

PROVA DEL 13/06/2006 - COMPITO A

Esercizio n° 1

Un filo di materiale isolante, con densità di carica lineare λ costante, viene piegato fino ad assumere la forma mostrata in figura. (la parte circolare ha raggio R e forma un arco con angolo al centro di $\frac{3}{2}\pi$, i due tratti rettilinei sono entrambi di lunghezza L). Calcolare il potenziale elettrico nel punto P e l'energia elettrostatica delle cariche puntiformi Q .

λ costante $\rightarrow Q = \lambda L$

$$L = 2 \cdot R + \frac{3}{2}\pi R = R \left(2 + \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$Q = \lambda R \left(2 + \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dr}{r} \Rightarrow V_p = \int_R^{2R} dV_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{2R} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{2R}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$$

$$V_p \left(\text{Totale da entrambi i br.} \right) = 2 \cdot V_p = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2$$

Calcolo di V_p dovuto al tratto piegato:

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R} \quad V_p = \int_{\text{filo piegato}} dV_p = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R} \quad \begin{matrix} dl = R d\varphi \\ l \rightarrow \varphi & \varphi \rightarrow \varphi \\ l \rightarrow L & \varphi \rightarrow \frac{3}{2}\pi \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} R d\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{2}\pi \right)$$

Calcolo dell'energia elettrostatica delle cariche Q ponendo ∞ parte nel punto P , w.p. ∞ dove ∞ è nullo.

$$U_p = Q \cdot V_p = Q \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2 + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{2}\pi \right) \right) = Q \cdot \left[\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \ln 2 + \frac{3}{2}\pi \right) \right]$$

Esercizio n° 2

Tre cariche di uguale valore Q e uguale segno sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L , come in figura. Valori numerici: $Q = 10^{-4} \text{ C}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$

\Rightarrow

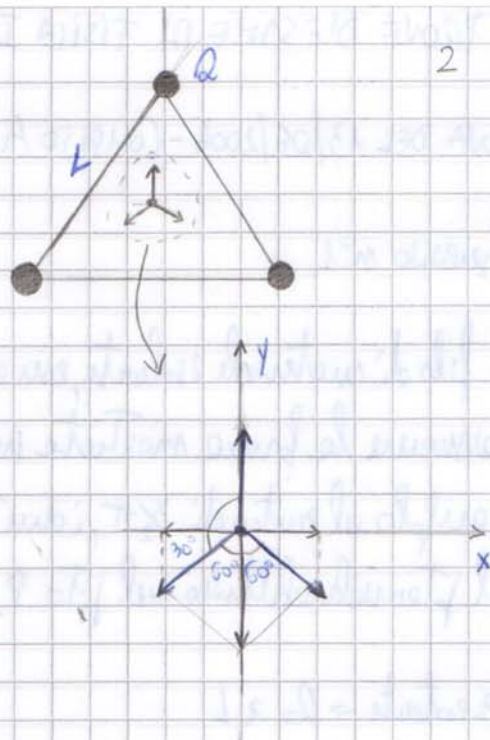
① Modulo del camp. elettrico al centro del triangolo:

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il modulo del camp. elettrico al centro del triangolo è pari alla somma dei campi generati da ciascuna carica al vertice, scomponendo le espressioni lungo gli assi cartesiani (vedi fig. in basso).

$$\text{per } y: |E| \cdot \hat{y} = 2 \cdot |E| \cdot \cos(60^\circ) \cdot \hat{y} = |E| \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |E| = \phi$$

$$\text{per } x: |E| \cdot \hat{x} - |E| \cdot \hat{x} = \phi$$

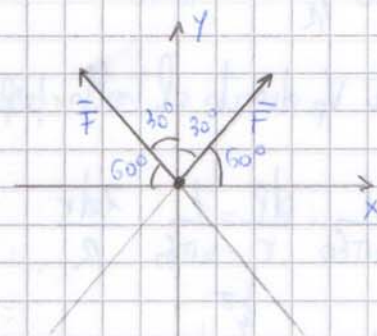
$$|E| = \phi \text{ al centro del triangolo}$$



② Modulo delle forze esercitate su una delle Tre cariche delle altre due cariche:

Calcolo prima il modulo delle forze generate da una carica su un'altra:

$$|\vec{F}_{aa}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q|^2}{L^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(10^{-4})^2}{(0,5)^2} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{10^{-8}}{0,25} = \frac{1}{111,16} \cdot \frac{10^4}{0,25} = \frac{1}{0,25} \cdot 10^4 \approx 3,58 \cdot 10^2$$



Anche in questo caso, le forze si scompongono lungo le componenti cartesiane; come in figura. Le cariche al vertice opposto fanno una forza elettrica uguale in modulo e opposta nella direzione. Lungo l'asse x le componenti sono uguali ed opposte, quindi si elidono. Lungo l'asse delle y si ha:

$$\vec{F}_y = 2 \cdot |F| \cdot \cos(30^\circ) \cdot \hat{y} = 2 \cdot 3,58 \cdot 10^2 \cdot \cos(30^\circ) \approx 6,22 \approx 6,23 \cdot 10^2 \text{ N}$$

③ Energia elettrostatica del sistema:

L'energia elettrostatica del sistema è: $U = -L_{\infty, c}$, dove c indica la posizione delle cariche nelle configurazioni finali. Nella pratica U è il lavoro compiuto

contro le forze del campo per portare le cariche nelle configurazioni finali. Tale lavoro può essere calcolato sommando i contributi dovuti al lavoro per spostare ciascuna carica dall'∞ alle posizioni definite:

3

- 1^a carica: per portare la 1^a carica da ∞ alla posizione ed un vertice non si esegue alcun lavoro contro forze elettrostatiche in quanto non è presente nessun'altra carica e quindi nessun campo elettrostatico che si oppone allo spostamento di essa.
- 2^a carica, fissate la prima: il lavoro per portare la 2^a carica dall'∞ al secondo vertice non è nullo in quanto vi è il campo elettrostatico generato dalla prima carica ed opposto allo spostamento.

$$U_{0,112} = -L_{0,112} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L}$$

- 3^a carica, fissate le prime due: il lavoro totale per portare la 3^a carica dall'∞ al Terzo vertice è la somma dei lavori dovuti ai campi che si oppongono allo spostamento, che sono quelli generati dalla prima e dalla seconda carica:

Contributo dovuto alla 1^a carica: $U_{0,113} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r_{13}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L}$

Contributo dovuto alla 2^a carica: $U_{0,223} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r_{23}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L}$

Infine, si sommano tutti i contributi:

$$U_{TOT} = -L_{TOT} = \left(+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} \right) = - \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$$

$$|U_{TOT}| = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = 3 \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{10^{-8}}{0,5} = \frac{1}{55,78} \cdot \frac{10^{-8}}{10^{-12}} \approx 3,017 \cdot 10^4 \approx 0,0537 \cdot 10^6$$

$$\approx 5,37 \cdot 10^4 \approx 5,4 \cdot 10^4 \text{ J}$$

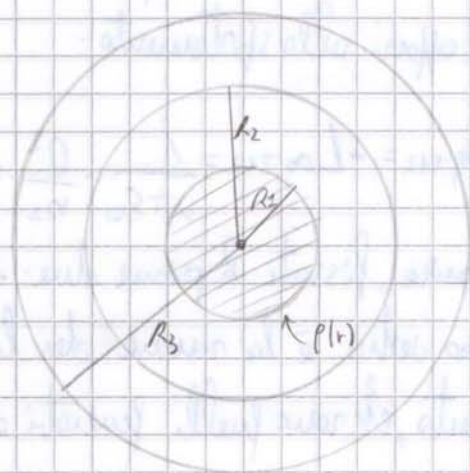
- ④ Lavoro necessario per portare le cariche dalle configurazioni iniziali ad una configurazione in cui le Tre cariche sono poste ai vertici di un Triangolo equilatero di lato $\frac{L}{2}$:

Questo lavoro può essere calcolato come la differenza di energie potenziali delle

comparazione fusile e fusile isolante: $L = U_{\frac{L}{2}} - U_L = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0(\frac{L}{2})} - \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\frac{L}{2}} - \frac{1}{L} \right) =$
 $= \frac{3 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,5} \right) = \frac{3 \cdot 10^4}{111,156} (4-2) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^4}{111,156} \approx 0,539 \cdot 10^4 \approx 5,4 \cdot 10^3$

Esercizio n° 3

Una sfera isolante di raggio R_1 porta una carica distribuita con simmetria sferica e con densità volumica variabile con la distanza dal centro della sfera $\rho(r) = \alpha \cdot r^2$. Un conduttore sferico cavo concentrico alla sfera di raggio R_1 , avente raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 , ha una carica totale nulla:



① Carica totale della sfera isolante:

$$Q_{TOT} = \int_{sfera} \rho(r) \cdot dV = \int_0^{R_1} \alpha \cdot r^2 \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = 4\pi\alpha \int_0^{R_1} r^4 \cdot dr$$

$$\Rightarrow Q = 4\pi\alpha \cdot \frac{1}{5} \cdot [r^5]_0^{R_1} = \frac{4\pi\alpha \cdot R_1^5}{5}$$

② La carica indotta sulla superficie interna del conduttore vale:

$$Q_{i1} = - \frac{4\pi\alpha \cdot R_1^5}{5}$$

③ La carica indotta sulla superficie esterna del conduttore vale:

$$Q_{e2} = \frac{4\pi\alpha \cdot R_1^5}{5}$$

④ Campo elettrico nello spazio vuoto tra la sfera e il guscio sferico conduttore, come funzione della distanza dal centro, vale:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi\alpha \cdot R_1^5}{5r^2} = \frac{\alpha \cdot R_1^5}{5\epsilon_0 r^2}$$

N.B.: il campo elettrostatico si calcola come se la carica Q fosse interamente concentrata nel centro della sfera

⑤ Campo elettrico all'interno della sfera isolante, ad una distanza $R_1/2$ dal centro vale:

Carica interna alla spira di raggio $\frac{R_1}{2}$:

5

$$Q_{int} = \frac{\mu \pi d}{5} \cdot \left(\frac{R_1}{2}\right)^5 = \frac{\mu \pi d \cdot R_1^5}{5 \cdot 2^5} = \frac{\mu \pi d \cdot R_1^5}{160} = \frac{\pi d \cdot R_1^5}{40}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{\mu \pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q_{int}}{\left(\frac{R_1}{2}\right)} = \frac{1}{\mu \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\pi d \cdot R_1^5}{\frac{R_1^2}{4} \cdot 40} = \frac{1}{\mu \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\mu \pi d \cdot R_1^3}{R_1^2 \cdot 40} = \frac{d \cdot R_1^3}{\epsilon_0 \cdot 40}, \text{ radiale}$$

n.b.: Anche in questo caso \vec{E} si comporta come se le cariche fossero interamente concentrate nel centro della spira.

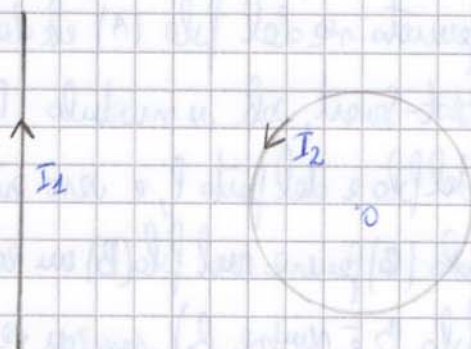
Esercizio 4

Nelle figure il conduttore rettilineo indefinito è percorso da una corrente I_1 , ed è
 Tracce nello stesso piano delle spire circolari percorsi da una corrente I_2 . Le spire
 di raggio R è poste in modo che il centro delle spire dista una distanza $d > R$ dal
 filo. I versi delle correnti sono indicati in figure:

a) le linee del campo magnetico generato dal filo
 rettilineo percorso da corrente verso:

- Concentriche concentriche al filo, con verso antiorario se osservate dall'alto.

Per riscontrare ciò, si basterà riflettere dai punti
 attorno al filo e vedere le linee di campo in tali
 punti.



- Il campo magnetico generato dalle spire al centro della spira è diretto:

con verso uscente dal piano del filo. Per riscontrare ciò basterà applicare le regole della
 mano destra (pochissime le mano con le dita dritte nel verso della corrente I_2 e vedere la
 direzione del pollice)

- Il campo magnetico totale al centro delle spire vale:

Per ottenere il campo magnetico totale al centro delle spire bisogna sommare i campi
 generati in quel punto dal filo rettilineo e dalle spire stesse:

$$B_0^{(f)} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi d} \quad \left(\begin{array}{l} \text{verso uscente} \\ \text{dal piano del filo} \end{array} \right)$$

$$B_{TOT} = \frac{\mu_0 I_2}{2R} - \frac{\mu_0 I_1}{4\pi d} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{I_2}{R} - \frac{I_1}{\pi d} \right)$$

$$B_0^{(s)} = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2R} \quad \left(\begin{array}{l} \text{verso uscente} \\ \text{dal piano del filo} \end{array} \right)$$

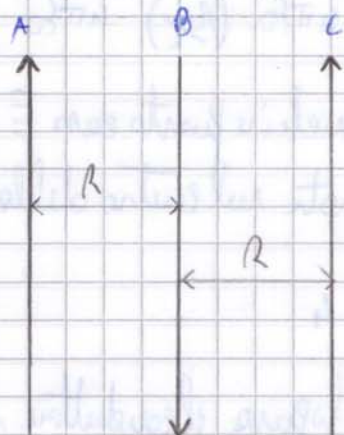
Tre fili rettilinei infiniti e paralleli si trovano a distanza R l'uno dall'altro, come in figura. I fili sono percorsi da correnti di uguale intensità I , i cui versi sono mostrati in figura. Rispondere ai seguenti problemi:

- ① Il modulo delle forze per unità di lunghezza che agisce sul filo centrale sarà:

Le forze agite su un filo finito percorso da corrente, ed immerso in un campo magnetico sono:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$$

Nel calcolo delle forze per unità di lunghezza avremo: $\frac{\vec{F}}{L} = \frac{I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}}{L} = \vec{I} \wedge \vec{B}$, $\vec{I} \perp \vec{L}$



Per prima cosa, quindi, è importante calcolare il campo magnetico agito sul filo centrale (B) generato sia dal filo (A) che dal filo (C). Il filo (A) genera un campo che, per la legge di Biot-Savart, solo in modulo $B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, con direzione tangenziale al perno individuato dal filo e dal punto P, e verso entrante nel perno del filo.

Il filo (C) genera sul filo (B) un campo magnetico uguale in modulo (la distanza risp. al filo B è sempre R), ma con verso opposto, quindi uscente dal perno del filo.

Il campo Totale risulta quindi nullo: $B_{\text{Tot}}^{(B)} = 0$

Di conseguenza, anche le forze agite sul filo risultano nulle: $\vec{F} = 0$

- ② Il modulo delle forze Totali per unità di lunghezza che agisce in ciascuno dei fili esterni sarà:

Anche in questo caso è importante calcolare il campo magnetico generato dagli altri due fili (in particolare dalle correnti che vanno in essi) nel filo esterno. Prendiamo in considerazione il filo (A) e calcoliamo il campo magnetico agito su di esso. $B_{\text{Tot}}^{(A)}$ (campo mag. Totale su A) è poi la somma dei campi prodotti su A dai fili B e C. Con il filo, per la legge di Biot-Savart, rispettivamente:

$$B_B^{(A)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \text{ (con verso entrante al perno del filo)} \quad B_C^{(A)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \text{ (con verso$$

uscite del polo del foglio)

Creando i campi nelle stene diverse, ma con verso opposto, sono sempre (algebraicamente) sinodali

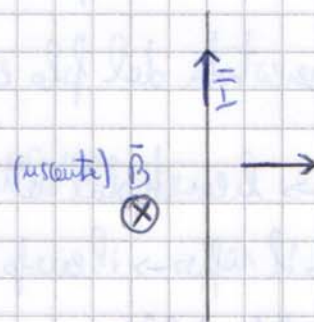
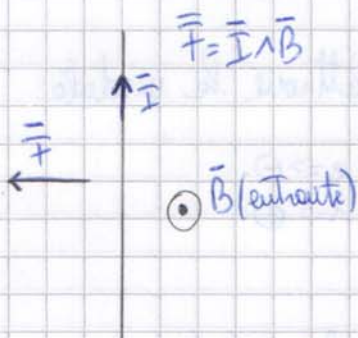
h: $B_{\text{Tot}}^{(A)} = B_{(B)}^{(A)} - B_{(C)}^{(A)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} - \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} = \frac{2\mu_0 \cdot I - \mu_0 \cdot I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R}$, con verso entrante nel polo del foglio

Una volta calcolato il campo Totale, possiamo calcolare le forze che esso esercita sul filo (A):

$$\left| \frac{\vec{F}}{L} \right| = \left| \vec{I} \wedge \vec{B} \right| = |\vec{I}| |\vec{B}| \cdot \sin(\alpha) \xrightarrow{1(\alpha=90^\circ)} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4\pi R}$$

③ La direzione delle forze totali che agisce sui fili esterni è:

Per determinare la direzione delle forze agenti sui fili esterni basterà applicare la regola della mano destra sul prodotto vettoriale tra la direzione delle correnti e quella del campo magnetico. Sul filo (A) si ha: sul filo (C) si ha:



Quindi le coppie di forze, sulle bobine, è una forza repulsiva, che spinge le bobine e spinge i fili verso l'esterno.

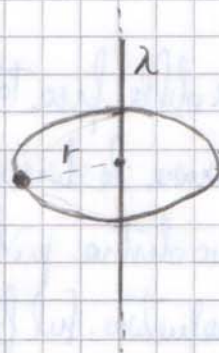
(A x C)

Esercizio n° 1

Un elettrone di carica $e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e di massa $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ orbita attorno a un filo rettilineo indefinito uniformemente carico, con densità di carica $\lambda = 10^{-9} \text{ C/m}$. Sapendo che l'orbita è una circonferenza di raggio $r = 0,1 \text{ m}$ ortogonale al filo, e che il filo passa per il centro della circonferenza, calcolare il periodo e rispondere ai seguenti problemi:

- ① Il campo elettrico generato dal filo carico, a distanza r , ha modulo:

$$\begin{aligned}
 |\vec{E}| &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{camp. elettrostatico generato da un filo} \\ \text{rettilineo indef. unif. carico} \end{array} \right) \\
 &= \frac{10^{-9}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 10^3 \cdot \frac{1}{5,558} \approx 0,179 \cdot 10^3 \approx 179,8 \text{ V/m}
 \end{aligned}$$



- ② La forza esercitata dal filo carico positivamente sull'elettrone ha modulo:

Attrattiva \rightarrow le cariche dell'elettrone e del filo sono opposte $e \rightarrow \ominus$
 $\lambda \rightarrow \oplus$

Poiché lungo il raggio \rightarrow il campo elettrico è radiale

- ③ La forza esercitata dal filo carico positivamente sull'elettrone ha modulo:

$$|\vec{F}| = q_e |\vec{E}| = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 179,8 \text{ V/m} \approx 287,68 \cdot 10^{-19} \text{ N} \approx 2,88 \cdot 10^{-17} \text{ N}$$

- ④ Note ω la velocità angolare dell'elettrone, la forza centripeta responsabile del moto circolare uniforme dell'elettrone vale, in modulo:

$$\vec{F} = m \cdot a_c \Rightarrow a_c = \frac{v^2}{r} \quad | \quad v = \omega r \Rightarrow a_c = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

- ⑤ La velocità angolare dell'elettrone vale:

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = 2,88 \cdot 10^{-17} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2,88 \cdot 10^{-17}}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{2,88}{9,11} \cdot 10^{-14}} = 10^7 \cdot 1,778 \approx 1,78 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$$

- ⑥ Il periodo di rotazione dell'elettrone vale:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{1,78 \cdot 10^7} \approx 3,528 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Esercizio n° 2

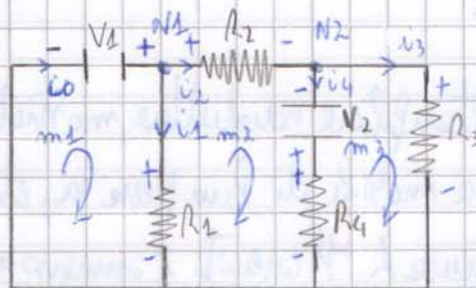
9

Calcolare la potenza dissipata nelle resistenze R_2 e la potenza erogata dai generatori V_1 e V_2 nel circuito mostrato in figura:

Valori numerici: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = R_4 = 25 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $V_1 = 40 \text{ V}$, $V_2 = 12 \text{ V}$.

Rispondere quindi ai seguenti problemi:

Prima di rispondere ai problemi, risulta utile applicare le leggi di Kirchhoff per calcolare le correnti nei rami del circuito.



Il circuito è costituito da 3 nodi e 3 anelli.

Scevo quindi $3-1=2$ equazioni di Kirchhoff alle correnti, per i nodi $N1$ ed $N2$, e le tre equazioni di Kirchhoff alle tensioni agli anelli $m1$, $m2$ e $m3$; risolvendo infine, il sistema e separando le incognite:

$$\begin{cases} \text{Kkt}(m1): V_1 + i_1 \cdot R_1 = 0 \\ \text{Kkt}(m2): i_2 \cdot R_2 - V_2 + i_4 \cdot R_4 - i_1 \cdot R_1 = 0 \\ \text{Kkt}(m3): i_3 \cdot R_3 - i_4 \cdot R_4 + V_2 = 0 \\ \text{Kcl}(N1): i_0 - i_1 - i_2 = 0 \\ \text{Kcl}(N2): i_2 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 40i_1 - 10 = 0 \Rightarrow i_1 = 4 \text{ A} \\ 25i_2 + 25i_4 - 40 = 12 \Rightarrow 25i_2 + 25i_4 = 52 \\ 5i_3 - 25i_4 = -12 \\ i_0 - i_2 = 4 \Rightarrow i_0 = 4 + i_2 \\ i_2 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = 4 \text{ A} \\ i_0 = 4 + i_2 \\ 25i_2 + 25i_4 = 52 \\ 5i_3 - 25i_4 = -12 \\ i_2 - i_3 - i_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = 4 \text{ A} \\ i_0 = 4 + i_2 \\ 25i_2 + 25i_4 + 25i_4 = 52 \\ 5i_3 - 25i_4 = -12 \\ i_2 = i_3 + i_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{25i_3}{25} = \frac{52 - 50i_4}{25} \Rightarrow i_3 = \frac{52}{25} - 2i_4 \\ 5 \left(\frac{52}{25} - 2i_4 \right) - 25i_4 = -12 \\ i_2 = i_3 + i_4 \\ i_0 = 4 + i_2 \\ i_1 = 4 \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3 = \frac{52}{25} - 2i_4 \\ \frac{52}{5} - 10i_4 - 25i_4 = -12 \\ i_2 = i_3 + i_4 \\ i_0 = 4 + i_2 \\ i_1 = 4 \text{ A} \end{cases} \quad \begin{cases} i_3 = \frac{52}{25} - 2i_4 \Rightarrow i_3 = 2,08 - 2(0,64) \Rightarrow i_3 = 0,8 \text{ A} \\ -35i_4 = -12 - \frac{52}{5} \Rightarrow \frac{35i_4}{35} = \frac{27,4}{35} \Rightarrow i_4 = 0,64 \text{ A} \\ i_2 = i_3 + i_4 \Rightarrow i_2 = 0,8 + 0,64 = 1,44 \text{ A} \\ i_0 = 4 + i_2 = 4 + 1,44 = 5,44 \text{ A} \\ i_1 = 4 \text{ A} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$P_{R1}^{cor} = V_1 \cdot i_0 = 40V \cdot 5,44A = 217,66W$$

10

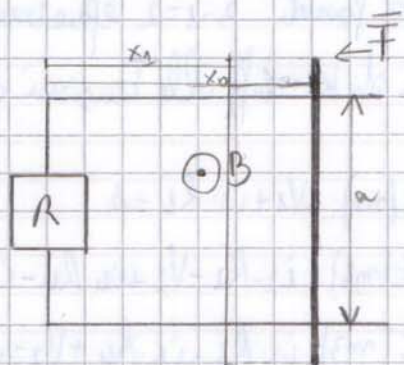
$$P_{R2}^{cor} = V_2 \cdot i_4 = 12V \cdot 0,64A = 7,68W$$

$$P_{R2}^{cor} = i_2^2 \cdot R_2 = (1,44)^2 \cdot 25 = 51,84W$$

Esercizio n° 3

Nel circuito rettangolare conduttore mostrato in figura, un lato è costituito da una sbarra conduttrice mobile, di lunghezza a , che può scorrere senza attrito. Nel circuito è presente una resistenza R . Il circuito è immerso in un campo magnetico di modulo B , uscente dal piano del foglio. Alla sbarra mobile è applicata una forza esterna \vec{F} verso sinistra.

Rispondere ai seguenti problemi:



- ① Le corrente indotta nel circuito scorre in verso antiorario (basta afferrare le estremità delle maniglie, chiudendo le dita verso sinistra, considerando il verso uscente del campo magnetico).

- ② Attraverso la velocità della sbarra mobile, la variazione del flusso del campo B attraverso il circuito nell'unità di tempo ha modulo:

$$\Delta \Phi_B (S, x_0 \rightarrow x_1) = \Phi_B (S, x = x_0) - \Phi_B (S, x = x_1) = B \cdot S_0 = B \cdot S_1 = B \cdot e \cdot x_0 - B \cdot e \cdot x_1 =$$

$$= B \cdot e \cdot (x_0 - x_1) \Rightarrow \frac{\Delta \Phi_B}{t} = \frac{B \cdot e \cdot (x_0 - x_1)}{t} \xrightarrow{v} \Rightarrow \frac{\Delta \Phi_B}{t} = B \cdot e \cdot v$$

- ③ Attraverso la velocità della sbarra mobile, la forza magnetica esercitata sulla sbarra (prende da eventi del campo magnetico B ha modulo:

$$f_{em} = \Delta \Phi_B = B \cdot e \cdot v \quad I_{ind} = \frac{B \cdot e \cdot v}{R} \quad \vec{F}_m = I \cdot \int d\vec{l} \times \vec{B} = I \cdot \vec{a} \times \vec{B}$$

$$|\vec{F}_m| = I \cdot e \cdot B \sin(\alpha) \Rightarrow |\vec{F}_m| = B \cdot e \cdot I \quad I = \frac{B \cdot e \cdot v}{R} \Rightarrow |\vec{F}_m| = B \cdot e \cdot \frac{B \cdot e \cdot v}{R} = \frac{B^2 \cdot e^2 \cdot v}{R}$$

- ④ La velocità della sbarra mobile vale:

$$\frac{B^2 \cdot e^2 \cdot v}{R} = 0,5 \Rightarrow \frac{25 \cdot 0,01}{1} \cdot v = 0,5 \Rightarrow v = 0,2 m/s$$

⑤ La fem indotta nel circuito ha modulo:

11

$$\mathcal{E}_{em} = \Delta \varphi_B(S) = B \cdot e \cdot V = 5 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ V}$$

⑥ La corrente indotta nel circuito ha modulo pari a:

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{em}}{R} = \frac{0,1 \text{ V}}{0,1 \Omega} = 1 \text{ A}$$

⑦ La potenza dissipata nella resistenza vale:

$$P_R^{diss} = \mathcal{E}_{em} \cdot I_{ind} = 0,1 \cdot 1 = 0,1 \text{ W}$$

⑧ Il lavoro per unità di tempo fatto dalle forze \vec{F} vale:

$$\frac{P \cdot \Delta E}{t} \quad L = \Delta E \quad \frac{L}{T} = \frac{\Delta E}{T} \Rightarrow \frac{L}{T} = P \Rightarrow \frac{L}{T} = 0,1 \text{ W}$$

Esercizio n° 1:

Un cavo cilindrico metallico cavo di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 viene caricato con una densità di carica lineare fissa $+2\lambda$. Lungo il cavo viene inserito un filo rettilineo nel cui è distribuita una densità di carica lineare fissa $+2\lambda$, in maniera da essere completamente circondato dal cilindro cavo.

Supponendo il sistema (filo + cilindro cavo) è immerso nel vuoto ed assumendo che esso sia sufficientemente lungo, determinare i valori delle grandezze richieste:

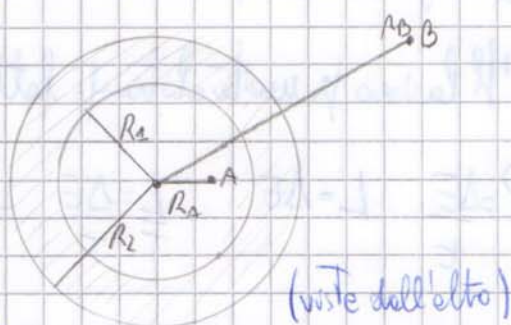
① La densità di carica lineare indotta sulle superficie interne del cilindro vale: -2λ .

(-2λ è l'opposto della densità di carica presente nel filo)

② La densità di carica lineare indotta sulle superficie esterna del cilindro cavo vale:

• sulle superficie esterna del cilindro cavo vi è sia la carica indotta da quelle presenti sulle superficie interne (di segno opposto), sia quella dovuta alla carica $+2\lambda$. In definitiva, risultando:

$$E_{ext} = 2\lambda + 2\lambda = 4\lambda$$



③ Il campo elettrostatico nelle regioni dove si compie Tra il filo ed il cilindro (vale per $R_1 < r < R_2$) è:

$$\vec{E}(r) = \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{che è il solo campo generato dal filo rettilineo lungo (infinito)} \\ \text{dato che le cariche lungo il cilindro} \end{array} \right)$$

④ Il campo elettrostatico nelle regioni dove si trova all'int. del conduttore cilindrico, vale $R_1 < r < R_2$, vale:

ϕ (il campo elettrostatico all'int. di un conduttore è sempre pari a 0)

⑤ Il campo elettrostatico nelle regioni dove si trova all'esterno del conduttore cilindrico (vale per $r > R_2$) vale:

$$E(r) = E_{filo} + E_{cil.} = \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{4\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

⑥ La differenza di potenziale $V_A - V_B$ è data dall'espressione:

13

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{r}, & r < R_1 \\ \phi, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{32}{2\pi\epsilon_0 r}, & r > R_2 \end{cases}$$

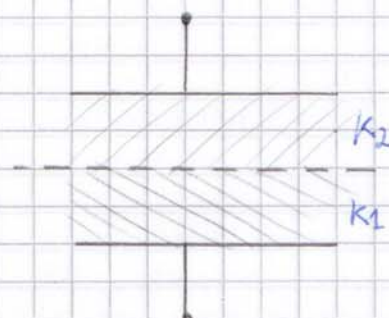
$$V_A - V_B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2}{2\pi\epsilon_0 r} dr + \phi + \int_{R_2}^{R_3} \frac{32}{2\pi\epsilon_0 r} dr =$$

$$= \frac{2}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{r} dr \right) = \frac{2}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right| + 3 \ln \left| \frac{R_3}{R_2} \right| \right)$$

Gli altri esercizi relativi a questo punto possono essere risolti analiticamente.

Esercizio n° 1:

Un condensatore è costituito da due lastre metalliche rettangolari, di area A , separate da una distanza d . Una metà della spina tra le lastre viene riempita con un dielettrico di costante dielettrica relativa K_1 , e l'altra metà con un dielettrico di costante dielettrica relativa K_2 . Trovare le espressioni in termini delle espressioni C_0 dello stesso condensatore vuoto. Rispondere, quindi, ai seguenti problemi:



① Le espressioni del condensatore vuoto vale:

$$C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (\text{espressione di un condensatore pieno})$$

$A \rightarrow$ area della armatura $d \rightarrow$ distanza fra le armature

② Le espressioni dei condensatori con due dielettrici vale:

$$K_1 \text{ e } K_2 \text{ sono tabele: } K_1 \cdot \epsilon_0 = \epsilon_1 \quad K_2 \cdot \epsilon_0 = \epsilon_2$$

Il condensatore può essere visto come un insieme di due condensatori collegati in serie, per cui le espressioni Totali vale:

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C_1 = K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2}, \quad C_2 = K_2 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2}$$

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{K_1 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2}} + \frac{1}{K_2 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2}} = \frac{K_2 + K_1}{K_1 \cdot K_2 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2}} \Rightarrow C_{\text{tot}} = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2}}{K_2 + K_1}$$

$$= \frac{2 K_1 \cdot K_2 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}{K_2 + K_1} \xrightarrow{C_0} = \frac{2 K_1 \cdot K_2}{K_2 + K_1} \cdot C_0$$

Esercizio n° 2:

Un solenoide di raggio $r=1\text{cm}$ e lunghezza $L=1\text{m}$ è costituito da 300 spire. Nel solenoide circola una corrente $i=i_0 + Kt$, con $i_0=1\text{A}$ e $K=1\frac{\text{A}}{\text{s}}$. Calcolare il flusso del campo magnetico \vec{B} attraverso il solenoide all'istante $t=1\text{s}$. Trovare l'autoinduzione. Rispondere ai seguenti problemi:

① Il modulo del campo magnetico all'interno del solenoide lo esprime:

$$n = \frac{N}{L} = \frac{3PP}{1} = 3PP \frac{\text{spire}}{\text{metri}}$$

$$|B| = \mu_0 \cdot I \cdot n = \mu_0 \cdot i(t) \cdot n = \mu_0 \cdot i(t) \cdot \frac{N}{L}$$

15

② Il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide ha espressione:

$$\Phi_B(S) \xrightarrow{S \rightarrow \text{sup. di una spira del solenoide}} = B \cdot S = B \cdot \pi r^2$$

(flusso attraversa una sola spira del solenoide)

$$\Phi_B(NS) \xrightarrow{\text{concatenazione delle } N \text{ spire}} = N \cdot \Phi_B(S) = B \cdot N \cdot \pi r^2$$

(flusso concatenato ad N spire)

③ Il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide ha valore:

$$\begin{aligned} \Phi_B(t=1s) &= \Phi_B(NS) \Big|_{t=1s} = B \cdot N \cdot \pi r^2 = \mu_0 \cdot i(1) \cdot \frac{N}{L} \cdot N \cdot \pi r^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot (3PP)^2 \cdot \pi \cdot (0,01)^2 \\ &= 4 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot 3PP^2 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 10^{-7} \approx 1,2557 \cdot 10^{-4} \approx 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Esercizio n° 3:

Due cariche puntiformi q esercita una forza repulsiva di modulo $F = 0,254 \text{ Nm}$ uno tratto in un punto carico distribuito infinitesimale $\sigma = +0,1 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$. Determinare il valore delle cariche q e ms prendere ai seguenti problemi:

① Il modulo delle forze tra le cariche q e lo stato carico ha espressione:

$$|\vec{F}| = p \cdot |\vec{E}| \quad \left| \begin{array}{l} \vec{E} \rightarrow \text{camp elettrostatico generato da un piano} \\ \text{infinito, uniformemente carico } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{array} \right.$$



$$|\vec{F}| = F = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot p$$

② Le cariche q vale:

$$F = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot p \Rightarrow \frac{2 \cdot \epsilon_0 \cdot F}{\sigma} = p \Rightarrow \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,254}{0,1 \cdot 10^{-6}} = p \Rightarrow q \approx 4,995 \cdot 10^{-6} \text{ C} \approx 5 \mu\text{C}$$

Esercizio n° 4

In un sistema di riferimento Oxyz, una spira piana di massa trascurabile, di resistenza complessiva $R = 10 \Omega$ e di lati $L = 1 \text{ m}$, paralleli agli assi y e z, si muove \Rightarrow

con velocità costante di modulo $v = 2 \frac{m}{s}$ nella direzione della y positiva. Nella regione è presente un camp magnetico che varia in funzione della posizione come $\vec{B} = K \cdot y \cdot \hat{x}$, con $K = 0,5 \frac{T}{m}$.
Determinare le correnti indotte nelle spine, per rispondere ai seguenti quesiti:

① Il modulo delle forze elettromotriche indotte le esponiamo:

$$\mathcal{E}_{em} = - \frac{1}{dt} \Phi_B(s) \quad (\text{legge di F-N-L})$$

Per due istanti in cui le spine introvono prima in posizione y_0 e poi in posizione y , la variazione del flusso del camp magnetico B vale:

$$\Phi_B(s) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = K \cdot y \cdot \int_S dS = K \cdot y \cdot L^2 \quad \Delta \Phi_B(s) = K \cdot L^2 \cdot (y - y_0) \rightarrow v_0 \cdot t$$

$$\Delta \Phi_B(s, t) = K \cdot L^2 \cdot v_0 \cdot t \quad \mathcal{E}_{em} = - \frac{1}{dt} \Delta \Phi_B(s, t) = - \frac{1}{dt} (K \cdot v_0 \cdot L^2 \cdot t) \Rightarrow |\mathcal{E}_{em}| = K \cdot v_0 \cdot L^2$$

~~Il mod. delle~~

② Le correnti nelle spine vale:

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{em}}{R} = \frac{K \cdot v_0 \cdot L^2}{R} = \frac{0,5 \cdot 2 \cdot (0,01)^2}{10} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{10} = 1 \cdot 10^{-7} A$$

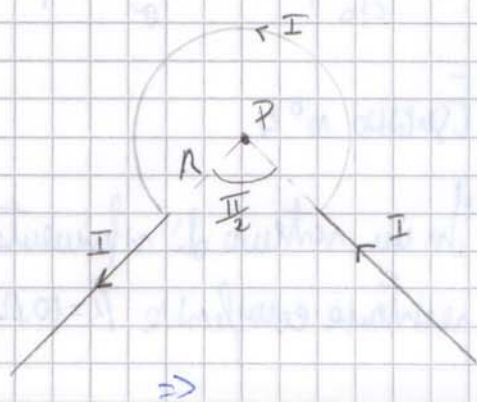
Esercizio n° 5

Il filo mostrato in figura è attraversato da una corrente $I = 40 A$. Il raggio delle porte circolari del filo vale $R = 2 cm (= 0,02 m)$. Trovare il modulo, direzione e verso del camp magnetico nel P. T. P. generato dalle correnti nel filo. Rispondere puntualmente ai quesiti proposti:

① Il camp magnetico nel P. T. P. è un vettore:

✓ el piano del filo ed uscente.

Il contributo dovuto ai due tratti di filo rettilinei non nulla in quanto per tali tratti, $d\vec{l}$ e \vec{r} sono anti-



paralleli)

17

② Il modulo del campo magnetico nel punto P vale:

Campo magnetico generato da un filo pieno di corrente e forme di arco di circonferenza:

$$\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi - \pi}{2} = \frac{3}{2}\pi = 270^\circ \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} \cdot \alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} \cdot \frac{3}{2}\pi = \frac{3\mu_0 \cdot I}{8R}$$

$$|\vec{B}| = \frac{3\mu_0 \cdot I}{8R} = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10A}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 10^{-5} \text{ T} \approx 0,942 \cdot 10^{-3} \approx 942 \text{ nT}$$

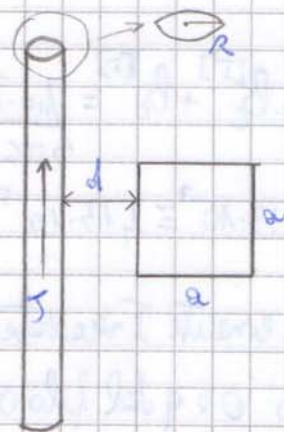
CONTINUAZIONE PROVA DEL 3/02/2004

Esercizio n° 2:

Un conduttore cilindrico pieno e di raggio R è pieno di una corrente assiale costante I e tenuto da una densità superficiale uniforme in tutte le sezioni del conduttore e variabile nel tempo secondo la legge $j(t) = j_0 \cos(kt)$, con j_0 e k costanti.

Il conduttore poggia nello stesso piano di una spira metallica quadrata di lato a ; la distanza tra l'asse del conduttore ed il lato della spira più vicino vale d . Il filo metallico è costituito da una resistenza R e una sezione S . Determinare la corrente indotta nella spira, assumendo che il conduttore cilindrico sia infinitamente lungo.

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{em}}}{R} \quad \left| \begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{em}} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ R &= \rho \cdot \frac{L}{S} = \rho \cdot \frac{4\pi R}{S} \end{aligned} \right.$$



Prima di tutto calcolare l'espressione del campo magnetico B : supponendo il cilindro infinitamente lungo, vale la legge di Biot-Savart:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad I = \int_S j \cdot dS = j_0 \cos(kt) \cdot \int_S dS = j_0 \cos(kt) \cdot \pi R^2$$

$$|\vec{B}(r)| = \frac{\mu_0 \cdot j_0 \cdot \cos(kt) \cdot \pi \cdot R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2} \cdot j_0 \cdot \cos(kt) \cdot \frac{R^2}{r}$$

$$\Phi_B(A) = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_d^d \frac{\mu_0 \cdot j_0 \cdot \cos(kt) \cdot R^2}{x} dx \int_a^a dy = \mu_0 \cdot j_0 \cdot \cos(kt) \cdot R^2 \cdot \ln\left|\frac{d+a}{d}\right| \cdot a$$

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = -\frac{d\Phi_B(A)}{dt} = \mu_0 \cdot j_0 \cdot k \cdot \sin(kt) \cdot R^2 \cdot \ln\left|\frac{d+a}{d}\right| \cdot a \Rightarrow$$

$$I_{ind} = \frac{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}{L} = \frac{\frac{\mu_0}{2} \frac{K \cdot T_0 \cdot \mu_0 (kt) \cdot L^2 \cdot \ln\left(\frac{d+e}{d}\right)}{\rho \cdot h \cdot a}}{\frac{\mu_0}{2} \frac{K \cdot T_0 \cdot \mu_0 (kt) \cdot S \cdot \ln\left(\frac{d+e}{d}\right) \cdot R^2}{\rho \cdot h \cdot a}}$$

18

Esercizio n° 3

Due fili rettilinei infinitamente lunghi O ed O' sono disposti parallelamente a distanza d e nello stesso piano. I due fili sono percorsi da corrente stazionarie I ed I' . Note I' , calcolare le seguenti grandezze: (dati numerici: $d=10\text{cm}$ $I=6\text{A}$ $a=5\text{cm}$ $c=5\text{cm}$ $p=6\text{cm}$ $q=8\text{cm}$)

- ① Il verso e l'intensità delle correnti I e I' affinché il campo magnetico complessivo misurato nel p.to A sia nullo solo:

$$B_A^{[I']} = \frac{\mu_0 \cdot I'}{2\pi(d+e)} \quad \text{diretta al piano individuato dai fili verso entrance nel piano del filo}$$

$$B_A^{[I]} = -B_A^{[I']} \quad B_A^{[I]} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi a} \Rightarrow \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi a} = \frac{I' \mu_0}{2\pi(d+e)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I'}{d+e} = -\frac{I}{e} \Rightarrow I = -I' \cdot \frac{e}{(d+e)} = 6 \cdot \frac{0,05}{(0,1+0,05)} = 2\text{A} \quad (\text{orientata in verso opposto a quella di } I')$$

- ② Con le correnti indicate dal punto ① calcolare il campo magnetico in C, e distanza c del filo O' :

$$B_C^{tot} = B_C^{[I]} + B_C^{[I']} = \frac{\mu_0 \cdot I'}{2\pi c} - \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi(d+c)} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2\pi \cdot 0,05} - \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi(0,1+0,05)} = \left(\frac{12}{0,05} - \frac{4}{0,15} \right) \cdot 10^{-7} =$$

$$= 213,33 \cdot 10^{-7} \approx 2,13 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

- ③ Con le correnti indicate al p.to ①, calcolare il campo magnetico nel p.to D, e distanze p del filo O e q del filo O' :

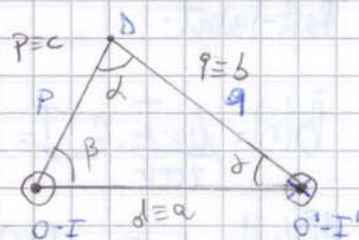
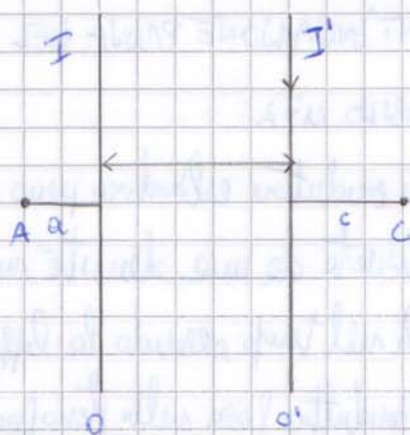
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) =$$

$$= \arccos(\phi) = \frac{\pi}{2}$$

$$b^2 = e^2 + c^2 - 2ec \cdot \cos(\beta) \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ec}\right) = 53^\circ 1' 3'' \quad \left| \begin{array}{l} \cos(\beta) = 0,6 \\ \sin(\beta) = 0,8 \end{array} \right.$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 53^\circ 1' 3'' = 36^\circ 8' 7'' \quad \left| \begin{array}{l} \cos(\gamma) = 0,799 \\ \sin(\gamma) = 0,6 \end{array} \right.$$

$$|B|_D^{[I']} = \frac{\mu_0 \cdot I'}{2\pi q} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2\pi \cdot 0,08} = \frac{12}{0,08} \cdot 10^{-7} = 150 \cdot 10^{-7} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



$$B_0^{[I]} = \begin{cases} B_{0x}^{[I]} = |B_0| \cdot \omega(\alpha) = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,777 \approx 1,178 \cdot 10^{-5} \text{ T} \\ B_{0y}^{[I]} = |B_0| \cdot \sin(\alpha) = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,6 = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ T} \end{cases}$$

19

$$|B_0|^{[I]} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0,06} = \frac{4}{0,06} \cdot 10^{-7} \approx 0,67 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

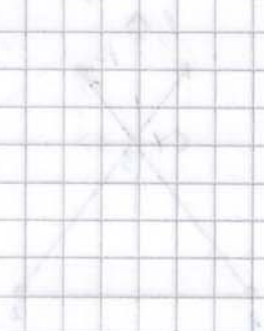
$$|B_0|^{[II]} = \begin{cases} B_{0x}^{[II]} = -|B_0|^{[I]} \cdot \omega(\beta) = -0,67 \cdot 10^{-5} \cdot 0,6 = -0,402 \cdot 10^{-5} \text{ T} \\ B_{0y}^{[II]} = |B_0|^{[I]} \cdot \sin(\beta) = 0,67 \cdot 10^{-5} \cdot 0,777 \approx 0,535 \cdot 10^{-5} \text{ T} \end{cases}$$

$$B_x^{\text{Tot}} = (1,178 - 0,402) \cdot 10^{-5} \text{ T} \approx 0,776 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_y^{\text{Tot}} = (0,9 + 0,535) \cdot 10^{-5} \text{ T} \approx 1,435 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

$$|B_0|^{\text{Tot}} = \sqrt{(B_x^{\text{Tot}})^2 + (B_y^{\text{Tot}})^2} = \sqrt{(0,776)^2 + (1,435)^2} \cdot 10^{-5} \text{ T} \approx 1,640 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

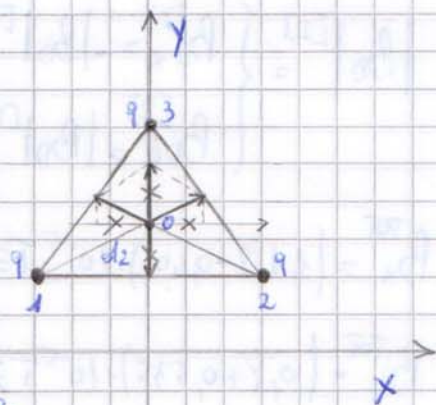
(n.b.: la risposta nella prova non è presente, ma è rappresentativa emette)



Esercizio n° 1

Tre cariche puntiformi positive uguali sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $d = 10 \text{ cm}$. Per $q = 1 \mu\text{C}$ il valore di spina delle cariche. Rispondere alle seguenti domande

- ① Calcolare il modulo del campo elettrostatico E_0 generato dalle tre cariche nell'intercetto (p.to in cui le mediane del triangolo):



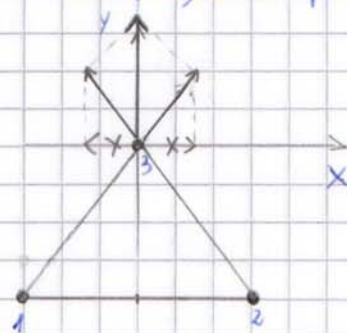
Calcoliamo il campo elettrostatico generato dalle cariche disposte ai vertici 1, 2, 3 nel punto O: E_0 è la somma (vettoriale) dei campi generati da ciascuna carica. Come si sa, dal disegno, i campi generati dalle cariche 1 e 2 sono uguali in modulo, ma di verso opposto. Sommando solo lungo l'asse y, le componenti lungo l'asse della x si annullano. Resta un'unica componente lungo y, diretta positivamente, di modulo: (n.b.: $d/2 \rightarrow$ distanza da ciascuna vertice con il p.to O)

$$\vec{E}_0^y = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \cdot \sin(30^\circ) \hat{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \hat{y}$$

Il campo generato dalle cariche nel vertice 3 in O è invece tutto diretto nelle direzione negativa se della y, per cui:

$$\vec{E}_0^y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \hat{y} \quad \text{Sommando i moduli:} \quad E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \hat{y} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \hat{y} = 0$$

- ② Calcolare il modulo del campo elettrostatico generato dalle cariche 1 e 2, nella posizione dell'intercetto delle cariche 3:



Il campo elettrico risultante nel vertice 3 dovuto alle cariche nei vertici 1 e 2 è diretto tutto lungo y, dato che le componenti lungo l'asse x si annullano (vedi figura). Il modulo totale del campo lungo y, nella direzione positiva dell'asse, vale:

$$|E_y| = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \cdot \cos(30^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

③ Calcolare la forza elettrostatica cui è sottoposto ciascuna carica per effetto delle altre due.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{(10^{-6})^2}{(10^{-2})^2} \approx 0,01558 \cdot 10^2 \approx 1,56 \text{ N}$$

21

④ È una delle due cariche viene liberata libera di muoversi, senza vincoli, e si allontana per l'azione delle forze repulsive esercitate dalle altre due; calcolare l'energia cinetica K da cui è dotata quando è arrivata molto lontano (all'infinito) dalle altre cariche:

$$\Delta U = \Delta K \text{ (conservazione dell'energia)} \Rightarrow U_f - U_i = -(K_f - K_i) \Rightarrow U_f - U_i = -K_f + K_i$$

$U_i = K_f$ l'energia cinetica finale risulta uguale all'energia potenziale elettrostatica iniziale

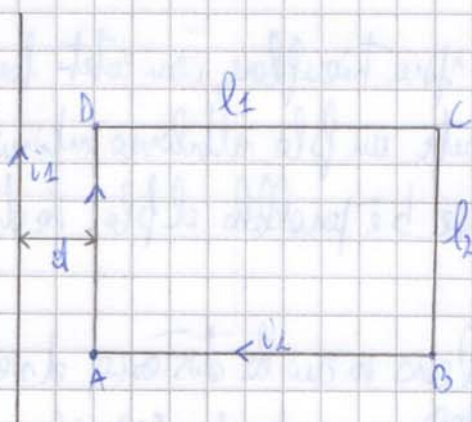
$$U_i = \sum_{i=1}^N q_i \cdot V_i = q \cdot (V_{13} + V_{23}) = q \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d}$$

Esercizio n° 2:

Una spira rettangolare di lati di lunghezza l_1 e l_2 , in cui corre una corrente I_2 in verso orario, si trova in un piano in cui è presente un filo rettilineo infinitamente lungo, percorso da una corrente I_1 in verso indicatore. I lati della spira di lunghezza l_2 sono paralleli al filo. Se d la distanza del lato AD del filo. Rispondere ai seguenti problemi:

⑤ Calcolare il modulo della forza \vec{F}_{AD} , esercitata dal filo sul lato AD della spira

$$\vec{F}_{AD} = I_2 \cdot \vec{L} \wedge \vec{B} \quad \begin{cases} I_2 \rightarrow \text{corrente che attraversa il tratto di filo} \\ L \rightarrow \text{lunghezza del tratto, orientata con la corrente} \\ \vec{B} \rightarrow \text{campo magnetico generato dal filo} \end{cases}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi d} \quad \vec{F}_{AD} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l_2}{2\pi d}$$

(centro del lato AD)

(parallelo al lato AB e verso il filo) ⑤

⑥ Calcolare la forza (modulo) \vec{F}_{CB} , esercitata dal filo ed agente sul lato CB della spira:

Il procedimento è del tutto analogo, basterà sostituire nell'espressione della forza la distanza

$d+l_1$ al pto delle distanze d:

22

$$F_{CB} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l_2}{2\pi(d+l_1)}$$

⑧ La corrente i_2 nel tratto CB delle spine ha verso opposto al caso precedente. Per tale motivo pure, tale spine è diretta parallelamente al lato AB (come in precedenza), ma con verso di allontanamento del filo.

⑨ Calcolare il modulo delle spine F_{BC} esercitate dal filo edificate nel lato DC:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi x} \quad \left(x \rightarrow \text{distanza del filo dal pto in cui si vuole calcolare il campo} \right)$$

$$F_{BC} = I_2 \cdot \int_l dB = I_2 \cdot \int_d^{d+l_1} \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi x} \cdot dx = I_2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{x} \right]_d^{d+l_1} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi} \ln \left| \frac{d+l_1}{d} \right|$$

⑩ I seni, applicando le regole delle mense dx, sono perpendicolari ai lati DC e AB e diseguali in intensità:

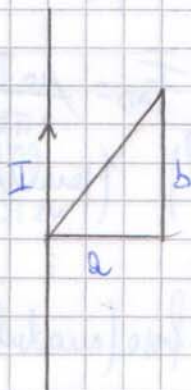
- F_{DC} è diretta verso il lato
- F_{AB} è diretta verso il seno

Esercizio n° 3

Una spina triangolare, i cui cateti hanno lunghezza $a=2m$ e $b=6m$, è pte in un piano in cui è presente un filo rettilineo infinitamente lungo, fornito da una corrente I . Il cateto di lunghezza b è parallelo al filo. La distanza tra il vertice A della spina ed il filo è pari a d .

• Nel caso in cui la distanza d sia pari a q , calcolare:

① Il flusso concatenato $\Phi(B)$, del campo di induzione magnetica \vec{B} , generato dal filo, attraverso la spina, quando la corrente nel filo vale $I=3A$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \cdot \hat{r} \quad (\text{legge di Biot-Savart})$$

$$\varphi(B) = \int_S B \cdot d\vec{s} \quad e: b = x \cdot y \Rightarrow y = \frac{b}{x} \Rightarrow \varphi(B) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \int_{\frac{b}{x}}^x \frac{1}{x} \cdot \frac{b}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot x = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot b = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi} \cdot 6 = 36 \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad 23$$

- (12) Coefficiente di mutua induzione M tra le spire ed il filo, prendendo la corrente nel filo vale $I = 3 \text{ A}$:

$$M = \frac{\varphi(B)}{I} = \frac{36 \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}^2}{3 \text{ A}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{ T} \cdot \text{m}^2}{\text{ A}}$$

- (13) La f.e.m. indotta nelle spire e la corrente nel filo dipende dal tempo e vale $I = I_0 \cos(\omega t)$, con $I_0 = 3 \text{ A}$ e $\omega = 25 \text{ s}^{-1}$:

$$\varphi(B, t) = \frac{\mu_0 \cdot I(t)}{2\pi} \cdot b = \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t)}{2\pi} \cdot b$$

$$f_{\text{em, ind}} = - \frac{d}{dt} (\varphi(B, t)) = - \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t)}{2\pi} \cdot b \right] = - \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot b}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} (\cos(\omega t)) =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot b}{2\pi} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

poi, nel caso in cui il valore delle distanze di filo $d = 3 \text{ m}$, calcolare:

- (14) Il flusso concatenato $\varphi(B)$ del campo di induzione magnetica \vec{B} , generato dal filo attraverso le spire prendendo la corrente nel filo vale $I = 3 \text{ A}$:

Questa volta bisogna calcolare l'elemento d , per cui vale: $d\vec{s} = dx \cdot \frac{b}{x} \cdot (x-d)$, per cui:

$$\varphi_B(s) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \int_d^{d+e} \frac{1}{x} (x-d) \cdot dx = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \left[\int_d^{d+e} dx - \int_d^{d+e} \frac{d}{x} dx \right] = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \left\{ [x]_d^{d+e} - d \left[\ln(x) \right]_d^{d+e} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \left[d+e - d - d \ln \left(\frac{d+e}{d} \right) \right] = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \left(e - d \ln \left(\frac{d+e}{d} \right) \right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi} \cdot \frac{6}{3} \cdot \left(2 - 3 \ln \left(\frac{5}{3} \right) \right) \approx 8,41 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \cdot \text{m}^2$$

- (15) Coefficiente di mutua induzione M tra le spire ed il filo, prendendo la corrente nel filo vale $I = 3 \text{ A}$:

$$M = \frac{\varphi_B(s)}{I} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \left(e - d \ln \left(\frac{d+e}{d} \right) \right) \cdot \frac{1}{I} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \left(e - d \ln \left(\frac{d+e}{d} \right) \right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{6}{3} \cdot \left(2 - 3 \ln \left(\frac{5}{3} \right) \right) = 2,80 \cdot 10^{-7} \frac{\text{ Wb} \cdot \text{m}^2}{\text{ A}}$$

- (16) La f.e.m. indotta nelle spire e la corrente nel filo dipende dal tempo e vale $I =$

$$= I_0 \cos(\omega t), \text{ con } I_0 = 3 \text{ A} \text{ e } \omega = 25 \text{ s}^{-1}: f_{\text{em}} = - \frac{d}{dt} (\varphi_B(s)) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 \cdot I(t)}{2\pi} \cdot \frac{b}{x} \cdot \left(e - d \ln \left(\frac{d+e}{d} \right) \right) \right) =$$

$$= M \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = M \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = 16,8 \cdot 10^{-7} \cdot \sin(\omega t) = 1,68 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(\omega t)$$

Es. n. 1:

Due spine quadrate di lato L le induttanze trascurabili ed è costituite da un filo conduttore di sezione S e conducibilità elettrica σ . Le spine si trovano in mezzo a due lunghi fili rettilinei paralleli e distanti d l'uno dall'altro e percorsi da correnti di modulo i in versi opposti. Le spine sono nel piano xy individuato dai due fili. Si calcoli:

- la mutua induttanza tra i fili e le spine;
- la corrente che scorre nelle spine in funzione del tempo, se $i = i_0 \cos(\omega t)$

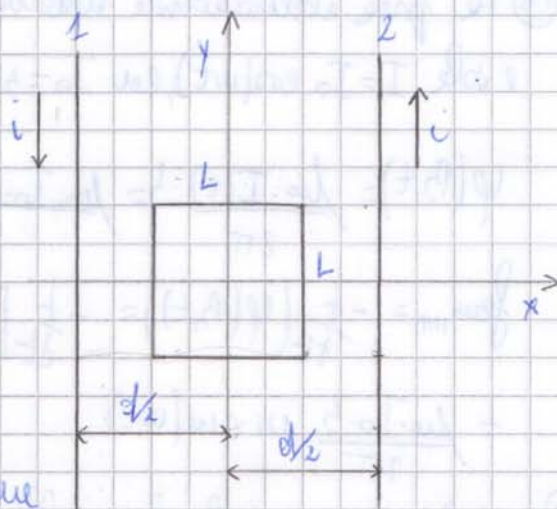
Si suppone fissate le seguenti dimensioni:

- ① Il flusso $\Phi(B_1)$ e $\Phi(B_2)$ dei campi dei fili 1 e 2 attraverso le spine sono:

Uguali $\Phi(B_1) = \Phi(B_2) \neq 0$

Il flusso attraverso le spine dipende dal modulo del campo B generato dalle correnti che scorrono nel filo, dalla distanza da esso e dalla forma e dimensione delle spine. Essendo le due correnti uguali e le spine sempre le stesse, ed essendo i fili paralleli alla stessa distanza dei due fili, i campi sono uguali ed anche i flussi.

Le distanze d fra entrambi i campi perpendicolare al piano xy , ed il verso è uscente dal piano del foglio.



- ② Il flusso del campo del filo 1 attraverso le spine quadrate vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \Phi(B_1) = \int_S B \cdot dS \quad \text{estremi: } \begin{cases} \text{sup: } \frac{d+L}{2} + \frac{L}{2} = \frac{d+L}{2} \\ \text{inf: } \frac{d-L}{2} - \frac{L}{2} = \frac{d-L}{2} \end{cases}$$

$$\Phi(B_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \int_{\frac{d-L}{2}}^{\frac{d+L}{2}} \frac{1}{x} dx \int_0^L dy = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right|$$

- ③ La mutua induttanza tra i fili e le spine quadrate vale:

$$M = 2 \cdot \frac{\Phi(B_1)}{I_2} = 2 \cdot \frac{\Phi(B_1)}{I} = 2 \cdot \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right| \cdot \frac{1}{I} = \frac{\mu_0 L}{\pi} \cdot \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right|$$

④ La resistenza totale della spirale prodotta vale:

25

$$p(\text{resistenza}) = \frac{1}{\sigma} \quad \text{II}^a \text{ legge di Ohm: } R = p \cdot \frac{L}{S} = p \cdot \frac{4L}{S} = \frac{4L}{\sigma S}$$

⑤ La corrente in funzione del tempo nella spirale prodotta vale:

$$i = i_0 \cos(\omega t) \quad \text{II}^a = \frac{f_{\text{em}}}{R} \quad f_{\text{em}} = -\frac{1}{\delta t} \varphi(\vec{B})$$

$$\varphi(\vec{B}) = 2 \cdot \varphi(B_z) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot L}{\pi} \cdot \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right| \quad | I = i_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \varphi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 \cdot i_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot L}{\pi \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right|}$$

$$f_{\text{em}} = -\frac{1}{\delta t} (\varphi(\vec{B})) = \frac{\mu_0 \cdot i_0 \cdot L \cdot \omega}{\pi} \sin(\omega t) \cdot \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right|$$

$$I(t) = \frac{f_{\text{em}}}{R} = \frac{\mu_0 \cdot i_0 \cdot L \cdot \omega}{\pi} \cdot \frac{\sigma S}{4L} \sin(\omega t) \cdot \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right| = \frac{\mu_0 \cdot i_0 \cdot \omega \cdot \sigma \cdot S}{4\pi} \sin(\omega t) \cdot \ln \left| \frac{d+L}{d-L} \right|$$

Esercizio n° 2

Un filo di materiale isolante è costituito da due tratti rettilinei di lunghezza L ciascuno ed una arcocorrente di raggio R . In entrambi i tratti rettilinei è uniformemente distribuita una carica Q . La arcocorrente invece produce carica con densità lineare $\lambda = k \cos \vartheta$.

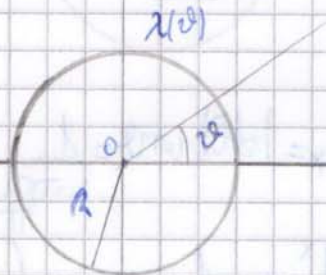
Valori numerici: $Q = 10^{-8} \text{ C}$, $k = 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}}$, $R = 20 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$

Rispondere alle seguenti domande:

⑥ La carica totale prodotta dal filo vale:

$$Q_{\text{TOT}} = Q_{\text{FILO}}^{\text{sx}} + Q_{\text{FILO}}^{\text{dx}} + Q_{\text{FILO}}^{\text{arc}}$$

$$Q_{\text{FILO}}^{\text{sx}} = Q_{\text{FILO}}^{\text{dx}} = Q = 10^{-8} \text{ C} \quad Q_{\text{FILO}}^{\text{arc}} = \int_{\text{circ}} k \cos(\vartheta) d\vartheta = k \cdot \int_{\phi}^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta = k \cdot \sin(\vartheta) \Big|_{\phi}^{2\pi} = \phi \Rightarrow Q_{\text{TOT}} = 2 \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{-7} \mu\text{C}$$



⑦ Nel punto O, il potenziale dovuto alle cariche sulle parti di filo e sulle arcocorrente vale:

$$V(O)^{\text{arc}} = \int_{\text{circ}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi R}{R} \cdot ds \quad (\text{note: il potenziale di una carica puntiforme sulle arcocorrente})$$

$$V(O)^{\text{arc}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot \int_{\text{circ}} 2\pi R \cos \vartheta ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot k \int_{\phi}^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta \Rightarrow V(O)^{\text{arc}} = \phi$$

⑧ Nel punto 0, il potenziale dovuto alle cariche sull'intero filo è:

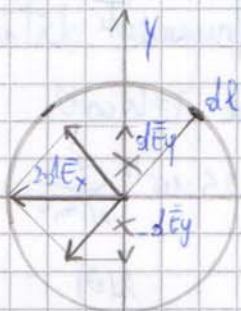
26

$$V(0)^{\text{TOT}} = V(0)^{\text{Filo SX}} + V(0)^{\text{Filo DX}} + V(0)^{\text{Circ}} \quad \left| \begin{array}{l} V(0)^{\text{Filo SX}} = V(0)^{\text{Filo DX}} = V(0)^{\text{F}} \\ V(0)^{\text{Circ}} = \phi \end{array} \right.$$

$$V(0)^{\text{TOT}} = 2 \cdot V(0)^{\text{F}} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \int_{-R/2}^{R/2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{L} \ln \left| \frac{R+L}{R} \right| \approx \frac{1}{5558} \cdot \ln \left| \frac{35}{2} \right| \cdot \frac{1}{50 \cdot 10^{-2}}$$

$$\cdot \frac{10^{-9}}{10^{-12}} \approx \frac{1}{2779} \cdot \ln \left| \frac{35}{2} \right| \cdot 10^6 \approx 450,8 \text{ V}$$

⑨ Il campo elettrico nel punto 0 generato dalle cariche sul filo ha direzione dell'asse x e verso opposto ad esso. Ciò è riscontrabile considerando che le cariche sul filo e forme di superficie è distribuite in modo da essere positive nel 1° e nel 4° quadrante, e negative nel 2° e nel 3°. Scegliendo un elemento differenziale di filo di dl può trovare sempre un simmetrico (risp. all'asse y) per cui le componenti del campo sono, rispetto ad y, uguali ed opposte, e rispetto ad x uguali in modulo, direzione verso (per cui si sommano). Il verso è quello rispetto rispetto all'orientamento dell'asse x:



$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^2} \quad |dq = \lambda dl \Rightarrow |d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega dl}{R^2}$$

$$|dl = R d\theta \Rightarrow |d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega R d\theta}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega}{R} d\theta$$

$$|d\vec{E}|_x = |d\vec{E}| \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega}{R} \cdot \cos\theta d\theta \quad (\cos\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega}{R} \cos^2\theta d\theta$$

$$|\vec{E}_{\text{TOT}}|^x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega}{R} \cdot 2 \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega}{R} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega}{R} \cdot \pi$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta + 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \omega}{R} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{K \omega}{4\pi\epsilon_0 R} \approx \frac{9,00 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-2}} \approx 1,41 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Esercizio n° 3:

Le porte metalliche A, D e B delle piastre sono parallele, hanno estensione area 10^{-2} m^2 e sono

retirabile. Le distanze tra le lastre interne e le due lastre esterne sono $d_1 = 1\text{mm}$ e $d_2 = 2\text{mm}$. Lo spazio tra le lastre A e B è riempito di aria, quello tra D e B è riempito di teflon (costante dielettrica relativa $K = 2,1$). Uniformemente le due lastre esterne (A e B) sono messe a terra e quella centrale (D) è caricata ad un potenziale di 3kV .

27

Calcolare la capacità equivalente dell'insieme delle tre lastre.

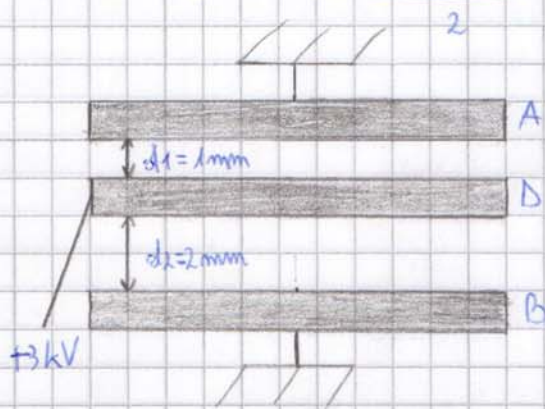
Precedentemente, tutte le lastre vengono isolate e la lastra centrale D e il teflon vengono rimossi.

Calcolare, in queste nuove configurazioni:

- la carica sulle due lastre esterne (A e B)
- la d.d.p. tra di esse.

Successivamente: la carica sul conduttore formato dalle due lastre esterne è la metà della differenza delle cariche in ciascuna di esse: $Q = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)$

(11) Nella situazione iniziale, quando le lastre A e B sono collegate a terra e la lastra D è a 3kV , il sistema delle tre lastre è equivalente a due condensatori in parallelo. (12) la capacità del condensatore equivalente vale:



$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad \left| \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d_1} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-3}} \approx 8,85 \cdot 10^{-11} \text{ F} \right.$$

$$C_2 = \frac{K \cdot \epsilon_0 \cdot A}{d_2} = \frac{2,1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 9,2925 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$C_{eq} = (8,85 + 9,2925) \cdot 10^{-11} \text{ F} \approx 18,14 \cdot 10^{-11} \approx 18,14 \cdot 10^{-12} \approx 18,1 \text{ pF}$$

(13) Appena le lastre A e B sono state isolate e la lastra interna è stata rimossa, la carica sulle lastre A vale:

$$Q_A = C_1 \cdot 3\text{kV} = 8,85 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^3 \approx 26,55 \cdot 10^{-8} \text{ C} \approx 2,66 \cdot 10^{-7} \mu\text{C}$$

(14) Nella medesima condizione, la carica sulle lastre B vale:

$$Q_B = C_2 \cdot 3\text{kV} = 9,2925 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^3 \approx 27,8775 \cdot 10^{-8} \text{ C} \approx 2,79 \cdot 10^{-7} \mu\text{C}$$

(15) Appena le lastre A e B sono state ^{isolate} ~~osservate~~ e la lastra interna è stata rimossa, la d.d.p. tra le lastre A e B ha valore esatto:

⇒

$$Q = C|AV| \Rightarrow |AV| = \frac{Q}{C}$$

$$C_F = \frac{\epsilon_0 A}{(d+d_2)} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 2,95 \cdot 10^{-11} F \approx$$

$$\approx 29,5 pF$$

$$Q = \frac{|Q_A - Q_B|}{2} = \frac{0,065 \cdot 10^{-6}}{2} \approx 0,0325 \mu C \cdot 10^{-4}$$

$$|AV| = \frac{0,0325 \mu C}{29,5 pF} = \frac{0,0325 \cdot 10^{-6}}{29,5 \cdot 10^{-12}} \approx 0,0023033 \cdot 10^6 \approx 2303,3 V$$

28

N.B.: in Theorie c'è un errore dovuto, infatti vi è come usate esatto indicata la lettera C, ovvero 208V.

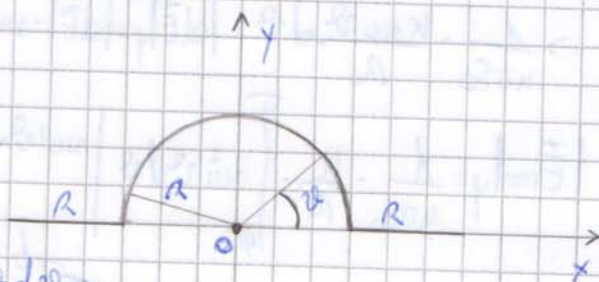
Problema n° 1:

Un filo di materiale isolante, costituito da due segmenti rettilinei di lunghezza $L=0,5\text{ m}$ e da una porzione finale di semicirconferenza di raggio R , possiede una carica elettrica che è distribuita nel filo con densità lineare λ che è uniforme ($\lambda=k$) sui segmenti rettilinei, mentre la densità lineare non è uniforme, secondo la formula $\lambda=k \sin \varphi$, per il tratto a forma di semicirconferenza, con k uguale nei due casi e $k=3 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}$.
In queste condizioni si calcoli:

- le cariche prodotte da ogni parte del filo isolante e la carica totale di tutto il filo;
- il valore del campo elettrostatico e del potenziale elettrostatico nel punto O indicato in figura;
- si consideri infine il filo non più costituito di materiale isolante ma di materiale conduttore e che esso sia percorso da una corrente i che esca da destra verso sinistra percorrendo il tratto curvo in senso antiorario. Si calcoli in questo caso il campo magnetico prodotto dal filo percorso dalla corrente nel punto O ;

Rispondere quindi alle seguenti domande.

① Le cariche elettriche prodotte solo dalle porzioni di filo a forma di semicirconferenza vale:



$$Q_{\text{sem}} = \int_{\text{filo}} \lambda(\varphi) d\ell \quad \left| \begin{array}{l} d\ell = R d\varphi \\ \lambda(\varphi) = k \sin \varphi \end{array} \right. \Rightarrow Q_{\text{sem}} = \int_0^\pi k R \sin \varphi d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{\text{sem}} = k R \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi = k R \cdot [-\cos \varphi]_0^\pi = 2 k R = 3 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot (2) = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

② Il potenziale elettrostatico in O dovuto a tutto il filo vale:

$$V_O = V_{O1}^{\text{FID SX}} + V_O^{\text{FID DX}} + V_O^{\text{SEM}} \quad \left| \begin{array}{l} V_O^{\text{FID SX}} = V_O^{\text{FID DX}} = V_O^{\text{RETT}} \end{array} \right. \Rightarrow V_O^{\text{TOT}} = 2 V_O^{\text{RETT}} + V_O^{\text{SEM}}$$

$$V_O^{\text{RETT}} = \int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (2R) \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k R \cdot \ln\left(\frac{2R}{R}\right) = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} R \cdot \ln(2)$$

$$V_0^{\text{fil}} = 2 \cdot V_0^{\text{rot}} = \frac{K}{2\pi\epsilon_0} \cdot R \cdot \ln(2)$$

30

$$V_0^{\text{cav}} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \cdot dl \quad \begin{array}{l} dl = 2dl \\ dl = R d\varphi \\ dl = 2R d\varphi \\ dl = K \cdot \sin\varphi \cdot R d\varphi \end{array} \Rightarrow V_0^{\text{cav}} = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \cdot K' \cdot K \cdot \sin\varphi \cdot R d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot K \cdot \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot K \cdot 2 = \frac{K}{2\pi\epsilon_0}$$

$$V_0^{\text{tot}} = \frac{K}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{K}{2\pi\epsilon_0} = \frac{K}{2\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2} \ln(2)\right)$$

③ Il segno della carica elettrica posseduta dalle porzioni di filo fanno di nuovo differenza:
 è: porzione tra ϕ e $\frac{\pi}{2}$ e porzione tra $\frac{\pi}{2}$ e π ; ciò è dovuto al fatto che il $\sin\varphi$ è
 positivo nel I° e nel II° quadrante.

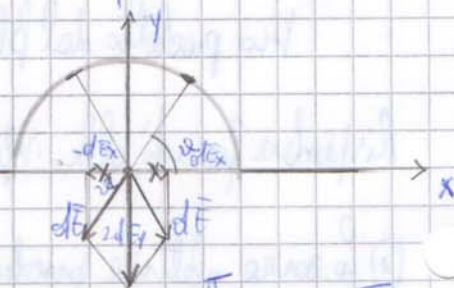
④ La carica totale prodotta da tutto il filo vale:

$$Q_{\text{tot}} = 2 \cdot K \cdot R + Q_{\text{cav}} = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-7} \frac{1}{2} + 3 \cdot 10^{-7} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

⑤ Il modulo del campo elettrostatico generato in O da tutto il filo vale:

$$|dE| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2dl}{R^2} \quad \begin{array}{l} dl = R d\varphi \\ 2 = K \sin\varphi \end{array} \Rightarrow |dE| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \sin\varphi \cdot R d\varphi}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \sin\varphi}{R} \cdot d\varphi \quad |dE|_y = |dE| \cdot \sin\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K \sin^2\varphi}{R} d\varphi$$



$$|E_{\text{tot}}|_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi \quad \left| \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right| \Rightarrow |E_{\text{tot}}|_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \left[\int_0^\pi \frac{1}{2} d\varphi - \int_0^\pi \frac{\cos(2\varphi)}{2} d\varphi \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot \frac{1}{2} \left[\pi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \Big|_0^\pi \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{K}{R} \cdot \frac{1}{2} = \frac{K}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3 \cdot 10^{-7}}{8 \cdot 9.85 \cdot 10^{-12} \cdot 9.5} \approx \frac{3 \cdot 10^{-7}}{8.5 \cdot 10^{-3}} \approx 3.5 \cdot 10^{-5} \text{ V/m}$$

⑥ Considerando adesso il filo di materiale conduttore e pieno di una corrente i , il campo magnetico generato da tutto il filo in O vale:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\varphi}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{R^2} \quad \begin{array}{l} dl = R d\varphi \\ r = R \end{array} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\varphi}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \pi = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente $i(t) = I \cdot \sin(\omega t)$, con I positiva. Una spira rettangolare, di resistenza totale R , avente i due lati di lunghezza a perpendicolari al filo e gli altri due di lunghezza b paralleli al filo rettilineo indefinito, fuoriesce da corrente, è disposta con il lato più vicino al filo ed istante t come mostrato in figura. Il filo e la spira giacciono sullo stesso piano. In queste condizioni vale:

- il campo magnetico generato dal filo fuoriesce da corrente ed una femme indotta \mathcal{E} del filo stesso;
- il flusso del campo magnetico generato dal filo, che attraversa la spira ad un'istante t ;
- Valore \mathcal{E} e \mathcal{E} indotta e calcolare eventualmente il valore;
- la femme indotta nella spira trascurando l'effetto di autoinduzione; Valori numerici: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $d = 7 \text{ cm}$, $R = 10 \Omega$, $I = 3 \cdot 10^{-2} \text{ A}$, $\omega = 9 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$

Si suppone, quindi, alle seguenti domande:

- ⑦ Il campo magnetico generato dal filo ad un'istante t , del filo fuoriesce da corrente $i(t)$, alla distanza $r = 7 \text{ cm}$ dal filo solo in modulo:



$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \sin(\omega t)}{2\pi \cdot 0,07} = \frac{2 \cdot 3}{0,07} \cdot 10^{-9} \sin(\omega t) = 85,71 \cdot 10^{-9} \sin(\omega t) \approx 9,26 \cdot 10^{-7} \sin(\omega t) \text{ T}$$

- ⑧ Il campo magnetico generato dal filo al centro della spira all'istante $t = 55 \text{ ns}$, in modulo:

$$B(t=55)_{\text{centro}} = \frac{\mu_0 \cdot I(55)}{2\pi \left(\frac{a}{2} + d\right)} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \sin(0,1\pi \cdot 5)}{2\pi \cdot (0,05 + 0,07)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2})}{0,12} \cdot 10^{-9} \approx 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

- ⑨ Il flusso del campo magnetico che attraversa la spira ad un'istante t vale, in valore assoluto:

$$\Phi_B(t) = \int_S B \cdot dS = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 \cdot I(t)}{2\pi x} \cdot dx \int_0^a dy = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin(\omega t)}{2\pi} \ln \left| \frac{d+b}{d} \right| \cdot b$$

10) La fem indotta nelle spine vale:

32

$$f.e.m. = -\frac{1}{dt} (\Phi_B(S, t)) = -\frac{\mu_0 \cdot b}{2\pi} \ln\left|\frac{a}{d} + 1\right| \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

11) Considerando che a $t=0$ la corrente nel filo è pari a 0, il valore della corrente indotta nelle spine fu $t=10s$ vale in valore assoluto:

$$I = \frac{f.e.m.}{R} = \frac{\frac{\mu_0 \cdot b}{2\pi} \ln\left|\frac{a}{d} + 1\right| \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)}{10} = \frac{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 205 \cdot 94\pi \cdot \cos(94\pi \cdot 10)}{2\pi \cdot 10} \ln\left|\frac{1+94}{907}\right|}{10} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 0,05 \cdot 0,1 \cdot 3,14 \cdot (-1) \cdot 10^{-9}}{10} \cdot 0,98 \approx 0,00000000196 \approx 1,96 \cdot 10^{-10} A$$

12) La corrente indotta nelle spine, distribuita come in spine, cresce in senso: alternato, in quanto la corrente nel filo che genera il campo magnetico (e quindi il flusso e la fem) è una funzione sinusoidale, che assume talvolta valori positivi e talvolta valori negativi.

13) Sempre all'istante $t=10s$, il modulo della fem esercitata dal filo nel ramo delle spine più vicino al filo (di spessore b) vale:

$$|\vec{F}| = |\vec{E} \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}| \quad B = \frac{\mu_0 I(10)}{2\pi d} = \phi \text{ (basta sostituire i valori numerici)}, \text{ per cui } |\vec{F}| = \phi$$

Problema n°3

Una spine isolante di raggio $R_1 = 3cm$ fide, uniformemente distribuita nel suo volume, una carica $Q_1 = -50 \cdot 10^{-2} C$. Essa viene posta quindi al centro di una spine conduttrice cava di raggio interno $R_2 = 7cm$ e raggio esterno $R_3 = 11cm$, che era stata precedentemente caricata con una carica $Q_2 = 30 \cdot 10^{-2} C$. Calcolare, in funzione della distanza r :

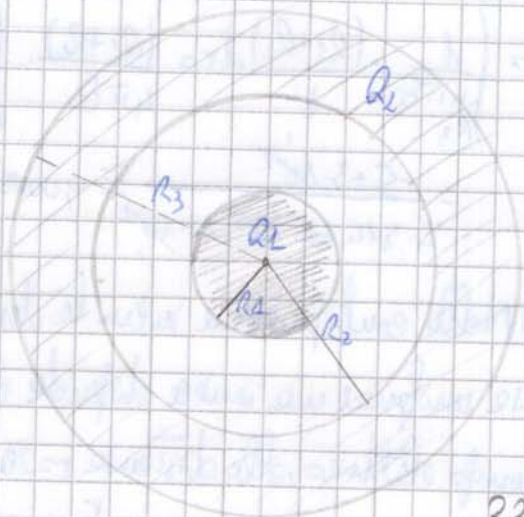
- il campo elettrico ed una distanza qualsiasi $r < R_1$;
- il campo elettrico alla distanza $r = 5cm$;
- la densità di carica sulle superficie interna della spine conduttrice cava;
- la carica totale distribuita sulle superficie esterna della spine conduttrice cava;
- dato $V(\infty) = 0$, calcolare il p.t.e.n. delle spine conduttrice.

Rispondere quindi alle seguenti domande:

→

14) La densità volumetrica di carica ρ della sfera isolante di raggio R_1 vale:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{-5 \cdot 10^{-2} \text{ C}}{\frac{4}{3} \pi R_1^3} = \frac{-5 \cdot 10^{-2}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi (3 \cdot 10^{-2})^3} \approx -0,04423 \cdot 10^4 \approx -4,4 \cdot 10^2 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$



15) Il campo elettrico, all'interno della sfera isolante, ad una distanza $r < R_1$ vale:

$$\begin{aligned} V_E(s) &= \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E} \cdot s = \vec{E} \cdot 4\pi r^2 & V_E(s) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} & Q_{\text{int}} &= \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \rho = \frac{Q_1}{\frac{4}{3} \pi R_1^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_{\text{int}} &= \frac{Q_1}{\frac{4}{3} \pi R_1^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q_1}{R_1^3} r^3 & \Rightarrow Q_{\text{int}} &= E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{Q_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^3}{R_1^3} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\vec{E}| &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1^3} \cdot r \end{aligned}$$

16) Il modulo del campo elettrico, alla distanza $r = 5 \text{ cm}$ dall' centro del sistema di sfere vale:

$$\begin{aligned} V_B(s) &= \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot s = E \cdot 4\pi r^2 & V_B(s) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_1}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 \cdot r^2} = \\ &= \frac{-5 \cdot 10^{-2} \text{ C}}{4 \cdot \frac{3}{4} \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{-5}{4 \cdot \frac{3}{4} \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}} = 0,00177 \cdot 10^{14} \approx 1,8 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

17) La densità di carica σ sulla superficie interna della sfera cavata vale:

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{-Q_1}{4\pi R_2^2} = \frac{+5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot \frac{3}{4} \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot \frac{3}{4} \pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,00215 \cdot 10^2 \approx 0,215 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

18) La densità di carica σ sulla superficie esterna della sfera cavata vale:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{-Q_2}{4\pi R_3^2} = \frac{-3 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot \frac{3}{4} \pi \cdot (0,11 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{3}{4 \cdot \frac{3}{4} \pi \cdot 1,21 \cdot 10^{-4}} = 0,00131 \cdot 10^2 \approx 0,13 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

19) Il potenziale elettrico sulla superficie esterna della sfera conduttrice vale:

$$V_p = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad E(r) = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Il campo si comporta come se le cariche fossero tutte} \\ \text{distribuite al centro della sfera} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$V_p = \int_{R_3}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(Q_1+Q_2)}{r^2} dr = \frac{(Q_1+Q_2)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{R_3}^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{(Q_1+Q_2)}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-1) \cdot \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R_3} \right] = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 3h$$

$$= \frac{-5 + 3 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 11 \cdot 10^{-2}} \approx 9,00163 \cdot 10^{12} V \approx 1,53 \cdot 10^{13} V$$

20) Nella configurazione menzionata la densità di carica di volume delle sfere di materiale isolante non è uniforme ma invece dipende dal raggio secondo l'espressione $\rho(r) = k \cdot r^2$, il modulo del campo elettrico, alla distanza $r = 2 \text{ cm}$ dal centro delle sfere, vale:

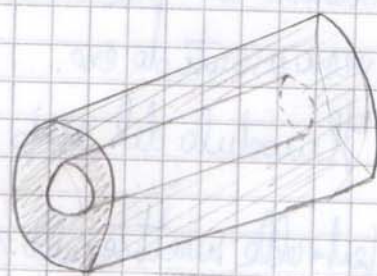
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad Q_{int} = \int_0^r k \cdot \frac{1}{r} \cdot 4\pi r^2 dr = k \cdot 4\pi \cdot \int_0^r r dr = k \cdot 4\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^r = k \cdot 4\pi \frac{r^2}{2}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{k \cdot 4\pi r^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{k}{2\epsilon_0} \quad \left(\text{non posso calcolare il valore in funzione delle tre sfere ma solo il valore di } k \right)$$

Un conduttore cilindrico cavo della figura è infinitamente lungo, ha raggi interno ed esterno rispettivamente R_1 ed R_2 ed è percorso elettricamente da una corrente uniformemente distribuita nella sua sezione. (Il cilindro di raggio R_1 è la parte cava del conduttore).
Si calcoli il campo magnetico $B(r)$ e la densità di energia magnetica, $U_M = \frac{B^2(r)}{2\mu_0}$, in funzione della distanza r dall'asse del conduttore e si verifichi alle seguenti domande:

- ① Per $r > R_2$ il modulo del campo magnetico $B(r)$ ha la seguente espressione:

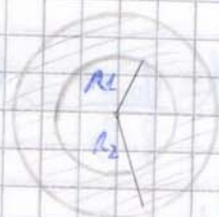
$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{il cilindro può essere visto come un} \\ \text{conduttore infinitamente lungo, percorso da} \\ \text{corrente, per cui vale la legge di Biot-Savart} \end{array} \right)$$



- ② Per $R_1 < r < R_2$ il modulo del campo magnetico $B(r)$ ha la seguente espressione:

$$I = J \cdot S \quad J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \quad I_{enc} = J \cdot S_{enc} = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \cdot (\pi(r^2 - R_1^2)) = I \cdot \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I_{enc}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}$$



- ③ Per $r < R_1$ il modulo del campo magnetico $B(r)$ vale 0. All'interno del cilindro cavo non vi è nessun campo magnetico.

- ④ Per $r > R_2$ la densità di energia del campo magnetico U_M vale:

$$U_M = \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \frac{\left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \right)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0^2 \cdot I^2}{4\pi^2 r^2 \cdot 2\mu_0} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{8\pi^2 r^2}$$

Esercizio n° 2

All'istante iniziale $t=0$, un elettrone parte dal punto A con velocità $v_0 = 10^7$ m/s, diretta come mostrato in figura. Calcolare il modulo e la direzione del campo magnetico B , che attraversa l'elettrone e percorso la traiettoria semicircolare del punto A al punto B, avente raggio $R = 0,1$ m. Calcolare inoltre il tempo necessario all'elettrone (in ns) per andare da A a B, la sua velocità quando arriva nel punto B. (Carica elettr. $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, massa elettr. $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg)

5) Il campo magnetico in O è:

36

Un elettrone egisce la forza di Lorentz \vec{F} , dove:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$



Essendo la traiettoria dell'elettrone come in figura, la forza differenziale di Lorentz è un vettore che ha direzione \perp alla velocità e verso come quello delle x positive (\rightarrow)

Per ottenere una forza con orientato, il campo \vec{B} è diretto perpendicolarmente al piano del filo, con verso uscente da esso.

6) Il modulo del campo magnetico in O è:

Le particelle iniettate nello spazio in un campo magnetico uniforme muovono di moto circolare uniforme. Vale la relazione:

$$R = \frac{v_0 \cdot m}{q \cdot B} \Rightarrow B = \frac{v_0 \cdot m}{q \cdot R} = \frac{10^7 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9.1} = 56.87 \cdot 10^{-5} \text{ T} \approx 5.687 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

7) Il tempo T impiegato dall'elettrone in percorrere la semicirconferenza è:

Il tempo in percorrere la semicirconferenza è la metà del periodo T che l'elettrone impiegherebbe in percorrere il giro completo della Traiettoria circolare, che vale:

$$\frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi m}{q \cdot B}}{2} = \frac{\pi m}{q \cdot B} = \frac{3.14 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5.687 \cdot 10^{-4}} = 3.14 \cdot \frac{10^{-31}}{10^{-19} \cdot 10^{-4}} \text{ s} = 3.14 \cdot 10^{-9} \text{ s} \approx 3.14 \text{ ns}$$

8) La velocità v dell'elettrone nel punto B ha modulo pari a:

Essendo la forza di Lorentz differenziale (che varia il verso e la direzione della velocità, ma non il modulo), la velocità in B ha lo stesso modulo della velocità in A (in questo caso anche la stessa direzione, ma con verso opposto) e vale quindi: $|v|_B = 10^7 \text{ m/s}$

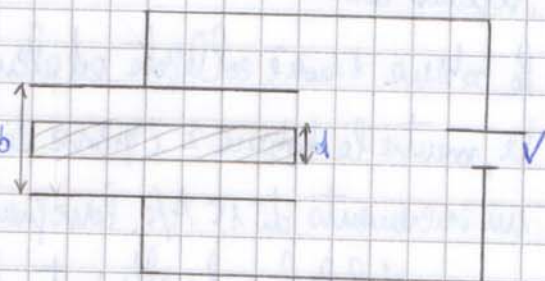
Esercizio n° 3

Una conduttrice esterna è piana e parallela, distanti b e d da A, è collegata ad una batteria che eroga una tensione V costante. Trascurando le resistenze delle armature e i cavi. Determinare, su

fonte configurazionale, il modulo del camp elettrostatico tra le armature e le cariche indotte. Insieme, una lamina di rame di spessore d viene inserita al centro tra le armature.

Determinare, in questa nuova configurazione, il campo elettrostatico nelle regioni vuote, al di sopra e al di sotto le lamine di rame, e calcolare le capacit  del dispositivo con riferimento. Rispondere, purch , alle seguenti domande:

- 9) Nella configurazione senza lamina metallica, nello spazio tra le armature il campo elettrostatico del condensatore   modulo:



$$E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \left| \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{b} \quad \sigma = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{b} \cdot \frac{V}{A} = \frac{\epsilon_0 \cdot V}{b} \right.$$

$$Q = C \cdot V \quad Q = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{b} \cdot V$$

$$E = \frac{\frac{\epsilon_0 \cdot V}{b}}{\epsilon_0} = \frac{V}{b}$$

- 10) Nella configurazione senza le lamine metalliche mentre, le cariche Q sulle armature del condensatore   modulo:

$$Q = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{b} V \quad (\text{calcolate prima})$$

- 11) Sopra l'immersione delle lamine metalliche, il campo elettrostatico nello spazio vuoto tra le armature e le lamine di rame   modulo:

$$E = \frac{V}{b-d} \quad (\text{stessa espressione della 9), sostituendo alla distanza il valore } b-d)$$

- 12) Con le lamine di rame inserite, il condensatore   equivalente:

Inserendo le lamine metalliche il condensatore   visto come un insieme di due condensatori in serie. La capacit  del singolo condensatore  : $C_0 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{(\frac{b-d}{2})}$. La capacit  equivalente  :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \cdot A}{(\frac{b-d}{2})}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \cdot A}{(\frac{b-d}{2})}} = \frac{(\frac{b-d}{2}) + (\frac{b-d}{2})}{\epsilon_0 \cdot A} = \frac{(b-d)}{\epsilon_0 \cdot A} \Rightarrow C_{eq} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{(b-d)}$$

- 13) Con le lamine di rame inserite, la carica del condensatore: aumento. Modulo del campo

relazione $Q = C \cdot V$, la tensione resta costante e la corrente aumenta, per cui la corrente.

38

Esercizio n° 4

Due bobine di forma geometrica data si trovano in posizioni spaziali determinate. Si considerino, allora, i seguenti casi:

- ① La bobina 1 non è collegata ad alcun generatore di f.e.m. e quindi non è presa da corrente, mentre la bobina 2 è presa da una corrente, variabile nel tempo, che aumenta con un incremento di 15 A/s . Conseguentemente la f.e.m. indotta nella bobina 1 è pari a 25 mV . Calcolare il coefficiente di mutua induzione M tra le due bobine.
- ② La bobina 2 non è presa da corrente mentre la bobina 1 è presa da una corrente costante di $3,60 \text{ A}$. Calcolare, in tale configurazione, il flusso magnetico concatenato con la bobina 2. Rispondere quindi alle seguenti domande:

⑭ Calcolare il coefficiente di mutua induzione M tra le due bobine solo:

$$\varphi_1(t) = M_{12} \cdot I_2(t) \quad \text{per } M_{12} = - \frac{d}{dt} \varphi_1(t) = - \frac{d}{dt} M_{12} \cdot I_2(t) \quad I_2(t) = I_0 + 15t$$

$$|\text{flusso}|_1 = M_{12} \cdot \frac{d}{dt} I_2(t) = M_{12} \cdot 15 \Rightarrow 25 \text{ mV} = M_{12} \cdot 15 \text{ A} \Rightarrow M_{12} = \frac{25 \text{ mV}}{15 \text{ A}} \approx 1,67 \text{ mH}$$

- ⑮ Nel caso in cui la bobina 2 non è presa da corrente mentre nella bobina 1 circola una corrente di $3,60 \text{ A}$, il flusso magnetico concatenato con la bobina 2 vale:

$$\varphi_2(t) = \overset{M_{12}}{M_{21}} \cdot I_1(t) = 1,67 \cdot 3,60 \approx 5,98 \text{ mWb}$$

Esercizio n°1

Un filo rettilineo molto lungo percorre da est a ovest $I = 10 \text{ mA}$ e in π una spira circolare di raggio $R = 20 \text{ cm}$. Calcolare il campo magnetico al centro O della spira.

- ① Il campo magnetico B al centro O della spira è un vettore: oppure al polo del filo con verso uscente.



Cio è riproducibile considerando il campo B in O come la somma dei campi dovuti al tratto di filo rettilineo e al tratto di filo a spira. Entrambi sono in verso uscente del polo del filo, quindi anche il campo risultante avrà tale andamento.

- ② Il campo magnetico nel punto O generato dalla corrente nel filo rettilineo indefinito ha modulo:

$$B_{\text{filo}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \quad (\text{vedi la legge di Biot-Savart})$$

- ③ Il campo magnetico nel punto O generato dalla corrente nella spira circolare ha modulo:

$$B_{\text{spira}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2R} \quad (\text{vedi campo magnetico generato da una spira circolare nel suo centro})$$

- ④ Il campo magnetico totale in O ha modulo:

$$\begin{aligned} |B|_{\text{TOT}} &= |B|_{\text{filo}} + |B|_{\text{spira}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 \cdot I}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}} + \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = \\ &= \frac{2}{20} \cdot 10^{-7} + \frac{5,78}{20} \cdot 10^{-7} = (0,1 + 0,314) \cdot 10^{-7} = 0,414 \cdot 10^{-7} = 4,14 \cdot 10^{-8} \text{ T} \end{aligned}$$

Esercizio n°2

Un filo di materiale isolante, con due estremità di cui una è lineare e l'altra è curva, viene piegato secondo le forme mostrate in figura (due semicirconferenze di raggio R e $2R$ rispettivamente, collegate da due tratti rettilinei di lunghezza R). In corrispondenza una carica Q positiva viene collocata nel punto O . Calcolare le cariche totali del filo e l'energia potenziale elettrica.

tra delle curve partiformi Q .

⑤ Le curve del filo le espressioni:

$$Q_{TOT} = 2Q_{RETT} + Q_{ARCOR} + Q_{ARCO2R}$$

$$Q_{RETT} = 2 \cdot R \quad Q_{ARCOR} = 2 \cdot \frac{2\pi R}{2} = 2\pi R$$

$$Q_{ARCO2R} = \frac{2 \cdot \pi(2R)}{2} = 2\pi R$$

$$Q_{TOT} = 2R + 2\pi R + 2\pi R = 2R(2 + 3\pi)$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_L \frac{\lambda(r) dr}{r} \quad V_0$$

⑥ Il potenziale nel p.to O generato dalle curve in due tratti rettilinei di filo seb:

(potenziale generato da una funzione distribuzione lineare di cariche)

$$V_0^{RETT} = \int_R^{2R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \cdot \ln\left|\frac{2R}{R}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \ln 2$$

$$V_0^{TOT} = 2 \cdot V_0^{RETT} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \ln 2$$

⑦ L'energia potenziale elettrostatica delle curve Q quando è pte nel p.to O seb:

$$U_{TOT} = Q \cdot V_0^{TOT} \quad V_0^{TOT} = V_0^{RETT} + V_0^{ARCOR} + V_0^{ARCO2}$$

$$V_0^{ARCOR} = \int_{ARCOR} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{2\pi R}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \pi$$

$$V_0^{ARCO2} = \int_{ARCO2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{2R} \cdot ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{2R} \cdot \frac{2\pi(2R)}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \pi$$

$$V_0^{TOT} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \ln 2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \pi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \pi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda (\ln 2 + \pi)$$

Esercizio n° 3

Piano di una bobina di $N=250$ spire di area $A=9002 \text{ m}^2$ è inclinato di $\alpha=40^\circ$ rispetto ad un

camp magnetico uniforme \vec{B} . Il modulo del camp magnetico diminuisce da 902 T

a 902 T in $0,0205 \text{ s}$. Calcolare il valore assoluto delle f.e.m. medie indotte nella bobina.

Calcolare inoltre l'induttanza per unità di lunghezza della bobina, sapendo che la

bobine e bobine 40 cm.

⑧ Il valore assoluto della f.e.m. media indotta nelle bobine val:

$$|f_{em}| = \Delta \Phi_m(s) = \frac{0,08 - 0,02}{0,020} \cdot 0,002 \cdot \omega(40^\circ) \approx 1,15 \text{ Vb/s}$$

⑨ L'induttanza propria di lunghezza delle bobine val:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l^2} \cdot S = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{(250)^2}{(40 \cdot 10^{-2})^2} \cdot 0,002 \approx 0,98 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

Esercizio n° 3

Un cavo cilindrico di raggio R ha una densità volumetrica di carica uniforme ρ . Esso contiene al suo interno un secondo cavo cilindrico vuoto di raggio $R/2$, prodotto come in figura. Determinare il campo elettrico nel p.to P (p.to sulle rette di intersezione delle superfici laterali dei due cilindri).

⑩ Il campo elettrico nel p.to P è un vettore:

a) radiale (perpendicolare alle superfici laterali del cilindro di raggio R)

Infatti, se consideriamo un elemento di cilindro differenziale, è possibile trovare sempre un elemento simmetrico per cui il campo differenziale dE lungo y risulta uguale ed opposto del primo.

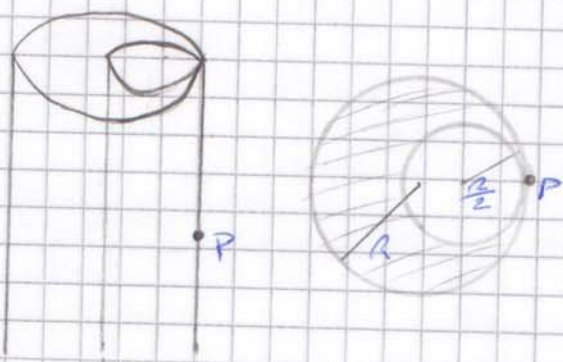
⑪ In assenza del cilindro vuoto, il campo elettrico del cilindro di raggio R , uniformemente pieno di carica con densità ρ , nel p.to P avrebbe modulo:

1° METODO:

È possibile considerare il cilindro infinitamente lungo come un filo indefinito con carica a densità lineare λ , presente su l'asse del cilindro. Le formule:

$$P = \pi R^2 \cdot L \quad dq = \rho \cdot dV = \rho \cdot \pi R^2 dr \quad dq = \lambda dr \Rightarrow \rho \cdot \pi R^2 dr = \lambda dr \Rightarrow \lambda = \rho \cdot \pi R^2$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{campo elettrostat. generato da} \\ \text{un filo rettilineo indefinito} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = \rho \cdot \pi R^2 \\ r = R \end{array} \right\} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \pi R^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot R} = \frac{\rho \cdot R}{2\epsilon_0}$$



II° METODO:

Applicando il Th. di Gauss ad una superficie cilindrica chiusa, con raggio di base $R_2 \geq R_1$,
vale:

$$\varphi_E(s) = E \cdot 2\pi R_2 L \quad \varphi_E(s) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} = \frac{P \cdot \pi R^2 L}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{P \cdot \pi R^2 L}{\epsilon_0} = E \cdot 2\pi R_2 L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{P \cdot R}{2\epsilon_0}$$

(12) Il modulo del camp. elettrico nel p.to P vale:

$$E_P = E^{\text{TOT}} - E^{\text{CIL. LARGO}} \quad E^{\text{CIL. LARGO}} = \frac{P \cdot \frac{R}{2}}{2\epsilon_0} = \frac{P \cdot R}{4\epsilon_0}$$

$$E_P = \frac{P \cdot R}{2\epsilon_0} - \frac{P \cdot R}{4\epsilon_0} = \frac{P \cdot R}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{P \cdot R}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2-1}{4} \right) = \frac{P \cdot R}{4\epsilon_0}$$