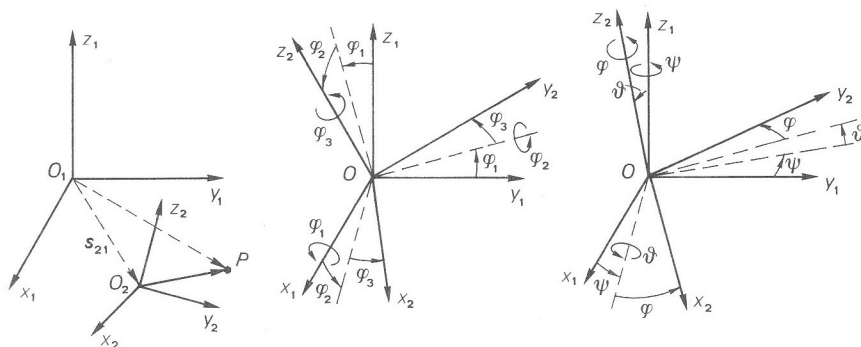


APPENDICE 2

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE – SPOSTAMENTI.

a) Trasformazioni nello spazio:



Un punto P nello spazio ha coordinate $[P]^i = [P_x, P_y, P_z]$ rispetto ad un riferimento cartesiano x_i, y_i, z_i , di origine O^i .

Dati quindi due riferimenti 1 e 2, essendo $(P - O_1) = S_{21} + (P - O_2)$, risulta, considerando le componenti nel riferimento 1,

$$[P]^1 = [S_{21}]^1 + [P - O_2]^1 = [S_{21}]^1 + [R_{21}]^1 [P]^2 \quad [A2.1]$$

essendo $[S_{21}]^1$ un vettore di componenti s_{21} ed essendo $[R]$ la matrice dei coseni direttori della terna 2 rispetto alla terna 1, misurati nel riferimento 1:

$$[R_{21}]^1 = \begin{bmatrix} Cx_2x_1 & Cy_2x_1 & Cz_2x_1 \\ Cx_2y_1 & Cy_2y_1 & Cz_2y_1 \\ Cx_2z_1 & Cy_2z_1 & Cz_2z_1 \end{bmatrix} \quad [A2.2]$$

in cui le lettere C indicano la funzione coseno (Appendice 1).

I 9 coseni non sono indipendenti, ma sono legati fra loro da 6 relazioni algebriche. La [A2.1] può essere scritta in forma più compatta estendendo di una componente i vettori (coordinate omogenee):

$$\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} S_{21} \\ 0 \end{bmatrix}^1 + \begin{bmatrix} [R_{21}]^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} [R_{21}]^1 & [S_{21}]^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}^2 = [T_{21}] \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}^2 \quad [A2.3]$$

La [A2.3] definisce la matrice di trasformazione $[T_{21}]$ tra i riferimenti 2 e 1. Se i sistemi 2 e 1 hanno gli assi z paralleli, mentre x e y sono ruotati uno rispetto all'altro di un angolo ζ , risulta:

$$[R_{21}] = [R_{\zeta z}] = \begin{bmatrix} C\zeta & -S\zeta & 0 \\ S\zeta & C\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A2.4]$$

Analogamente per assi y o x paralleli e rotazioni η o ξ rispettivamente, risulta:

$$[R_{\eta y}] = \begin{bmatrix} C\eta & 0 & S\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\eta & 0 & C\eta \end{bmatrix} \quad [A2.5] \quad [R_{\xi x}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\xi & -S\xi \\ 0 & S\xi & C\xi \end{bmatrix} \quad [A2.6]$$

Per le trasformazioni [A2.1], [A2.3], applicate a due riferimenti qualsiasi, valgono le seguenti proprietà:

- ortogonalità: $[R_{ij}]^{-1} = [R_{ij}]^T$ (l'apice T indica la trasposta) [A2.7]

- inversione: $\begin{cases} [R_{ij}]^j = [R_{ji}]^{iT} \\ [S_{ij}]^j = -[R_{ji}]^{iT} [S_{ji}]^i \end{cases}$ [A2.8]

[A2.9]

- composizione: dati i riferimenti 1, 2, ..., $n-1$, n , si ha: [A2.10]

$$[T_{n1}]^1 = [T_{21}]^1 [T_{32}]^2 \dots [T_{n, n-1}]^{n-1}$$

equivalente alle

$$\begin{cases} [S_{n1}]^1 = \sum_{i=2}^n [R_{i-1, 1}]^1 [S_{i, i-1}]^{i-1} \end{cases} \quad [A2.11]$$

$$\begin{cases} [R_{n1}]^1 = [R_{21}]^1 [R_{32}]^2 \dots [R_{n, n-1}]^{n-1} = \prod_{i=2}^n [R_{i, i-1}]^{i-1} \end{cases} \quad [A2.12]$$