_0} \cdot \frac{R \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$|E|_{\text{ext}}^{\text{all.}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot h}{(R_2^2 + h^2)^{3/2}}$$



③ Il valore del pteusale prodotto indipendentemente dall'angolo interno, nel fatto, lungo l'asse  $z$ , è costante h dell'originale:

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r} \quad \left| \begin{array}{l} r \rightarrow \text{distanza discreta} \text{ da un punto di linea dell'anello} \\ \text{dal punto e distanza } h \text{ dall'origine} \end{array} \right.$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_L}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad V_p = \int_{\text{null}} dV_p = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_L}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cdot ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_L}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$= \int_{\text{null}} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda_L}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R \lambda_L}{2\epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Le consideriamo ora: due anelli in rotazione a velocità angolari costanti  $\omega_1$  e  $\omega_2$  attorno all'altro intorno all'asse  $z$ , come indicato in figura e non dipende dalle seguenti domande:  
(suff.: sapendo che  $I = \frac{dL}{dt}$ , moltiplicando per l'elemento di linea  $dl$ , si sente immediatamente  
che  $I$  in funzione delle velocità angolari e delle densità di massa):

$$\underline{I} = \frac{dI}{dt} \Rightarrow \underline{I} = 2 \cdot v$$

(3<sup>a</sup>) La frequenza di estensione  $f_2$  dell'incella esterna applicata esso produce una corrente  $i_{ext}$



a  $I_2$  è:

$$w = 2\pi f \quad I = r \cdot v \Rightarrow I_2 = r_2 \cdot v_2 \quad | \quad v_2 = w_2 \cdot r_2 \Rightarrow I_2 = r_2 \cdot w_2 \cdot r_2 \Rightarrow I_2 = r_2 \cdot 2\pi f_2 \cdot r_2$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{I_2}{2\pi r_2 r_2}$$

66

(34) Le velocità angolari dell'anello interno e quello esterno producono una corrente  $I_1$  verso

$$I_1 = r_1 \cdot w_1 \cdot r_1 \Rightarrow w_1 = \frac{I_1}{r_1 \cdot r_1}$$

(35) Il campo magnetico nell'origine del sistema di riferimento è:

$$B_{(0)}^{\text{Tot}} = B_{(0)}^{(1)} - B_{(0)}^{(2)} \quad \text{Camp magnetico generato da un'anello attraverso la corrente } i, \text{ nel suo centro: } B = \frac{\mu_0 I \cdot (2\pi r)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B_{(0)}^{\text{Tot}} = \frac{\mu_0 I_1}{2 \cdot r_1} - \frac{\mu_0 I_2}{2 \cdot r_2} = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{r_2} \right) = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(I_1 r_2 - I_2 r_1)}{r_1 r_2}$$

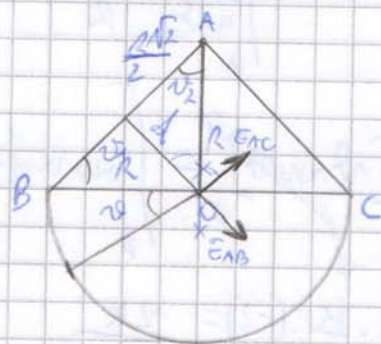


Problema n° 3:

$\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  cariche  $\overline{AB} \Rightarrow +Q = +1C$   
 $\overline{BC} \Rightarrow -Q = -1C$

uniformemente cariche, con  $\lambda = kR$ ,  $k = 1C/m$

$R = 2m$



67

(14) La densità di carica lineare del tratto  $\overline{AB}$  vale:

$\lambda_1 = \frac{+Q}{AB}$   $AB = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R^2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{Q}{R\sqrt{2}} = \frac{1C}{2 \cdot \sqrt{2}} \approx 0,35C/m$

(15) Il campo elettrostatico nel punto O dovuto al tratto  $\overline{AB}$  con carica  $Q$  ha modulo pari a:

Campo elettrostatico generato da una filo finito, uniformemente carico:  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{d}$

$d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2 - R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$   $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{d} \cdot [\cos(45^\circ) + \cos(45^\circ)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{0,35}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{0,35}{3,14 \cdot 4 \cdot 8,85} \cdot 10^{12} \approx 0,03148$

(16) Il campo elettrostatico nel punto O, dovuto ai due tratti rettilinei  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , ha componente orizzontale pari a:  $\approx 3,18 \times 10^8 \frac{N}{C}$

(17) Il campo elettrostatico nel punto O, dovuto ai due tratti rettilinei  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , ha componenti orizzontale e verticale pari a:

$E_{AB}^{(x)} = |E_{AB}| \sin(\frac{\pi}{4}) = 3,18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,24859 \frac{N}{C} \cdot 10^8$   $E_{AB}^{(x)} = E_{AC}^{(x)} \Rightarrow E_x = 2 \cdot E_{AB}^{(x)} = 2 \cdot 2,24859 \approx 4,49718 \frac{N}{C} \cdot 10^8$

(18) La carica posseduta dalla semicirconferenza vale:

$Q_{semicirca} = \int_{-\pi}^0 \lambda dl = \int_{-\pi}^0 kR \cdot R d\varphi = kR \int_{-\pi}^0 R d\varphi = kR \cdot \left[\frac{R\varphi^2}{2}\right]_{-\pi}^0 = -kR \cdot \frac{\pi^2}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi^2 = -\frac{\pi^2}{4} \approx -2,4674 \frac{N}{C} \cdot 10^8$

(19) Il campo elettrostatico prodotto dalla semicirconferenza nel punto O ha componenti orizzontale e verticale pari a:

$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{kR \cdot R d\varphi}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{kR d\varphi}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{kR}{R} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot kR d\varphi$



$$E_x = \int dE_x = \int_{\phi}^{\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot r \cos\theta dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot \int_{\phi}^{\pi} r \cos\theta dr \quad \left| \begin{array}{l} f(r)=r \quad f'(r)=1 \\ g(\theta)=\cos\theta \quad g'(\theta)=-\sin\theta \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I = \left[ \frac{r^2 \cos\theta}{2} \right]_{\phi}^{\pi} - \int_{\phi}^{\pi} r \sin\theta dr = - \left[ \frac{r^2 \sin\theta}{2} \right]_{\phi}^{\pi} = \cos(\pi) - \cos(\phi) = -2$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot (-2) = \frac{-2K}{4\pi\epsilon_0 R}$$

② Campo elettrostatico prodotto dalla semicirconferenza nel punto O la componente orizzontale verso sinistra per e:

$$dE_y = |d\vec{E}| \cdot \sin(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot r \sin\theta dr \quad E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot \int_{\phi}^{\pi} r \sin\theta dr$$

$$I \rightarrow \left| \begin{array}{l} f(r)=r \quad f'(r)=1 \\ g(\theta)=\sin\theta \quad g'(\theta)=\cos\theta \end{array} \right.$$

$$I = \left[ -\frac{r^2 \cos\theta}{2} \right]_{\phi}^{\pi} - \int_{\phi}^{\pi} r \cos\theta dr = - \left[ \frac{r^2 \sin\theta}{2} \right]_{\phi}^{\pi} = - \left[ \frac{r^2 \cos(\pi)}{2} - \frac{r^2 \cos(\phi)}{2} \right] = +1 \cdot \pi = \pi$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot \pi = \frac{K\pi}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Problema n° 4

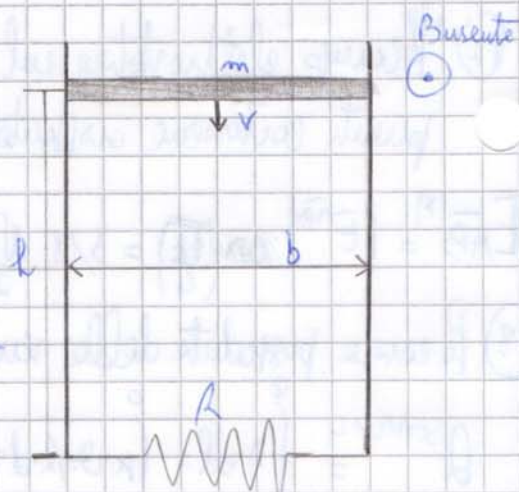
~~Un conduttore~~  $B=2T$   $b=1m$   $v=3m/s$   $R=1\Omega$

① La forza elettromotrice indotta nel circuito mobile, in modulo:

$$\mathcal{E}_{em} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad d\Phi = B \cdot dS = B \cdot b \cdot dy \Rightarrow dy = v \cdot dt$$

$$d\Phi = B \cdot b \cdot v \cdot dt \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot b \cdot v$$

$$\mathcal{E}_{em} = B \cdot b \cdot v = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6V$$



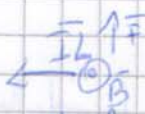
② La corrente I ha verso antiorario (in questo caso B sarebbe un vettore in senso orario, se B fosse un vettore in senso orario, la forza elettromotrice indotta nel circuito mobile, in modulo, sarebbe la stessa, ma il verso della corrente indotta sarebbe opposto, il che significa che la corrente indotta nel circuito mobile sarebbe in senso orario).



(23) La forza  $F$  che si genera sulle sbarrette fuore da circuito si muove nel campo magnetico  $B$  che in modulo:

69

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} \quad I = \frac{V}{R} = \frac{5V}{1\Omega} = 5A \quad L \perp B, \quad F = I L \cdot B = 5A \cdot 1m \cdot 2T = 10N$$

(24) La forza  $F$  che si genera verso:  $I \vec{L} \times \vec{B}$ :   $\vec{F}$  è diretta verso l'alto, perpendicolare al piano individuato da  $I$  e  $B$

(25) Affinché la sbarretta resti a velocità costante, la mano della sbarretta deve valere:

$$\sum F_{ext} = m \vec{a} \Rightarrow \sum F_{ext} = 0 \quad -m \cdot g + F_H = 0 \Rightarrow -m \cdot 9.8 + 10N = 0$$

$$\frac{m \cdot 9.8 = 10}{9.8} \Rightarrow$$

$$m = \frac{10N}{9.8 m/s^2} = 1.02 kg$$



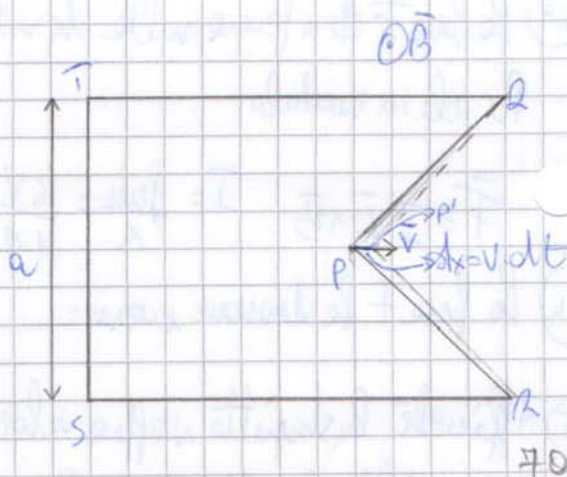
PROVA DEL 18/01/2010

Problema n°1

$$a = 50 \text{ cm}$$

$$b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad R_0 = 2 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$v = 5 \text{ m/s}$$



- ① fem indotta = ? ② Indotta (modulo e verso) = ?  
③ Potenza necessaria per mantenere  $v$  in  $t$  costante = ?

① fem indotta:  $f_{em} = -\frac{d\phi}{dt} \quad d\phi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot v dt \cdot \frac{e}{2} \rightarrow$  area del triangolo  $PQ$

$$d\phi = b \cdot dS = b \cdot \frac{e}{2} v dt = \frac{e v b}{2} dt \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{e v b}{2} = \frac{0,5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{2} = 3,75 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

② Indotta:  $I_{em} = \frac{f_{em}}{R} = \frac{3,75 \cdot 10^{-5} \text{ V}}{2 \cdot 10^{-3} \Omega} = \frac{3,75 \cdot 10^{-5} \text{ V}}{2 \cdot 10^{-3} \Omega} = 1,875 \cdot 10^{-2} \text{ A} \approx 18,75 \text{ mA}$   
(verso orario)

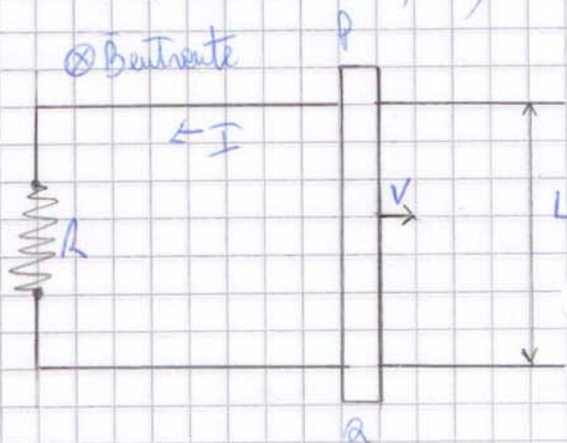
③ Potenza necessaria a mantenere  $v$  costante:

$$P = i^2 \cdot R_0 = (18,75)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 351,56 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 703,125 \cdot 10^{-9} \text{ W} = 0,703 \mu\text{W}$$

Problema n°2

$$B = 1 \text{ T} \quad R = 2 \Omega \quad L = 50 \text{ cm} \quad I = 0,5 \text{ A}$$

- ① Velocità assoluta di  $v$  affinché nel circuito non ci sia corrente di intensità originale  $I$ :



$$I = \frac{f_{em}}{R} \quad f_{em} = \frac{d\phi}{dt} \quad d\phi = B \cdot dS = b \cdot L \cdot dx = B \cdot L \cdot v \cdot dt \Rightarrow f_{em} = \frac{d\phi}{dt} = B \cdot L \cdot v$$

$$I = \frac{B \cdot L \cdot v}{R} \Rightarrow v = \frac{I \cdot R}{B \cdot L} = \frac{0,5 \text{ A} \cdot 2 \Omega}{1 \text{ T} \cdot 0,5} = 2 \text{ m/s}$$

- ② Calcolo della forza magnetica (modulo, direzione e verso) agente sulla sbarretta:

$$\vec{F}_m = I \vec{L} \times \vec{B} \quad \vec{L} \perp \vec{B} \quad |\vec{F}_m| = I \cdot L \cdot B = 0,5 \text{ A} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 1 \text{ T} = 0,25 \text{ N}$$



$\vec{F}_m$  è antiparallela a  $\vec{v}$



③ Calcolo della potenza che occorre fornire alla sberleffante una costante:

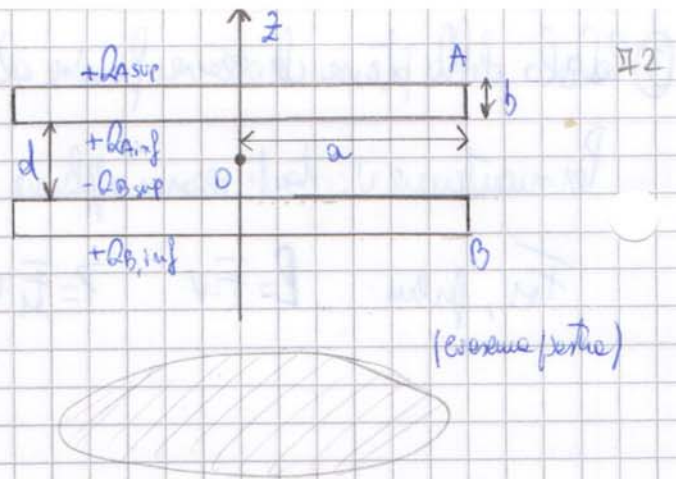
Per mantenere  $v$  costante occorre applicare una forza  $F$  uguale ed opposta alla forza resistiva

$$F_{res}, \text{ freni: } P = F \cdot v \quad P = F_H \cdot v = 0,25 \text{ N} \cdot 2 = 0,5 \text{ W}$$



Es. n° 2: PROVA DEL 17/02/2002

piastre conduttrici di forme irregolare  
spesso  $a$  spessore  $b$  distanza  $d$   
b, d < a



carica +Q somministrata alla parte A.

(9) La carica  $Q_{A,sup}$  vale:

La carica +Q somministrata alla parte A si distribuisce uniformemente sulle superficie esterne della piastra. Considerando che la piastra è irregolare, la carica si distribuisce sulle superfici  $Q_{A,sup}$  e  $Q_{A,inf}$  e sulle superfici laterali. Una prima può essere trascurata dato che lo spessore  $b$  è molto minore rispetto allo spessore  $a$  della piastra. Per cui la carica +Q si distribuisce solo tra le superfici superiore e inferiore, uguali, quindi:

$$Q_{A,sup} = \frac{Q}{2} = Q_{A,inf} \quad (\text{risposta 10})$$

(11) La carica  $Q_{B,sup}$  vale:

Sulla parte B la carica netta totale è nulla. Vi è però una carica indotta sulle superficie  $Q_{B,sup}$  superiore dovuta alla presenza della carica  $Q_{A,inf}$  e cui si oppone. Per la carica indotta  $Q_{B,sup}$  è uguale, in modulo, alla carica  $Q_{A,inf}$ , ma di segno opposto:

$$Q_{B,sup} = -Q_{A,inf} = -\frac{Q}{2}$$

(12) La carica  $Q_{B,inf}$  vale:

La carica  $Q_{B,inf}$  indotta solo in modulo pari a  $Q_{B,sup}$ , ma di segno opposto, tale che la carica netta della parte B è nulla:

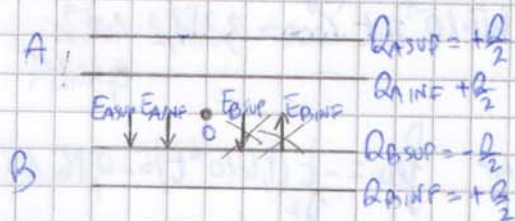
$$Q_{B,inf} = -Q_{B,sup} = +\frac{Q}{2}$$

(13)  $E_{comp}$  elettrico nel punto O dell'asse z equidistante dalle due piastre. Le direzioni dell'asse  $z$  e verso opposto ad esso.  $E_{tot}$  è il risultato delle sovrapposizioni degli effetti. È facile calcolare  $E_{comp}$  in O come la somma dei vettori comp generati dalle cariche.



della carica di eccesso superficiale sulle due condutture:

73



quindi, ci sono solo due contributi al  $E_{\text{totale}}$  in O, entrambi diretti verso il basso (dato il segno delle cariche)

(14) Il camp elettrico nel p.to O dell'asse  $z$  equidistante dalle due lastre ha modulo:

Per il discorso fatto nel p.to precedente, basta considerare solo 2 contributi di camp, entrambi dello stesso modulo, dato dal camp elettrostatico generato da un piano infinito uniformemente carico (dato che  $a \gg d$ ):

$$E = \frac{E_{\text{piano}}}{2} = \frac{\frac{Q}{2}}{2\epsilon_0 \cdot \pi r^2} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E_0 = 2 \cdot E_{\text{piano}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

(15) Il valore assoluto della d.d.p. tra le lastre A e B vale:

$$V_A - V_B = - \int_A^B E \cdot dl = - \int_A^B \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} = + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \int_A^B dl = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cdot d = \frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

(16) La forza risultante sulle lastre A ha:

~~direzione~~ verso dell' modulo  $\phi$

Esercizio n° 3

Un anello di alluminio (raggio  $R = 5,00 \text{ cm}$  e resistenza  $3 \cdot 10^{-4} \Omega$ ) circonda un solenoide ideale, vuoto, molto lungo, costituito da  $n = 1000 \text{ spire/m}$ , di raggio  $3 \text{ cm}$ , come mostrato in figura. La corrente  $i$  nel solenoide aumenta con la velocità di  $270 \text{ A/s}$ .

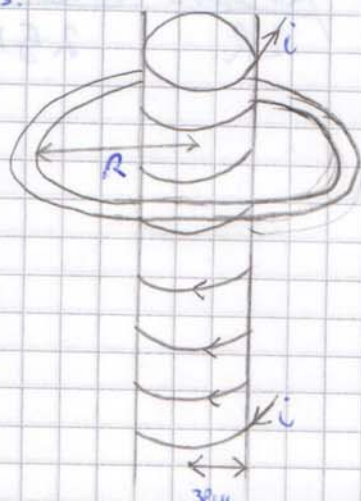
Si trascuri il fenomeno della mutua induzione.

(17) Il camp magnetico all'interno del solenoide ha modulo:

$$B_s = \mu_0 \cdot n \cdot i \quad (\text{camp magnetico all'int. di un solenoide})$$

(18) Il valore assoluto delle f.e.m. indotte nell'anello vale:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d}{dt} \Phi_B(s, t) \Rightarrow \Phi_B(s, t) = \int_s B \cdot ds$$





$$B = \mu_0 I n \Rightarrow \frac{I}{\Delta t} = \frac{270 \text{ A}}{5} \quad I \cdot \Delta t = 270 \text{ A} \cdot (\Delta t) \quad \frac{I}{(\Delta t)} = 270 \text{ A} \cdot (\Delta t) \quad t_0 = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I}{\Delta t} = 270 \cdot t_f = 270 t \quad B = \mu_0 \cdot 270 t \cdot 1000 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 270 \cdot 1000 = 331,2 \cdot 10^{-4} \text{ T} = 9,34 \text{ mT}$$

$$\Psi_B(t) = B(t) \cdot S = 9,34 t \cdot \pi \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad \mathcal{E}_{\text{em}} = - \frac{d\Psi_B}{dt} = -0,96 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

(1P) Le corrente indotte nell'anello è:

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{em}}}{R} = \frac{0,96 \cdot 10^{-3} \text{ V}}{3 \cdot 10^{-4} \Omega} \approx 0,32 \cdot 10^2 \approx 3,2 \text{ A}$$

(2) L'espressione del campo magnetico al centro dell'anello, prodotto delle corrente indotte nell'anello è:

$$\text{Camp magnetico generato da una spira piana del raggio, nel suo centro: } B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$I \rightarrow i_{\text{ind}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{\text{ind}}}{2R}$$

(2.1) Il campo magnetico al centro dell'anello prodotto dalla corrente indotta nell'anello è:

diretto come l'asse del solenoide, verso il basso. Lo è perché in quanto la corrente indotta, essendo il flusso crescente, ha verso opposto a quella che circola nel solenoide. Ricordando invece che nel verso delle corrente indotte, il polo è posto verso il basso.

(2.2) Il modulo del campo magnetico al centro dell'anello prodotto dalla corrente indotta nell'anello ha modulo:

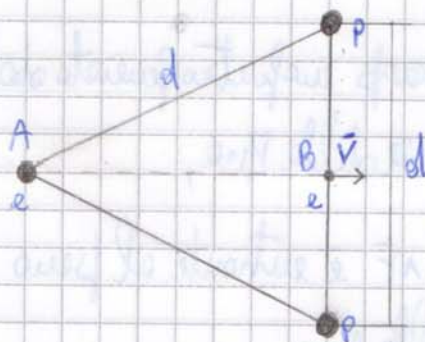
$$B = \frac{\mu_0 I_{\text{ind}}}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3,2 \text{ A}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \approx 4,01 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



Esercizio n° 1 -

$$|q| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$d = 1 \text{ cm}$$



- ① Nel punto A il potenziale elettrico statico generato dai due protoni vale, rispetto all'infinito dove è nullo:

$$V_A^{\text{Tot}} = V_A(P_1) + V_A(P_2) \quad V_A(P_1) = V_A(P_2) = V_P \quad V_A^{\text{Tot}} = 2 \cdot V_P \quad V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{d} \quad V_A^{\text{Tot}} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{d} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d}$$

- ② Nel punto B l'ampiezza potenziale dell'elettrone vale, rispetto all'infinito dove è nullo:

$$U_B = V_B \cdot q_e \quad V_B^{\text{Tot}} = 2 \cdot V_B(P) \quad V_B(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d/2} \Rightarrow V_B^{\text{Tot}} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d/2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0 d}$$

$$U_B = q_e \cdot V_B^{\text{Tot}} = -e \cdot \frac{1}{\pi\epsilon_0 d} = -\frac{P^2}{\pi\epsilon_0 d}$$

- ③ Il lavoro fatto sull'elettrone, dal punto A al punto B, dal campo elettrico generato dai due protoni ha espressione:

$$L_{AB} = -\Delta U_{AB} = -(U_B - U_A) = +U_A + U_B$$

$$= \frac{P^2}{\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{P^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

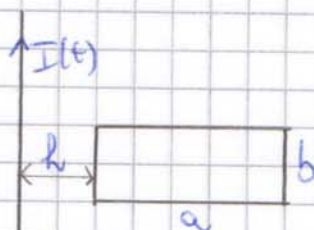
$$\begin{aligned} U_B &= -\frac{P^2}{\pi\epsilon_0 d} \\ U_A &= -P \cdot V_A = -\frac{P^2}{2\pi\epsilon_0 d} \end{aligned} \Rightarrow L_{AB} = \frac{P^2}{\pi\epsilon_0 d} - \frac{P^2}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{P^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

- ④ La velocità dell'elettrone nel punto B ha modulo:

$$L_{AB} = \Delta K \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_B^2 = \frac{P^2}{2\pi\epsilon_0 d} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{P^2}{\pi\epsilon_0 d} \cdot \frac{1}{m_e}} \approx 318 \text{ m/s}$$

Esercizio n° 2:

$$I(t) = \alpha t \quad R \rightarrow \text{resistenza totale della spira}$$



- ⑤ Il campo magnetico generato dal filo a distanza r da esso ha modulo:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \left( \frac{\mu_0 \cdot L \cdot t}{2\pi r} \right) \quad [\text{legge di Biot-Savart}]$$

76

⑥ Il comp magnetico generato dal filo nel piano della spira e, in ogni punto della superficie della spira,

ideale e tangente al piano del filo, opposto alla spira individuata dal filo e dalla spira

⑦ Il flusso del comp magnetico generato dal filo, attraverso la spira ad un istante  $t$  vale, in modulo:

$$\Phi_B(s) = \int_S B \cdot d\vec{s} \Rightarrow d\vec{s} = b \cdot dx \quad B = \frac{\mu_0 I t}{2\pi x} \Rightarrow \int_S B \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I t \cdot b}{2\pi} \int_h^{e+h} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I t \cdot b}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{e+h}{h} \right| = \frac{\mu_0 I t \cdot b}{2\pi} \cdot \ln \left| 1 + \frac{e}{h} \right|$$

⑧ Le fem indotte nella spira vale, in modulo:

$$|fem| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I \cdot b}{2\pi} \ln \left| 1 + \frac{e}{h} \right|$$

⑨ Le corrente indotte nella spira vale:

$$I_{ind} = \frac{fem}{R} = \frac{\mu_0 I \cdot b}{2\pi} \ln \left| 1 + \frac{e}{h} \right| \cdot \frac{1}{R} = \frac{\mu_0 I \cdot b}{2\pi R} \ln \left| 1 + \frac{e}{h} \right|$$

⑩ Le  $I_{ind}$  nella spira circola in verso: Anticlockwise



Esercizio n° 3:

resistente



(1) Carica totale del filo:

$$Q_{TOT} = 2 \cdot Q^{(RETT)} + Q^{(ARCO)} \quad Q^{(RETT)} = 2 \cdot R \quad Q^{(ARCO)} = 2 \cdot \left( \frac{1}{4} \pi R \right) = \frac{2 \cdot \pi R}{2} \quad Q_{TOT} = 2 \cdot 2 \cdot R + \frac{2 \cdot \pi R}{2} = 2R \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right)$$

(2) Potenziale di tutto il filo rispetto all'infinito:

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad V_p^{(RETT)} = \int_{\text{segmento retto}} dV_p \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{2R} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{2R}{R} \right| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln(2)$$

$$V_p^{(ARCO)} = \int_{\text{arco}} dV_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\text{arco}} ds \Rightarrow ds = R \cdot d\alpha \Rightarrow V_p^{(ARCO)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$V_p^{TOT} = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln(2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( 2 \ln(2) + \frac{\pi}{2} \right)$$

(3) Energia potenziale elettrostatica della carica Q in P:

$$U_p = Q \cdot V_p = Q \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( 2 \ln(2) + \frac{\pi}{2} \right)$$

Es. n° 4 per volta in prove precedenti