

Capitolo 2

Accoppiamento motore-carico

2.1 Introduzione

Come già accennato e come meglio spiegato nei paragrafi successivi, un azionamento elettrico è normalmente composto da un attuatore (il motore), da una trasmissione meccanica e dall'utilizzatore. La trasmissione normalmente comprende un riduttore di velocità e talvolta altri organi di trasformazione del moto (ad esempio da rotatorio a lineare). Scopo del riduttore di velocità è quello di adattare le caratteristiche meccaniche del motore (coppia e velocità) a quelle del carico. Infatti, se trascuriamo le perdite di potenza per attrito all'interno del riduttore, esso riduce la velocità ed amplifica la coppia con lo stesso rapporto:

$$\omega_r = \tau \omega_m \quad (2.1)$$

$$C_m = \tau C_r \quad (2.2)$$

ove ω_m ed ω_r sono la velocità del motore e del carico e C_m , C_r le rispettive coppie; τ è detto rapporto di trasmissione e generalmente si ha $\tau < 1$. Talvolta si suppone che le perdite di potenza del riduttore siano approssimativamente proporzionali alla potenza trasmessa e si assume, quindi:

$$C_r \omega_r = \eta C_m \omega_m \quad (2.3)$$

$$\text{oppure} \quad \eta^* C_r \omega_r = C_m \omega_m \quad (2.4)$$

($\eta, \eta^* \leq 1$) da cui:

$$C_r = \frac{\eta}{\tau} C_m \quad (2.5)$$

$$\text{oppure} \quad C_r = \frac{1}{\eta^* \tau} C_m \quad (2.6)$$

ove le relazioni 2.3 e 2.5 valgono nel caso usuale di flusso di potenza *diretto* (da motore a utilizzatore) e le altre (2.4 e 2.6) valgono nel caso opposto in cui il motore funzioni da freno (flusso di potenza *retrogrado*); η ed η^* sono detti rispettivamente rendimento diretto e retrogrado.

Come meglio spiegato nei capitoli successivi, la coppia che il motore può fornire dipende da diversi fattori, uno tra questi è quasi sempre la velocità. In funzione del tipo di motore e di regolazione impiegata, la relazione coppia-velocità può essere costante o variabile. Ogni tipo di motore può prevedere delle metodologie di regolazione specifiche che modificano la suddetta relazione coppia-velocità. La relazione tra coppia e velocità per prefissati valori degli altri parametri è detta *caratteristica meccanica* del motore.

Anche il carico per essere azionato richiederà una coppia che generalmente dipenderà dalla velocità. Anche per il carico si può definire, perciò, la relativa caratteristica meccanica.

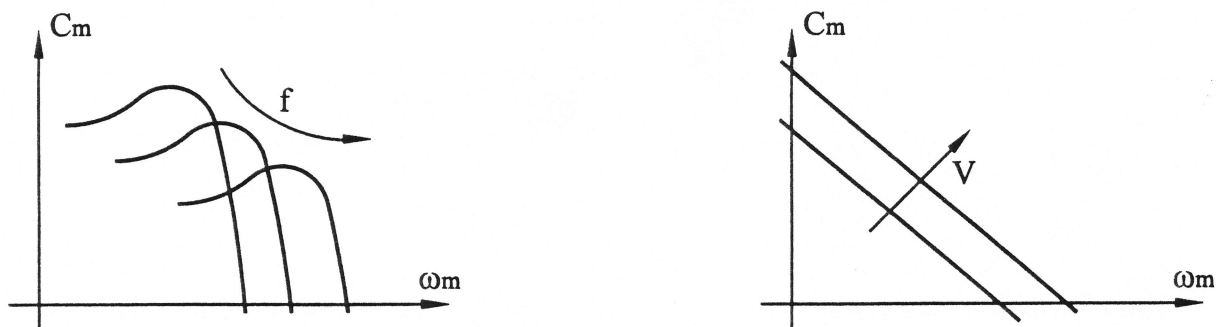


Figura 2.1: Esempi di variazione delle curve caratteristiche. A sinistra motore asincrono regolato in frequenza. A destra motore a corrente continua regolato in tensione.

a. **retta verticale:** motore *GENERATORE di VELOCITA'* ($\omega = K$)

Questi motori girano a velocità costante indipendentemente dalla coppia richiesta dal carico. Ben rappresentati da questa caratteristica sono, ad esempio, il motore sincrono alimentato da corrente alternata (c.a.) a frequenza costante o un motore in corrente continua (c.c.) o brushless retroazionati in velocità.

b. **retta orizzontale:** motore *GENERATORE di COPPIA* ($C = K$)

Ad esempio motori in c.c. o brushless comandati in corrente (quanto è richiesto controllare la velocità o la posizione è necessario introdurre una retroazione).

c. **iperbole equilatera:** motore *GENERATORE di POTENZA* ($C\omega = K$)

Un motore c.c. con eccitazione in serie o universale approssima questa curva (si adegua al carico senza richiedere un accrescimento di potenza).

Queste curve vengono talvolta rappresentate in *scala doppio logaritmica*, per i vantaggi che ne derivano in specifiche applicazioni pratiche.

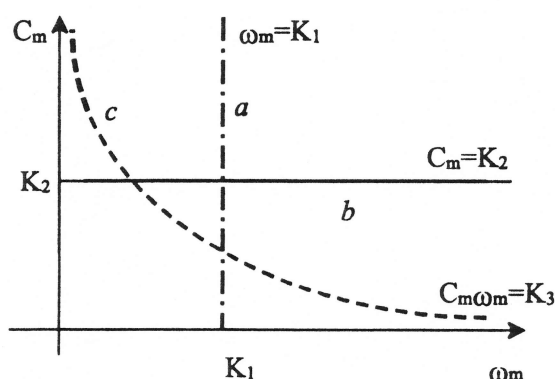


Figura 2.2: Caratteristiche meccaniche ideali dei motori (assi in scala lineare).

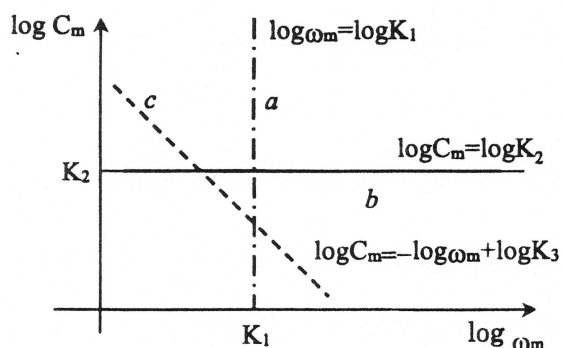


Figura 2.3: Caratteristiche meccaniche ideali dei motori (assi in scala doppio logaritmica).

Solitamente le curve caratteristiche reali dei motori differiscono da quelle sopra indicate, ma alcuni tratti possono approssimarle abbastanza bene. Ad esempio molti tipi di motori

presentano, nella zona di lavoro prossima alla velocità di funzionamento a vuoto, un tratto ad elevata pendenza ed approssimano, quindi, dei generatori di velocità.

Queste *caratteristiche rigide* presentano il vantaggio di rispondere con modeste variazioni di velocità alle variazioni del carico resistente e, di conseguenza, anche il vantaggio, disponendo di un variatore elettronico, di poter pilotare direttamente ω_m agendo con continuità sul parametro di regolazione y .

Altri motori hanno caratteristiche più *elastiche* e rispondono a temporanei incrementi di carico resistente con sensibili riduzioni della velocità; ciò permette loro di superare situazioni di *sovraccarico* senza dover incrementare sensibilmente la potenza.

2.3 Funzionamento da motore, da freno o da generatore

Assegnato un verso positivo per la coppia e la velocità, in generale il motore può trovarsi a dover funzionare con valori positivi o negativi di coppia e/o velocità, ossia in uno qualunque dei *quattro quadranti* del piano cartesiano (ω_m, C_m) . Indicando $W_m = C_m \omega_m$ la potenza meccanica generata dal motore avremo:

- 1° e 3° quadrante $W_m > 0$: motore;
- 2° e 4° quadrante $W_m < 0$: freno.

Il passaggio da un quadrante all'altro può avvenire senza soluzione di continuità (in particolare anche senza variazioni di y), semplicemente al variare del carico resistente, perché normalmente le curve caratteristiche non sono limitate al primo quadrante. Esse possono passare dal primo al quarto quadrante attraversando l'asse delle ω_m nel punto di funzionamento a *vuoto*, mentre possono passare dal primo al secondo quadrante attraversando l'asse delle C_m nel punto di *stallo*.

In altri casi il passaggio avviene variando y (cioè modificando la curva caratteristica) con continuità o meno, a seconda delle possibilità offerte dal tipo di azionamento.

Nel primo e terzo quadrante il motore funziona effettivamente come tale, fornendo potenza al carico, mentre nel secondo e quarto quadrante il motore funziona da *freno*, sottraendo potenza al carico. In alcune situazioni tale potenza viene dissipata in calore congiuntamente a quella proveniente dalla rete, in altre invece il motore funziona da generatore (poiché le macchine elettriche sono reversibili) e una parte di essa viene inviata verso la rete e, quindi, recuperata, nella misura concessa dai dispositivi interposti tra motore e rete. Si distingue quindi tra frenatura *dissipativa* e frenatura *rigenerativa*.

Un classico esempio applicativo è quello dell'azionamento di un ascensore, ove, come noto, il valore del contrappeso è intermedio fra il peso della cabina vuota ed il peso della cabina a pieno carico: di conseguenza questa tende a salire quando è vuota ed a scendere quando è piena (figura 2.4).

Trascurando per semplicità le azioni d'inerzia e assunto positivo il senso di C_m ed ω_m corrispondente alla fase di salita della cabina carica (funzionamento nel primo quadrante), si avrà il funzionamento nel secondo quadrante quando il motore deve far scendere la cabina carica, il funzionamento nel terzo quadrante quando il motore deve far scendere la cabina vuota e il funzionamento nel quarto quadrante quando il motore deve far salire la cabina vuota.

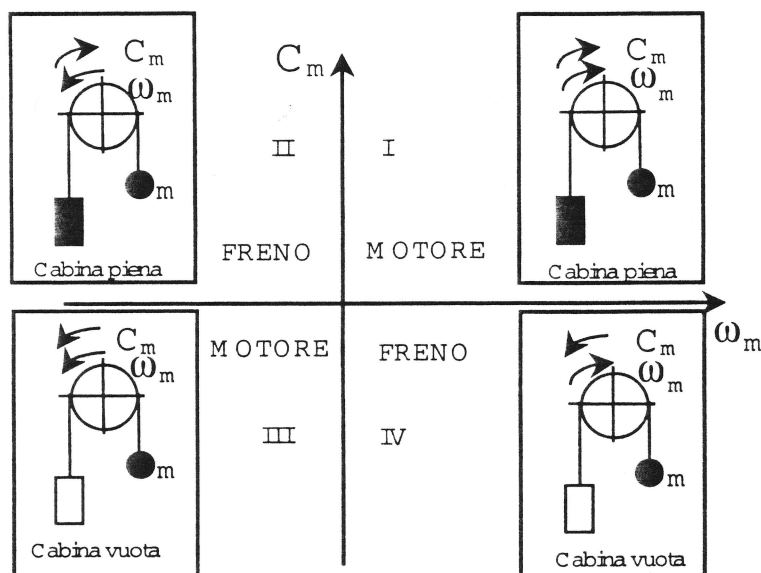


Figura 2.4: Azionamento di un ascensore: possibilità di funzionamento.

In molti casi il funzionamento è previsto solo in due quadranti: ad esempio in un montacarichi privo di contrappeso (nel quale cioè la fune si avvolge o svolge su un apposito tamburo) si avrà solo il funzionamento nel primo e secondo quadrante (salita e discesa), mentre in un veicolo elettrico il motore funzionerà nel primo quadrante durante le salite e nel quarto quadrante durante le discese. Nel caso di carichi puramente passivi (ad esempio elettrodomestici) il funzionamento previsto è limitato al solo primo quadrante.

È comunque da tenere presente che nelle fasi di accelerazione o rallentamento del carico la coppia globalmente richiesta al motore può cambiare di segno, per l'aggiunta delle coppie di inerzia, il cui verso dipende dal segno dell'accelerazione. Ad esempio anche nel caso citato (elettrodomestici) occorrerà prevedere la possibilità di funzionamento nel quarto quadrante se in fase di arresto si richiedessero rallentamenti più rapidi di quelli che si potrebbero avere semplicemente "spegnendo" il motore.

2.4 Campi operativi di un motore

Facendo variare il valore dei parametri per tutti i valori ammissibili, la curva caratteristica si modifica e spazza una porzione del piano $C - \omega$. L'area spazzata rappresenta l'insieme dei possibili punti di funzionamento del motore. E' necessario precisare che una porzione di quest'area viene definita *zona di funzionamento continuativo* e rappresenta le condizioni in cui il motore può funzionare per tempo indefinito. La restante zona, detta di *funzionamento intermittente*, rappresenta l'insieme dei punti per il quale il motore può funzionare solo per brevi periodi per evitare un eccessivo surriscaldamento, si veda ad esempio la figura 2.5. A queste problematiche è dedicato il capitolo 4 sul comportamento termico del motore.

I limiti di queste zone dipendono da diversi fattori del motore stesso o dei suoi sistemi di regolazione. I relativi dettagli verranno illustrati separatamente per ogni motore.

I motori funzionano prevalentemente nel primo e terzo quadrante e le loro caratteristiche di

funzionamento sono generalmente simmetriche rispetto all'origine e, quindi, nei cataloghi vengono spesso rappresentati solo i campi operativi relativi al primo quadrante.

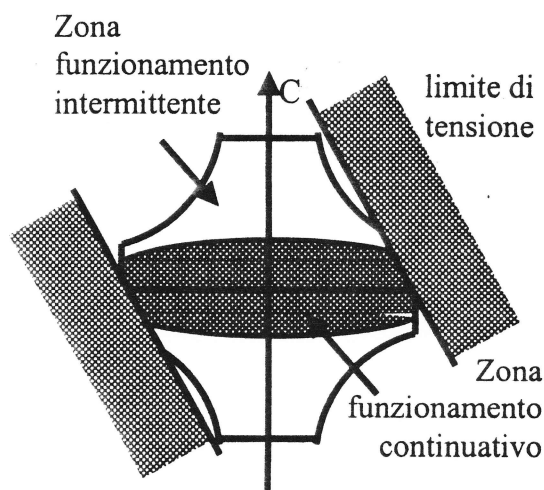


Figura 2.5: Campi operativi di un motore c.c. a collettore: zona continuativa e intermittente.

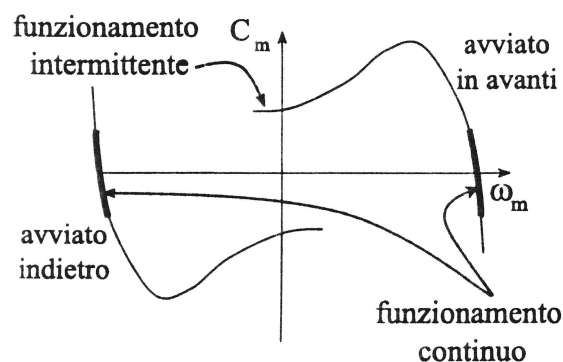


Figura 2.6: Campo operativo di un motore asincrono alimentato direttamente da rete.

Alcuni motori sono sprovvisti di sistemi di regolazione ed i loro campi operativi si riducono a tratti di curve (vedi esempio di figura 2.6).

2.5 Curva caratteristica del carico

Similmente a quanto visto per il motore, è talvolta possibile o conveniente descrivere il comportamento del carico attraverso la sua caratteristica meccanica, ossia il legame intercorrente tra la sua velocità ω_r e la corrispondente coppia C_r (coppia resistente) richiesta per mantenerlo in movimento.

Questa curva è particolarmente utile per studiare carichi che funzionano prevalentemente a velocità costante.

In alcuni casi C_r è anche funzione periodica della posizione angolare dell'albero d'ingresso, o comunque del tempo. Ciò comporta un funzionamento a *regime periodico*, in cui la velocità angolare ha continue oscillazioni attorno al suo valor medio; in tal caso, con la curva caratteristica del carico si rappresenta semplicemente il legame tra il valor medio di C_r ed il valor medio di ω_r . In una prima analisi del comportamento del carico si può far riferimento a tale caratteristica media, almeno fintanto che le oscillazioni di C_r attorno al valore medio sono così rapide da non influenzare sostanzialmente il valore della velocità le cui oscillazioni si mantengono limitate.

Per la scelta dei segni di C_r e ω_r si usa una convenzione diversa da quella impiegata per i motori. Scelto un verso positivo per la velocità ω_r il segno di C_r è positivo quando la coppia esercitata dal carico è *resistente*, ossia si oppone ad essa; pertanto il carico si comporta effettivamente come tale quando il suo punto di funzionamento si trova nel primo o nel terzo quadrante del piano C_r, ω_r , mentre negli altri due quadranti esso si comporta da motore (figura 2.7).

Normalmente la coppia C_r richiesta dal carico è la somma di due termini, uno costante e uno crescente con la velocità ω_r . La componente predominante è generalmente la prima nelle macchine utensili, nelle macchine di sollevamento e trasporto, ecc., mentre è la seconda nelle pompe idrauliche, agitatori, mescolatori, ecc.

La curva caratteristica di un carico puramente passivo ovviamente si troverà solo nel primo e terzo quadrante, passando dall'uno all'altro attraverso l'origine degli assi, punto che rappresenta la tendenza del carico ad arrestarsi in assenza di una coppia motrice applicata ad esso.

In presenza di perdite per attrito radente, può essere presente una discontinuità nell'origine ($\omega_r = 0$).

La caratteristica per velocità prossime allo zero assume quel valore di coppia (positiva o negativa) che permette di vincere gli attriti di *primo distacco* e mettere in moto il carico, in un verso o nell'altro (curva "a" in figura 2.8). Al crescere di ω_r normalmente cresce anche la coppia resistente C_r ; in qualche caso tuttavia, limitatamente alla zona di velocità molto basse, si ha dapprima una diminuzione di C_r , il che può dar luogo ad inconvenienti nel funzionamento.

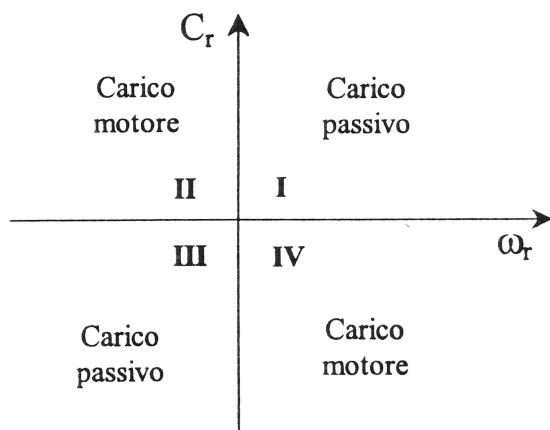


Figura 2.7: Funzionamento nei quattro quadranti di un carico.

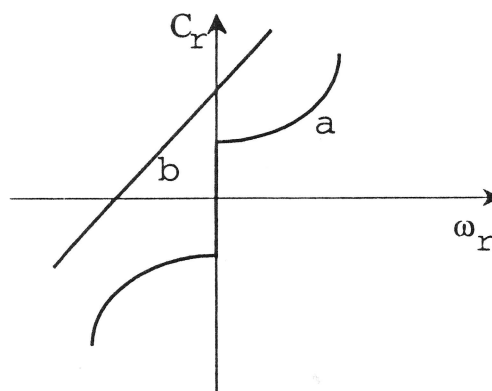


Figura 2.8: Curva caratteristica di un carico puramente passivo (a) e di un carico non completamente passivo (b).

Carichi di tipo non completamente passivo sono ad esempio quelli in cui interviene l'azione di pesi che, abbassandosi, producono lavoro. In questi casi la curva caratteristica passa dal primo al secondo quadrante in un punto la cui ordinata rappresenta la coppia necessaria a tenere fermo il carico e solo in un secondo tempo, per velocità negative sufficientemente elevate, passa dal secondo al terzo quadrante (curva "b" in figura 2.8).

È chiaro allora che in generale occorre predisporre un freno, che si inserisce o si disinserisce automaticamente quando il motore viene spento o riacceso (motori *autofrenanti*), o che interviene almeno quando la velocità si è già annullata (freni di *stazionamento*).

Le curve caratteristiche del carico possono variare in funzione delle mutate condizioni di lavoro: ad esempio negli apparecchi di sollevamento possono traslare verticalmente a seconda del peso che viene sollevato, in un tornio possono variare al variare del diametro del pezzo in lavorazione, in una pompa possono variare a seconda delle resistenze idrauliche incontrate dal fluido, in un veicolo possono variare a seconda della pendenza della strada, ecc.; pertanto si avranno tante curve caratteristiche del carico in relazione ai diversi

valori assunti da una variabile z rappresentativa delle diverse condizioni di lavoro possibili (*parametro di carico*).

Analogamente a quanto fatto per i motori, anche per i carichi è possibile definire un campo operativo (detto anche *luogo dei carichi*) che verrà descritto nel paragrafo successivo.

2.6 Luogo dei carichi

Per la scelta del motore più idoneo per una specifica applicazione si deve definire il luogo dei carichi.

Per *luogo dei carichi* s'intende:

insieme delle condizioni di possibile funzionamento a regime in cui è previsto che il carico possa trovarsi.

Il luogo dei carichi è rappresentato quindi nel piano C_r, ω_r da un'area delimitata da linee, che in generale potranno avere un andamento diverso da quello delle curve caratteristiche. Tali linee possono essere del tipo a velocità costante (una per la velocità minima, l'altra per la velocità massima), del tipo a coppia costante, del tipo a coppia crescente con la velocità, o del tipo a potenza costante (Fig.2.9).

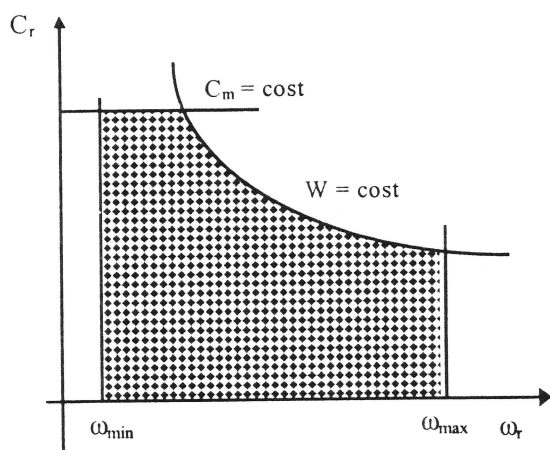


Figura 2.9: Luogo dei carichi generico.

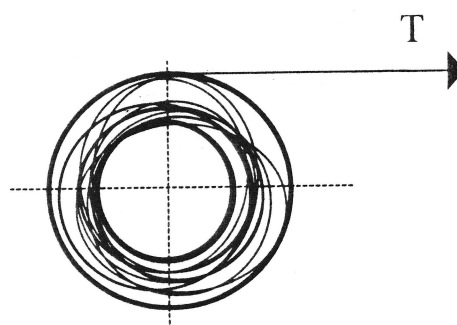


Figura 2.10: Esempio di applicazione con luogo dei carichi a potenza costante (aspo avvolgitore).

A titolo di esempio, si consideri un argano costituito da un tamburo di raggio r su cui si avvolge una fune con tiro costante F , all'estremo della quale è appeso un carico. Un motore collegato all'asse del tamburo deve vincere una coppia resistente che è indipendente dalla velocità di avvolgimento: il luogo dei carichi sarà delimitato dalla retta a coppia costante corrispondente al massimo carico previsto (regolazione a coppia costante; infatti $C_r = F \cdot r$).

Si consideri invece il caso di un aspo svolgitore (Fig.2.10): il materiale in avvolgimento deve essere mantenuto ad una certa tensione costante con una velocità di trasporto costante, indipendentemente dal fatto che l'aspo sia pieno o vuoto. Detto r il raggio (variabile) di avvolgimento, la coppia sarà proporzionale ad r mentre la velocità angolare sarà inversamente proporzionale ad r . Di conseguenza anche la potenza (pari al prodotto della

tensione per la velocità di trasporto, o della coppia per la velocità angolare) è costante e quindi il luogo dei carichi è delimitato da un'iperbole a potenza costante ($W = Fv = C\omega$).

In una stessa *macchina utensile*, il luogo dei carichi del *mandrino* che mantiene in rotazione la fresa è a potenza costante, mentre il luogo dei carichi degli *assi* di traslazione dei carri è a coppia costante.

E' da notare comunque che se partono da velocità nulla (dove a rigore la coppia dovrebbe diventare infinita) le regolazioni a *potenza costante* sono in realtà delle regolazioni miste (dalla velocità nulla ad una *velocità base* si richiede coppia costante, e da questa alla velocità massima si richiede potenza costante).

La determinazione del luogo dei carichi definisce le prestazioni richieste all'azionamento; questa definizione va fatta sempre in modo da non appesantire inutilmente tali richieste.

Bisogna infatti tener presente che nella regolazione a coppia costante tutta la potenza installata viene richiesta esclusivamente alla velocità massima, mentre nella regolazione a potenza costante il dimensionamento va fatto per la coppia massima, che però serve solo quando si è al di sotto della velocità base (Fig.2.11 e 2.12).

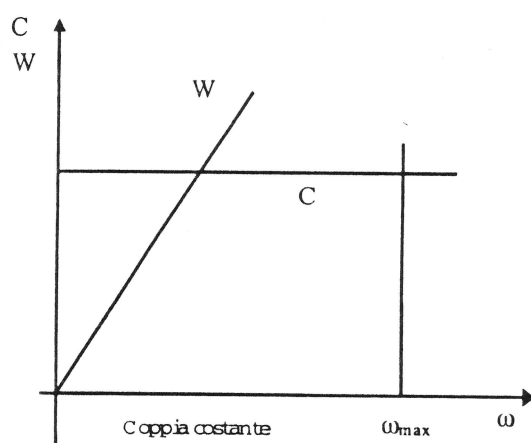


Figura 2.11: Dimensionamento a coppia costante; curve di coppia C e potenza W.

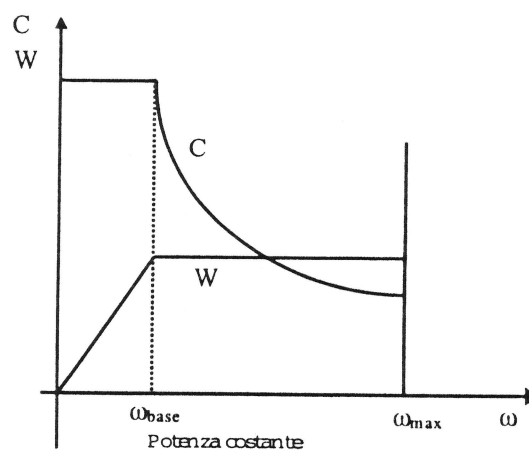


Figura 2.12: Dimensionamento a potenza costante; curve di coppia C e potenza W.

Se non ci si trova in uno di questi due casi semplici, occorre esaminare almeno la possibilità di dividere il luogo dei carichi in due parti contigue, una a coppia costante e una a potenza costante, in modo da facilitare la scelta del tipo di azionamento più opportuno.

Se anche ciò non fosse possibile, bisognerà esaminare il caso di coprire tutta la richiesta utilizzando due diversi tipi di motore.

Infine va considerata l'eventualità di estendere le condizioni di funzionamento agli altri quadranti del piano C_r, ω_r , soprattutto è importante evidenziare se il passaggio dall'uno all'altro deve avvenire con continuità o ciò può non risultare necessario.

Nel caso di carichi dinamici, il luogo dei carichi può facilmente interessare tutti i quadranti.

2.7 Accoppiamento motore-carico

Se il carico viene direttamente collegato al motore (*presa diretta*) le loro velocità coincidono $\omega_r = \omega_m = \omega$; inoltre, *a regime*, deve essere $C_m = C_r$, ossia il punto di funzionamento del sistema motore-carico è dato dall'intersezione delle due curve caratteristiche, quella del motore e quella del carico.

Infatti, se per una certa velocità risultasse $C_m > C_r$, il motore ed il carico accelererebbero fino a raggiungere la condizione $C_m = C_r$. Analogamente, la condizione $C_m < C_r$ provocherebbe un rallentamento. La condizione di equilibrio è, dunque, possibile solo per $C_m = C_r$.

Il punto di funzionamento può essere cambiato agendo sulla variabile di comando y , che modifica la caratteristica meccanica del motore, tuttavia esso può variare anche se y resta costante a causa delle possibili variazioni della caratteristica meccanica del carico, rappresentate dalla variabile z , che talvolta assume il significato di *grandezza di disturbo*, in quanto spesso non è modificabile per effettuare il controllo del movimento. Però in qualche caso, per regolare la velocità di motori in cui la y non può essere fatta variare con continuità, si usano i cosiddetti *freni di lavoro*, che hanno una caratteristica meccanica $C_r(\omega, z)$ con z pilotabile dall'esterno.

Se y e/o z variano piuttosto lentamente si può ritenere che la velocità angolare ω e la coppia trasmessa varino seguendo istante per istante gli spostamenti del punto d'intersezione delle due curve caratteristiche (figura 2.14).

Per variazioni più rapide bisogna considerare *almeno* il cosiddetto *transitorio meccanico*, ossia si può ancora ritenere che ai valori variabili di y e z corrispondano le medesime caratteristiche meccaniche che istante per istante si avrebbero in condizioni di regime, ma il punto rappresentativo non è più dato dall'intersezione delle due.

Consideriamo, ad esempio, il caso che in certo istante motore e carico abbiano una velocità $\bar{\omega}$ diversa da quella di regime (figura 2.13). Le due coppie C_m e C_r corrispondenti al medesimo valore della velocità $\bar{\omega}$ differiscono fra di loro della quantità dovuta alle *coppie di inerzia* del motore e del carico (qui si assume anche $J_r = \text{costante}$). In generale, per una velocità ω :

$$C_m(\omega, y) - C_r(\omega, z) = (J_m + J_r) \frac{d\omega}{dt} \quad (2.7)$$

Il motore e il carico accelerano, quindi, con una accelerazione angolare pari a:

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{C_m - C_r}{J_m + J_r}} \quad (2.8)$$

Più in generale, l'equazione di moto 2.8, costituisce un'equazione differenziale risolvendo la quale si ottiene l'andamento della legge di moto (andamento di spostamento, velocità ed accelerazione nel tempo).

La figura 2.14 mostra che durante il transitorio C_m e C_r possono trovarsi in due quadranti diversi.

Ad esempio si considerino tre situazioni in cui motore e carico si trovino alla velocità $\bar{\omega}$. Il carico non regolabile si trova nel punto A del primo quadrante. Per il motore si considerano le tre curve C_{m1} , C_{m2} e C_{m3} relative a tre diverse regolazioni. Trovandosi alla velocità $\bar{\omega}$, la coppia motrice è rappresentata dai punti 1, 2 o 3, a seconda dei casi. Nel primo caso

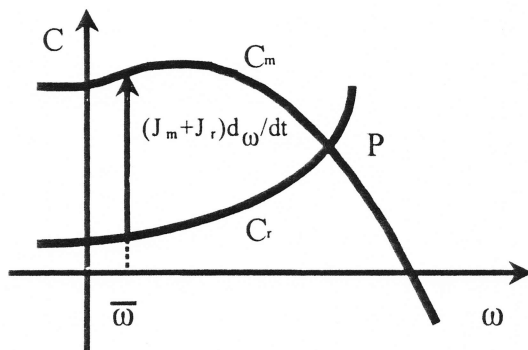


Figura 2.13: Accoppiamento motore-carico.

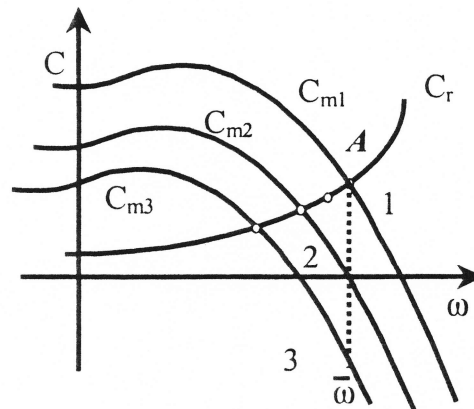


Figura 2.14: Differenti condizioni di accoppiamento.

anche il motore lavora nel primo quadrante ma poiché dà una coppia motrice insufficiente a vincere quella del carico si è in fase di rallentamento; un rallentamento più marcato si ha nel caso 2, dove il motore non fornisce alcuna coppia. Infine, un rallentamento ancora maggiore si ha nel caso 3 in cui il motore lavora nel quarto quadrante applicando una coppia frenante al carico.

Con rapide variazioni dell'accelerazione, conseguenti a rapide variazioni di y o z , non si possono in generale più trascurare i transitori interni al motore ed al carico, e di conseguenza bisogna schematizzare meglio il motore attraverso equazioni che permettano di evidenziare i *transitori elettrici*, e schematizzare in modo altrettanto approfondito il carico mediante modelli matematici di ordine più elevato.

I modelli matematici più complessi non sono in generale né migliori né peggiori di quelli più semplici; il migliore è il più semplice, fra quelli disponibili, che permettono di raggiungere lo scopo prefissato.

Per tale motivo nel seguito si cercherà di affrontare i problemi considerando il solo transitorio meccanico, limitando il ricorso a modelli più sofisticati solo ai casi in cui ciò è indispensabile.

2.8 Stabilità del funzionamento a regime

Analizzando il transitorio meccanico nell'intorno di un punto di funzionamento a regime si può valutare se esso sia *stabile* o meno.

Facciamo riferimento alla figura 2.15 dove sono tracciate la curva caratteristica di un motore e quelle di tre diversi carichi.

I due carichi descritti dalle curve C_{r1} e C_{r3} hanno un unico punto di funzionamento (intersezione tra C_m e C_r), che è stabile perché un eventuale aumento della velocità farebbe aumentare la coppia resistente più di quella motrice, mentre una diminuzione produrrebbe l'effetto opposto.

Invece, per il carico descritto dalla curva C_{r2} si hanno due possibili condizioni di funzionamento a regime, rappresentate rispettivamente dai punti A e B di intersezione delle caratteristiche meccaniche del motore (curva C_m) e del carico (curva C_{r2}).

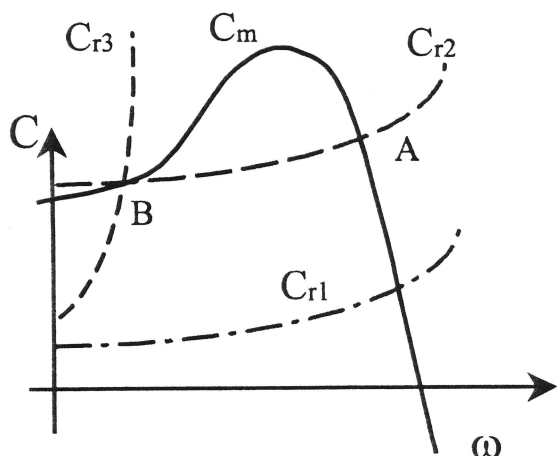


Figura 2.15: Stabilità del funzionamento a regime.

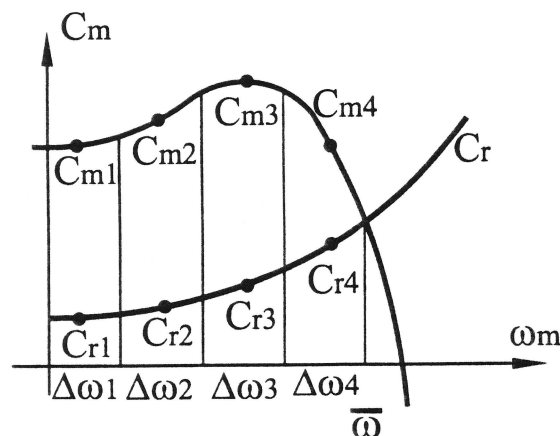


Figura 2.16: Esempio di calcolo del tempo avviamento.

È facile verificare che il punto A rappresenta una condizione di funzionamento stabile: difatti se la velocità diminuisce risulta $C_m > C_r$, l'accelerazione risulta positiva e la velocità torna ad aumentare, viceversa se la velocità aumenta risulta $C_m < C_r$, l'accelerazione risulta negativa e la velocità torna a diminuire. Invece nel punto B il funzionamento è instabile: basta un piccolo aumento, o una diminuzione, di ω perché le coppie producano una accelerazione che tende ad allontanare ulteriormente la velocità ω dal valore di regime.

La condizione di stabilità o di instabilità non dipende esclusivamente dalla caratteristica meccanica del motore: ad es. il punto B risulta stabile se la curva caratteristica del carico, invece di essere quella indicata con C_{r2} , è quella indicata con C_{r3} in Fig. 2.15.

La regola che si ricava da quanto esposto è infatti che il punto considerato è stabile se la pendenza della curva $C_m(\omega)$ è inferiore a quella della curva $C_r(\omega)$, instabile nel caso opposto.

Con riferimento alla figura 2.15 possiamo anche osservare che il motore si può avviare per gli utilizzatori rappresentati dalle curve C_{r1} e C_{r3} , ma non nel caso della curva C_{r2} . Infatti, in questo caso per $\omega = 0$ la coppia resistente supera quella motrice. Tuttavia anche in questo caso, qualora la macchina venga avviata con qualche mezzo esterno, essa si porterà a funzionare correttamente nel punto A.

2.9 Transitorio e tempo di avviamento

Consideriamo un semplice caso in cui un carico sia destinato a funzionare a velocità costante. Quando il motore viene acceso, esso impiegherà un certo tempo a raggiungere la velocità di regime. Per determinare il tempo impiegato a raggiungere tale condizione è necessario studiare il transitorio, come descritto al paragrafo 2.7 ed integrare l'equazione differenziale 2.7. Solo in rari casi si potrà compiere questa operazione per via analitica e spesso si dovrà ricorrere ad approssimazioni numeriche.

La figura 2.16 illustra, come esempio, il caso di un motore asincrono alimentato dalla rete, direttamente collegato ad un carico avente coppia crescente con la velocità (ad esempio

una pompa centrifuga). Motore e carico a regime raggiungono la velocità $\bar{\omega} = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \Delta\omega_3 + \Delta\omega_4$.

Se consideriamo intervalli di tempo brevi in cui la coppia motrice e quella resistente variano poco, considerando l'equazione 2.8 possiamo calcolare il tempo necessario per ottenere la variazione di velocità $\Delta\omega$:

$$\Delta T \simeq \Delta\omega \frac{J_m + J_r}{C_m - C_r} \quad (2.9)$$

Da cui, dividendo in alcuni tratti la curva tra 0 e $\bar{\omega}$, possiamo calcolare il tempo necessario ad ottenere i vari incrementi di velocità $\Delta\omega_i$. Il tempo di avviamento si ottiene sommando i vari tempi parziali

$$t_{avv} \simeq (J_m + J_r) \sum \frac{\Delta\omega_i}{C_{mi} - C_{ri}} \quad (2.10)$$

Per ogni intervallo si considerano i valori medi di coppia motrice e coppia resistente.

Non è necessario che i vari intervalli $\Delta\omega$ siano identici. La precisione aumenta con il numero degli intervalli considerati.

Le relazioni andranno modificate per tenere conto del rapporto di riduzione e del rendimento dell'eventuale riduttore di velocità.

2.10 Esempio applicativo

2.10.1 Introduzione

Consideriamo un caso applicativo estremamente semplice, che permetta, però, di comprendere meglio quanto esposto nei paragrafi precedenti.

Consideriamo un veicolo elettrico movimentato da un motore a corrente continua a magneti permanenti. Supponiamo che un organo (acceleratore) permetta di regolare la tensione di alimentazione.

Trascurando l'induttanza del motore, il legame tra grandezze elettriche e meccaniche è il seguente (vedi anche paragrafo 5.4):

$$V = K\omega + \frac{R}{K}C \quad (2.11)$$

e conseguentemente:

$$(V - K\omega) \frac{K}{R} = C \quad \omega = \frac{V}{K} - \frac{RC}{K^2} \quad (2.12)$$

ove C è la coppia sviluppata, V è la tensione di alimentazione, ω la velocità angolare del motore, R la resistenza elettrica e K una opportuna costante.

Indicando con r il raggio delle ruote e con τ il rapporto di trasmissione tra motore e asse delle ruote, la velocità del veicolo sarà:

$$u = r\omega\tau \quad (2.13)$$

da cui:

$$\omega = \frac{u}{\tau r}$$

Indichiamo con m la massa del veicolo, con g l'accelerazione di gravità e con α l'inclinazione del piano su cui il veicolo si muove (si veda la figura 2.17). Supponiamo per semplicità che le perdite per attrito possano essere approssimate con una coppia resistente equivalente C_0 applicata all'albero motore ed opposta alla velocità.

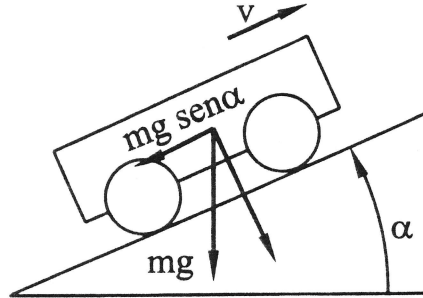


Figura 2.17: Esempio applicativo: trazione di un veicolo elettrico.

2.10.2 Moto a regime

La coppia da fornire al carico si può dedurre da un bilancio di potenza. Eguagliando potenza motrice e resistente otteniamo:

$$C\omega = u m g \sin \alpha + C_0 \omega \operatorname{sgn}(\omega) \quad (2.14)$$

ove $\operatorname{sgn}(x)$ rappresenta la funzione *segno* di x , funzione che vale:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

qui utilizzata per indicare che la coppia di attrito si oppone sempre alla velocità. Considerando la relazione 2.13 si ottiene:

$$C\omega = \tau r m g \sin \alpha + C_0 \omega \operatorname{sgn}(\omega) \quad (2.15)$$

Dividendo entrambi i termini della 2.15 per ω , si ottiene la curva caratteristica del carico:

$$C_r = z + C_0 \operatorname{sgn}(\omega)$$

con

$$z = \tau r m g \sin \alpha$$

Siamo, ora, in grado di tracciare le curve caratteristiche del motore (figura 2.18) e del carico (figura 2.19).

Per il motore sono indicate due caratteristiche che si ottengono alimentandolo con tensione positiva V_1 e negativa V_2 . La tensione V rappresenta il parametro di regolazione genericamente indicato con y nei paragrafi precedenti.

Per il carico sono state rappresentate le caratteristiche relative a differenti pendenze della strada. La curva si modifica al variare della pendenza α della strada e, quindi, del parametro z .

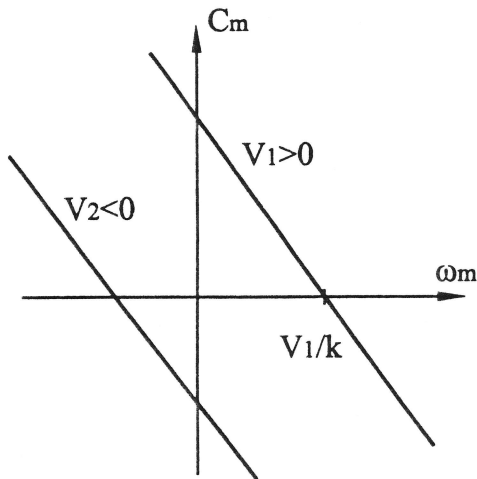


Figura 2.18: Curve caratteristiche del motore al variare della tensione di alimentazione.

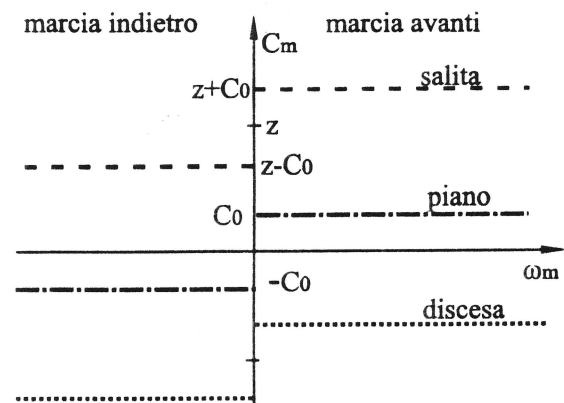


Figura 2.19: Curve caratteristiche del carico al variare della pendenza della strada.

Supponiamo di conoscere R e K (dati di catalogo del motore), nonché il valore di C_0 ed m (dati del veicolo), nonché la pendenza della strada.

Se alimentiamo il motore con una tensione V_1 , una volta esaurito il transitorio, esso viaggerà ad una velocità $u = \omega_1 \tau r$.

La velocità ω_1 si ottiene eguagliando la caratteristica del motore con quella del carico

$$(V_1 - K\omega_1) \frac{K}{R} = z + C_0 \operatorname{sgn}(\omega_1) \quad (2.16)$$

da cui

$$\omega_1 = \frac{V_1}{K} - \frac{R(z + C_0)}{K^2} \quad (2.17)$$

In assenza di carico il motore avrebbe raggiunto la velocità $u = \bar{\omega}_1 = V_1/K > \omega_1$ (figura 2.20).

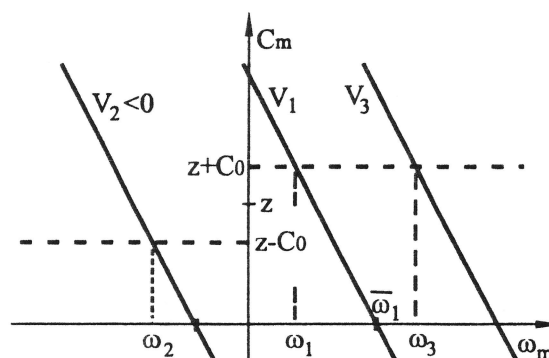


Figura 2.20: Veicolo avviato in avanti in salita (pendenza costante).

Per incrementare la velocità ad un valore ω_3 è necessario aumentare la tensione, portandola al valore V_3 .

Per invertire la velocità (ω_2) è necessario abbassare la tensione di alimentazione fino a portarla ad un valore negativo (ad esempio $V = V_2$):

$$\omega_2 = \frac{V_2}{K} - \frac{R(z - C_0)}{K^2}$$

In questo caso il veicolo percorrerebbe una discesa in retromarcia a velocità $\omega_2 r \tau$ ed il motore funzionerebbe meccanicamente da freno ed elettricamente da generatore, mentre a motore non alimentato il veicolo scenderebbe con velocità crescente (accelerazione uniformemente accelerata).

Se le variazioni di tensione avvengono lentamente, possiamo supporre che la velocità istantanea sia sempre molto prossima a quella indicata dall'equazione 2.17 per il corrispondente valore di tensione V .

2.10.3 Transitori semplici

Nel caso in cui la tensione V vari rapidamente e le accelerazioni siano consistenti, le azioni d'inerzia non possono essere ignorate. In tal caso, si dovrà tenere conto della coppia di inerzia sul motore e della forza d'inerzia sul veicolo. Il bilancio di potenza istantaneo diviene, quindi:

$$(C - J_m \dot{\omega}) \omega = ((z + C_0 \operatorname{sgn}(\omega)) + ma) u \quad (2.18)$$

ove $a = du/dt$ è l'accelerazione del veicolo e J il momento d'inerzia del motore, mentre quello delle ruote è stato trascurato per semplicità.

Riorganizzando l'equazione 2.18 otteniamo:

$$C_m - C_r = (J_m + m\tau^2 r^2) \dot{\omega}$$

o anche:

$$C_m - C_r = J^* \dot{\omega}$$

ove $J^* = J_m + m\tau^2 r^2$ è il momento d'inerzia equivalente totale (motore più carico) e nel seguito indicato semplicemente come J .

Nel nostro caso si ottiene:

$$(V - K\omega) \frac{K}{R} - C_r = J\dot{\omega} \quad (2.19)$$

Ipotizziamo che la velocità iniziale sia ω_0 ed immaginiamo che la tensione di alimentazione venga istantaneamente posta pari a V_1 , a cui a regime compete una velocità $\omega_1 = V_1/K - RC_r/K^2$. Tuttavia, la velocità non può variare istantaneamente, ma il transitorio richiederà tempo per portare la velocità al valore ω_1 .

Posto:

$$\alpha = \frac{VK}{R} - C_r \quad e \quad \beta = \frac{K^2}{R}$$

si ottiene $\alpha - \beta\omega = J\dot{\omega}$ ed anche

$$\dot{\omega} = -\frac{\beta}{J}\omega + \frac{\alpha}{J} \quad (2.20)$$

che integrata diviene:

$$\omega = Ae^{-t\beta/J} + \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.21)$$

la costante d'integrazione A si determina ricordando che per $t = 0$ la velocità vale ω_0 .
Dalla relazione 2.21 si ottiene:

$$\omega_0 = A + \frac{\alpha}{\beta}$$

da cui:

$$A = \omega_0 - \frac{\alpha}{\beta}$$

La funzione che descrive il transitorio dalla velocità da ω_0 ad ω_1 è, dunque:

$$\omega = (\omega_0 - \omega_1)e^{-t/\tau_m} + \omega_1 \quad \text{con} \quad \tau_m = \frac{RJ}{K^2} \quad (2.22)$$

In sostanza, la velocità passerà in modo asintotico da ω_0 a ω_1 (figura 2.21) con legge esponenziale e costante di tempo τ_m .

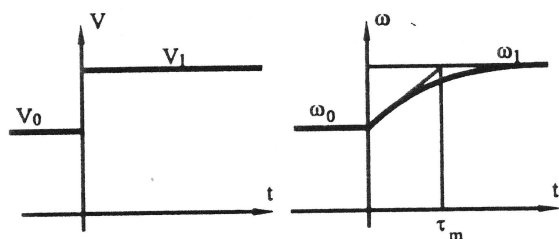


Figura 2.21: Variazione della velocità in funzione della tensione (gradino di tensione da V_0 a V_1).

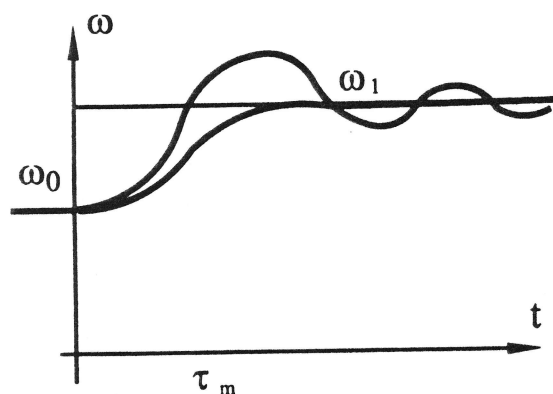


Figura 2.22: Possibile variazione di velocità per transitori del secondo ordine (gradino di tensione da V_0 a V_1).

Uno studio più approfondito richiederebbe l'utilizzo di un modello del motore più perfezionato, che includa anche l'induttanza L . Tale modello è descritto dall'equazione

$$V = K\omega + \frac{R}{K}C + \frac{L}{K} \frac{dC}{dt} \quad (2.23)$$

Si otterrebbe un comportamento analogo a quanto descritto in precedenza, ma retto da equazioni differenziali del secondo ordine, con comportamento che può diventare oscillante per bassi valori dello smorzamento ($\xi < 1$)

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2 J}{K^2 L}} \quad (2.24)$$

a questo proposito vedi anche figura 2.22, il capitolo 8 e l'appendice C.

2.10.4 Transitori complessi

Uno studio più complesso dei transitori è necessario quando la tensione di alimentazione varia con continuità nel tempo. In tal caso, è necessario integrare l'equazione differenziale 2.19 tenendo conto che la tensione V non è costante ma varia.

Maggiori dettagli si trovano nel capitolo 8 dedicato al controllo dei motori.

Nel seguito ci limiteremo a citare il caso in cui la tensione vari linearmente nel tempo, passando da V_0 a V_1 in un tempo T , ossia:

$$V = V_0 + \frac{t}{T} (V_1 - V_0) \quad (2.25)$$

Tralasciando i calcoli, si deduce che questa variazione di tensione corrisponde a chiedere al motore una velocità "teorica" variabile nel tempo pari a:

$$\omega = \omega_0 + \frac{t}{T} (\omega_1 - \omega_0) \quad (2.26)$$

ove ω_0 ed ω_1 sono le velocità di regime corrispondenti a V_0 e V_1 e deducibili dall'equazione 2.12.

Tuttavia, la variazione di velocità avverrà con un certo ritardo τ_m e con un andamento asintotico, come qualitativamente indicato dalla figura 2.23.

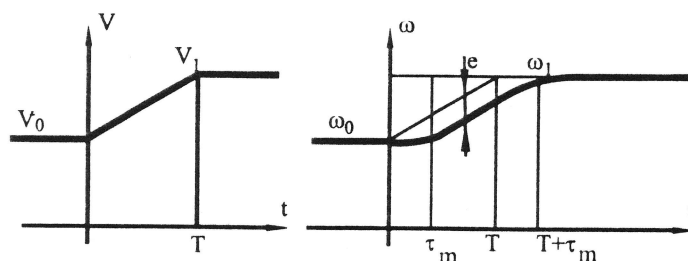


Figura 2.23: Variazione di velocità corrispondente ad una variazione a rampa di tensione da V_0 a V_1 .

Più lenta è la variazione di tensione (cioè più grande è T rispetto a τ) tanto minore sarà la differenza tra velocità "teorica" e velocità reale, infatti si dimostra che l'errore di velocità vale:

$$e \simeq (\omega_1 - \omega_0) \frac{\tau_m}{T} \quad (2.27)$$

2.10.5 Funzionamento nei vari quadranti

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato il funzionamento del veicolo al variare della tensione di alimentazione. Analogo comportamento si può avere se cambiano le condizioni di carico. Nel nostro caso, ad esempio, la pendenza della strada (figura 2.24).

Se alimentato con tensione positiva, il motore a vuoto tenderebbe a girare alla velocità ω_0 , ma se il veicolo incontra una salita, esso rallenterà sempre più in funzione della pendenza (si porterà, ad esempio, alle velocità ω_2 o ω_1).

Al contrario, in discesa sarà il veicolo che trascinerà il motore, il quale raggiungerà una velocità maggiore di ω_0 (ad esempio ω_3). In questo ultimo caso il motore funzionerà

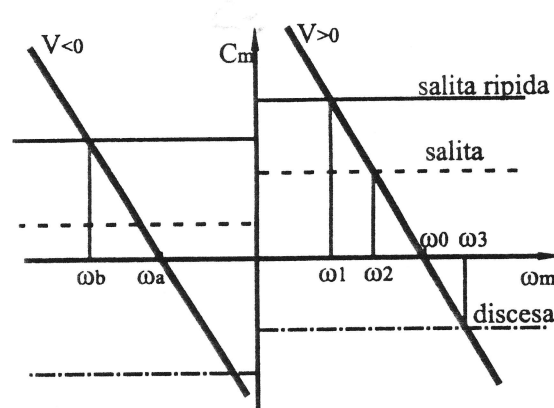


Figura 2.24: Comportamento del veicolo a tensione del motore costante e differenti pendenze della strada.

da freno, in quanto se esso venisse escluso il veicolo accelererebbe sempre più in discesa. In queste condizioni il motore produce energia elettrica che viene immagazzinata nella batteria di alimentazione, ricaricandola.

Il motore funziona da generatore anche quando il veicolo è in salita, ma il motore viene alimentato con tensione negativa, provocando marcia indietro verso la discesa (ω_b).

Lo studio dei transistori è analogo a quanto visto nei paragrafi precedenti.

2.10.6 Campi operativi

Esaminiamo i campi operativi del motore e del carico in versione semplificata. Una trattazione più precisa verrà svolta nei paragrafi successivi.

Innanzitutto, il motore avrà una velocità massima alla quale può funzionare senza danneggiarsi e, quindi, potremo tracciare due limiti $\pm\omega_{max}$ (figura 2.25).

Inoltre, la tensione massima erogabile dal motore non può superare un valore massimo che dipende dal dispositivo di alimentazione disponibile (la batteria in questo caso) e la massima tensione sopportabile dal motore senza danneggiarsi. Esistono, quindi, due limiti $\pm V_{max}$.

Infine, il motore avrà due valori massimi di coppia sopportabili, quella di picco C_{max} e quella continuativa \overline{C} (detti valori si desumono dal catalogo).

Il motore per brevi periodi può fornire una coppia superiore a \overline{C} , ad esempio per superare brevi ripide salite. Permanendo in tali condizioni troppo a lungo, però, si surriscalderebbe eccessivamente bruciando. Situazioni di questo tipo si devono, pertanto, evitare.

Diversamente, salite che richiedono una coppia inferiore a \overline{C} possono essere percorse anche per periodi lunghi.

Data la limitazione dovuta alla tensione massima, alle alte velocità non è possibile sviluppare alte coppie e, quindi, in caso di salite ripide non si riesce a raggiungere piena velocità.

La figura 2.26 rappresenta il luogo dei carichi. La limitazione $\pm\omega_{max}$ dipende dalla massima velocità tollerabile dal veicolo. I valori di coppia massima sono quelli corrispondenti alle massime pendenze sopportabili dal veicolo, dipendenti da diversi fattori quali pericolo di slittamento, di ribaltamento, eccetera...

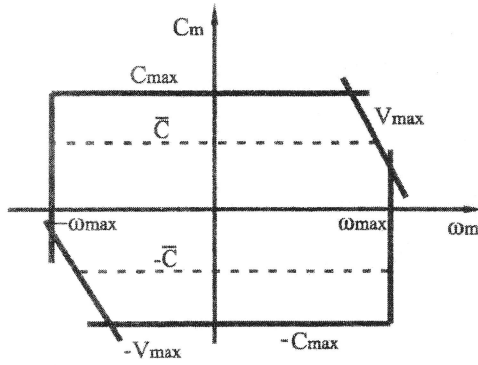


Figura 2.25: Campo operativo del motore. La zona compresa tra i valori $\pm \bar{C}$ è quella continuativa.

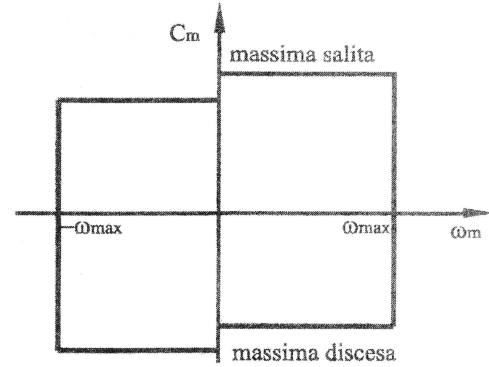


Figura 2.26: Luogo dei carichi.

2.11 Effetto del rapporto di trasmissione

2.11.1 Introduzione

Come già accennato, per questioni relative ad ottimizzazioni costruttive, non è in genere possibile o opportuno accoppiare direttamente un motore ad un carico. Generalmente infatti un motore può fornire una coppia inferiore a quella richiesta, ma può girare ad una velocità superiore. Per questo si ricorre frequentemente ad un riduttore di velocità destinato ad adattare le esigenze del motore a quelle del carico e viceversa.

In un riduttore si definisce *rapporto di trasmissione*:

$$\tau = \omega_2 / \omega_1 \quad (2.28)$$

dove:

- ω_2 : velocità dell'albero di uscita
- ω_1 : velocità dell'albero di entrata.

Nel nostro caso abbiamo $\omega_2 = \omega_r$ e $\omega_1 = \omega_m$. Ovviamente il riduttore di velocità è tale solo se l'albero 1 è più veloce dell'albero 2, ossia se è $\tau < 1$, altrimenti è un *surmultiplicatore di velocità*.

In tutti i casi si possono determinare due relazioni matematiche che vincolano tra loro le velocità angolari ω_1, ω_2 e le coppie C_1, C_2 in entrata e in uscita, e consentono quindi di associare a tutte le possibili condizioni di ingresso (C_1, ω_1) le corrispondenti condizioni di uscita (C_2, ω_2), e viceversa. Tali relazioni in buona sostanza esprimono l'equilibrio dinamico degli alberi di ingresso e di uscita.

Come già accennato, nel caso di un *riduttore ideale* e cioè senza perdita di potenza, una di tali relazioni è data dalla costanza del rapporto di trasmissione, l'altra dalla conservazione della potenza trasmessa:

$$\boxed{\begin{cases} \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ C_2 \omega_2 = C_1 \omega_1 \end{cases}} \quad (2.29)$$

ossia:

$$\omega_2 = \omega_1 \tau \quad (2.30)$$

$$C_2 = \frac{C_1}{\tau} \quad (2.31)$$

Nel passaggio dall'albero di entrata a quello di uscita la riduzione della velocità viene compensata con un uguale aumento percentuale della coppia; pertanto nei riduttori di velocità l'albero *lento* viene realizzato con dimensioni maggiori dell'albero *veloce*.

Invece nel caso di potenza persa proporzionale a quella trasmessa, si definisce *rendimento* il rapporto tra potenza uscente ed entrante. Nel caso la potenza fluisca da motore ad utilizzatore si parla di *rendimento diretto* η , di *rendimento retrogrado* η^* nel caso opposto

$$\eta = \frac{C_2 \omega_2}{C_1 \omega_1} \quad (2.32)$$

oppure

$$\eta^* = \frac{C_1 \omega_1}{C_2 \omega_2} \quad (2.33)$$

e la relazione 2.31 si trasforma nella 2.5 o nella 2.6.

Se il riduttore è collegato a monte con un motore avente, nel piano C_1, ω_1 , una curva caratteristica $C_m(\omega_m)$ e a valle con un carico avente nel piano C_2, ω_2 una curva caratteristica $C_r(\omega_r)$, ci si potrà ricondurre al caso di accoppiamento diretto del motore con il carico riportando la $C_m(\omega_m)$ dal piano C_1, ω_1 al piano C_2, ω_2 , ridotta secondo le equazioni 2.30 e 2.31. Ad ogni punto della $C_m(\omega_m)$ corrisponderà un punto $C'_m(\omega_r)$ ottenuto dividendo le ordinate della $C_m(\omega_m)$ per τ e moltiplicando le corrispondenti ascisse per τ (figura 2.27). Similmente ci si può ricondurre al caso di accoppiamento diretto riportando la $C_r(\omega_r)$ dal piano C_2, ω_2 al piano C_1, ω_1 , ottenendo una curva $C'_r(\omega_m)$ ridotta secondo le equazioni 2.30 e 2.31 (figura 2.28).

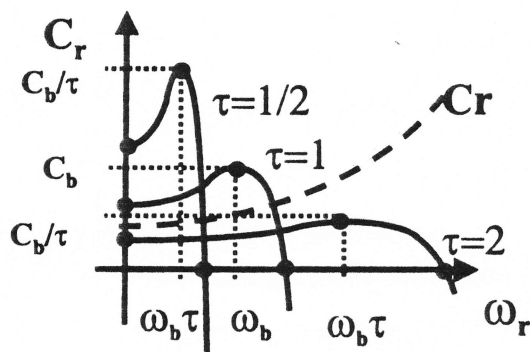


Figura 2.27: Riduzione della curva caratteristica del motore nel piano del carico.

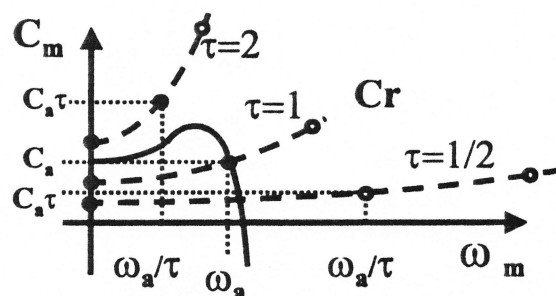


Figura 2.28: Riduzione della curva caratteristica del carico nel piano del motore.

Se le curve sono riportate in *diagrammi logaritmici*, poiché moltiplicare o dividere per τ equivale ad aggiungere o togliere $\log \tau$, queste trasformazioni equivalgono a traslazioni delle curve caratteristiche lungo rette inclinate di -45° (Fig. 2.29 e 2.30: nelle figure successive il simbolo \log verrà spesso omissso).

Il punto di funzionamento a regime sarà dato, nel piano C_2, ω_2 , dall'intersezione della $C'_m(\omega_r)$ con la $C_r(\omega_r)$; lo stesso punto sarà dato, nel piano C_1, ω_1 , dall'intersezione della $C_m(\omega_m)$ con la $C'_r(\omega_m)$.

Anche il transitorio meccanico può essere studiato riconducendosi al caso di accoppiamento diretto, pur di sostituire ai momenti di inerzia reali J i *momenti d'inerzia ridotti* J' . Questa riduzione avviene secondo il quadrato del rapporto di trasmissione, essendo il momento d'inerzia dato dal rapporto fra la coppia d'inerzia (che, per l'equazione 2.31, varia

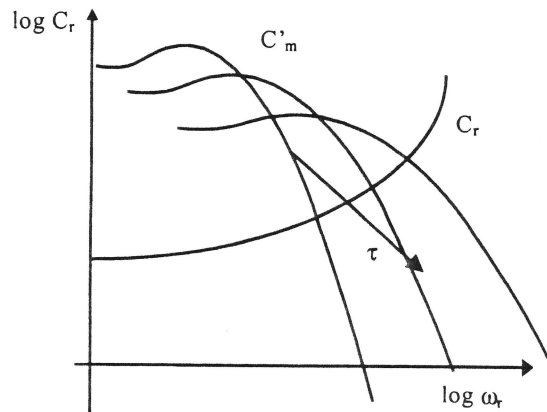


Figura 2.29: Curve caratteristiche del motore ridotte al carico rappresentate in diagrammi logaritmici.

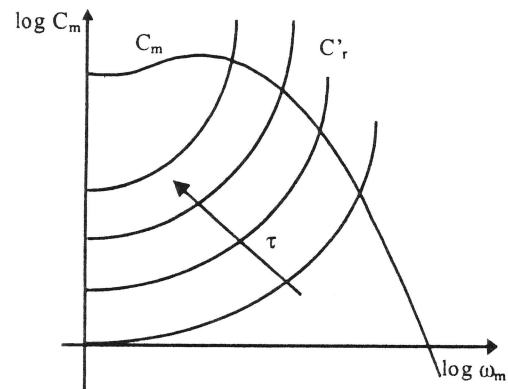


Figura 2.30: Curve caratteristiche del carico ridotte al motore rappresentate in diagrammi logaritmici.

inversamente a τ , come tutte le coppie) e l'accelerazione angolare (che, per la equazione 2.30, varia proporzionalmente a τ , come le velocità).

Equivalentemente si può dire che mentre la riduzione delle coppie viene fatta conservando la potenza, la riduzione dei momenti di inerzia viene fatta conservando l'energia cinetica. Infatti, indicando con J' il momento di inerzia "ridotto" all'albero 1 (cioè trasportato) di un componente calettato (cioè collegato) sull'albero 2 ed avente inerzia J , dovendo essere equivalente sia dal punto di vista delle azioni d'inerzia che dell'energia cinetica risulta:

$$\left. \begin{aligned} C &= J' \dot{\omega}_1 = \tau J \dot{\omega}_2 \\ E_c &= \frac{1}{2} J' \dot{\omega}_1^2 = \frac{1}{2} J \dot{\omega}_2^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow J' = \tau^2 J \quad (2.34)$$

Ciò posto, l'equazione di equilibrio dinamico ridotta all'albero motore, diviene:

$$C_m - C'_r = (J_m + J'_r) \frac{d\omega_m}{dt} \quad (2.35)$$

ossia:

$$C_m - \tau C_r = (J_m + \tau^2 J_r) \frac{d\omega_m}{dt} \quad (2.36)$$

mentre la stessa equazione, ridotta all'albero condotto, diviene:

$$C'_m - C_r = (J'_m + J_r) \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.37)$$

ossia:

$$\frac{C_m}{\tau} - C_r = \left(\frac{J_m}{\tau^2} + J_r \right) \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.38)$$

Spesso la velocità del carico è imposta e quella del motore dipende dalla riduzione scelta per adattare il motore con coppia motrice più conveniente e, quindi, è più significativo utilizzare le equazione 2.37 e 2.38 in luogo delle 2.35 e 2.36.

2.11.2 Regime

Per illustrare l'effetto del rapporto di trasmissione τ , consideriamo la 2.37, dapprima a regime (ossia per $d\omega_r/dt = 0$), poi in transitorio. Consideriamo, inoltre, motori con differenti curve caratteristiche.

- a. *Motore generatore ideale di velocità* In Fig.2.31 è rappresentata una generica curva caratteristica di un carico $C_r(\omega_r)$, e le curve caratteristiche del motore $C'_m(\omega_r)$, ridotte all'asse del carico in corrispondenza di diversi valori di τ , nel caso in cui il motore sia un generatore ideale di velocità, con curva caratteristica perfettamente verticale ed una coppia massima erogabile.

In questo caso la velocità ω_m del motore è fissa, mentre a seconda del valore di τ nel piano C_2, ω_2 la $C'_m(\omega_r)$ è data da una serie di curve verticali corrispondenti ai vari valori $\omega_r = \tau \omega_m$.

Si vede allora che la velocità di regime del carico si *abbassa* al diminuire di τ ed *aumenta* all'aumentare di τ (almeno finché la coppia massima ridotta scende sotto quella richiesta dal carico: dopo non c'è più condizione di regime). In questo caso un *cambio di marce*, cioè un dispositivo che consente di scegliere il rapporto di trasmissione tra un numero finito di valori, può evidentemente essere utilizzato per modificare la velocità del carico.

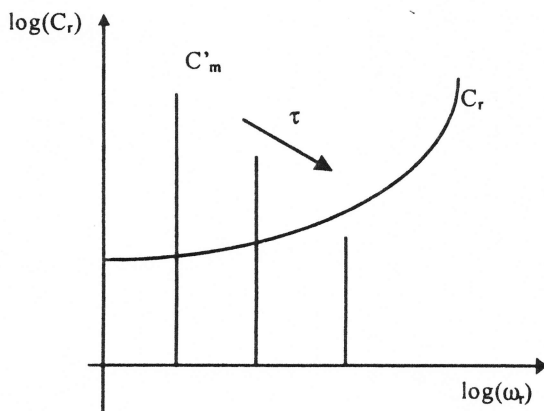


Figura 2.31: Effetto sul carico dell'utilizzo di un riduttore con un motore generatore ideale di velocità.

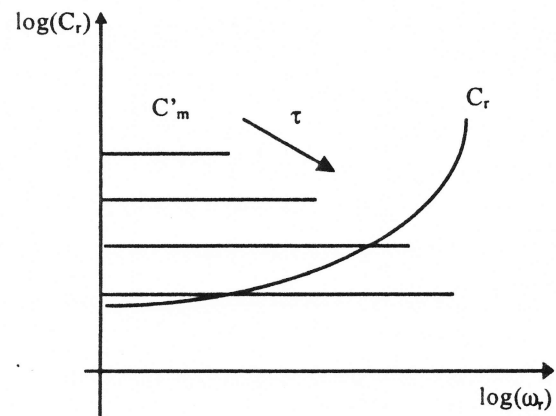


Figura 2.32: Effetto sul carico dell'utilizzo di un riduttore con un motore generatore ideale di coppia.

- b. *Motore generatore ideale di coppia*

Nel caso rappresentato in figura 2.32, la $C_r(\omega_r)$ è uguale a quella del caso precedente, ma il motore è un generatore ideale di coppia, con curva caratteristica perfettamente orizzontale ed una velocità massima raggiungibile. In questo caso infatti al variare di τ varia (in modo inverso) la coppia C'_m , per cui la velocità di regime del carico si *innalza* al diminuire di τ e si *abbassa* all'aumentare di τ (almeno finché la velocità del motore non supera il suo massimo: dopo non c'è più condizione di regime). In

questo caso un *cambio di marce* serve per modificare conseguentemente il valore della coppia disponibile, ma agisce sulla velocità di regime in senso opposto alle aspettative (per aumentare ω occorre diminuire τ).

c. *Motore generatore ideale di potenza*

Nel caso rappresentato in Fig.2.33, il motore è un generatore ideale di potenza (le scale sono logaritmiche), con curva caratteristica inclinata di -45° . In questo caso al variare di τ la curva caratteristica $C'_m(\omega_r)$ trasla su se stessa, e di conseguenza la velocità di regime del carico ω_r non varia (varia solo quella del motore ω_m): in questo caso un *cambio di marce* sarebbe perfettamente inutile. Questo è quello che accade ad esempio nei veicoli azionati con un motore in c.c. eccitato in serie, come ad esempio i tram, che non hanno infatti cambio di marce.

d. *Motore con caratteristica generica*

In Fig.2.34 il motore ha una curva caratteristica complessa, approssimativamente suddivisa in una zona a coppia costante, una a potenza costante ed una a velocità costante: al diminuire di τ la velocità di regime del carico ω_r dapprima aumenta, poi raggiunge un massimo ed infine diminuisce. Si può dimostrare che il massimo della velocità si ha nella condizione in cui il motore eroga la *massima potenza*. In generale dunque la massima velocità del carico si ottiene con quel rapporto di trasmissione τ che fa lavorare il motore nelle condizioni di potenza massima.

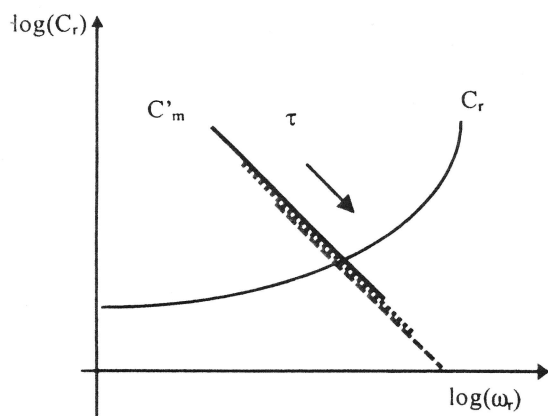


Figura 2.33: Effetto dell'utilizzo di un riduttore con un motore generatore ideale di potenza.

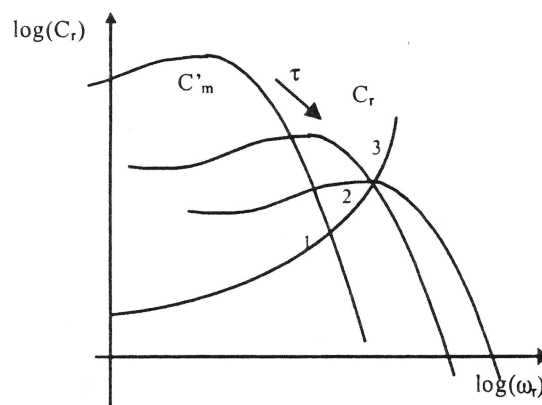


Figura 2.34: Effetto dell'utilizzo di un riduttore con un motore generico.

2.11.3 Transitorio

Per quanto riguarda l'accelerazione $d\omega_r/dt$ che si ha durante il transitorio, le equazioni 2.37 e 2.38 danno indicazioni contrastanti: al diminuire di τ la coppia motrice ridotta C'_m aumenta, di conseguenza aumenta la coppia d'inerzia, ma siccome aumenta anche il momento d'inerzia ridotto globale, l'accelerazione potrà aumentare o diminuire a seconda del valore di ω_r , dell'andamento di $C'_m(\omega_m)$ e del valore di τ .

Analizzeremo il caso in cui la coppia resistente è trascurabile rispetto alla coppia accelerante e quindi tutta la coppia motrice va in accelerazione.

Dalla 2.38 si ha (quando $C_r = 0$):

$$C_m = \left(\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r \right) \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.39)$$

Per una prefissata coppia motrice:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r} C_m \quad (2.40)$$

Il valore di τ ottimo, ossia che rende massima l'accelerazione del carico, è quello che minimizza la quantità a denominatore del secondo membro. Dovrà, pertanto, essere:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r \right) = 0 \quad (2.41)$$

ossia:

$$-\frac{J_m}{\tau^2} + J_r = 0 \quad (2.42)$$

da cui:

$$\tau = \tau_{opt} = \sqrt{\frac{J_m}{J_r}} \quad (2.43)$$

In corrispondenza di tale valore di τ , detto *rapporto di riduzione ottimo*, per la relazione 2.42 l'inerzia del motore ridotta al carico eguaglia quella del carico (criterio detto di *bilanciamento del carico*). Si dimostra, anche, che a parità di accelerazione, τ_{opt} è quello che minimizza la coppia motrice.

Al risultato dell'equazione 2.43 si poteva arrivare osservando che in molte applicazioni τ è così grande che J'_m diventa trascurabile in confronto a J_r , e quindi si può ammettere che tutta la potenza motrice serva ad accelerare il carico; in tal caso l'accelerazione del carico si ottiene dalla:

$$C_m = J_r \frac{d\omega_r}{dt} \tau \quad (2.44)$$

ed è tanto maggiore quanto minore è τ . Qualora interessi aumentare l'accelerazione, l'eventuale scelta di un motore caratterizzato da un minor valore di J_m non porta di per sé alcun vantaggio. Se, al contrario, τ è così piccolo che J_r diventa trascurabile in confronto a J'_m , il motore non sente la presenza del carico, la sua potenza motrice serve solo ad accelerare se stesso, mentre l'accelerazione del carico risulta ovviamente tanto maggiore quanto maggiore è τ :

$$C_m = \frac{J_m}{\tau} \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.45)$$

L'eventuale scelta di un motore caratterizzato da un minor valore di J_m è, a parità di tutto il resto, vantaggiosa, almeno fino a quando $J'_m > J_r$.

La condizione ideale è quindi quella in cui i momenti d'inerzia del motore e del carico, ridotti al medesimo asse, sono uguali: $J'_m = J_r$; le *energie cinetiche del motore e del carico*

sono uguali tra loro, sicché della potenza motrice una metà serve ad accelerare il motore mentre l'altra metà attraversa il riduttore e va ad accelerare il carico (vedi anche figura 2.35).

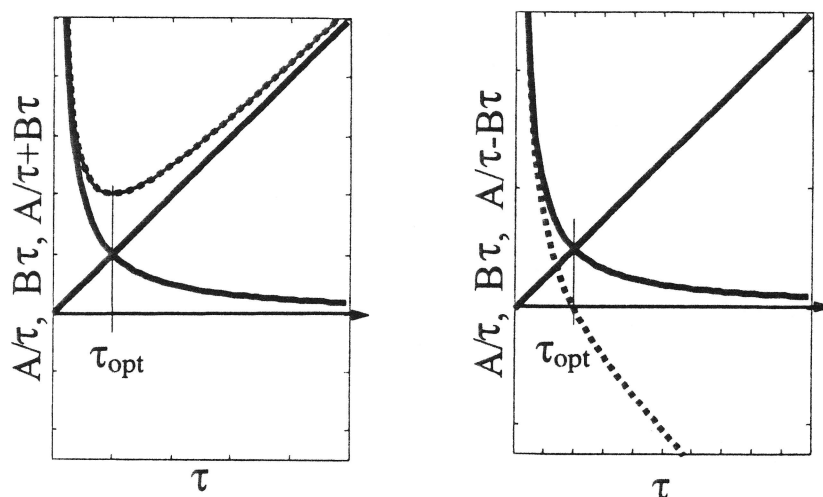


Figura 2.35: Valore coppia rms in funzione del rapporto di trasmissione τ ; il valore “ottimo” è quello per il quale i due termini del tipo A/τ e $B\tau$ si eguagliano in valore assoluto.

Nel caso di carichi statici al variare di τ non cambia la potenza motrice.

La figura 2.36 mostra come si modifica il luogo dei carichi visto dal motore al variare del rapporto di trasmissione per carichi statici (sinistra) e dinamici (destra).

Mentre nel primo caso al diminuire del rapporto di riduzione aumenta la velocità ma diminuisce la coppia, nel secondo caso ciò avviene fino a raggiungimento del rapporto di riduzione ottimo, dopo di che aumentano entrambi. Non è, perciò, quasi mai conveniente mettere rapporti di riduzione più spinti rispetto a τ_{opt} .

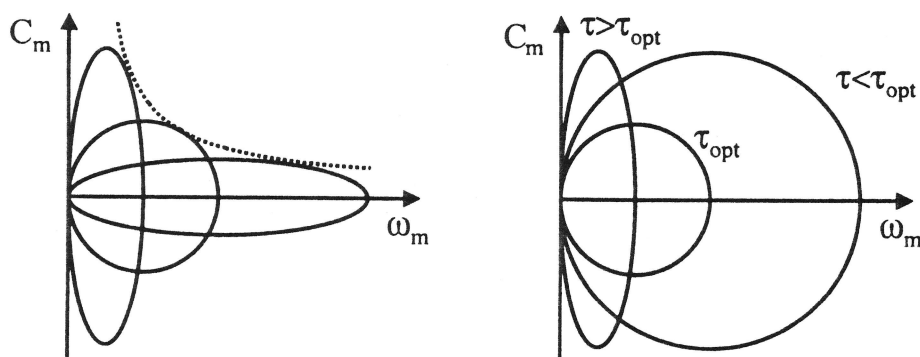


Figura 2.36: Modificazione del luogo dei carichi per carichi “statici” (a sinistra) o “dinamici” (a destra).

Nelle applicazioni più spinte, quali il *controllo d'assi*, utilizzando servomotori di elevate prestazioni, si possono realizzare valori di τ uguali o abbastanza vicini a τ_{opt} , col che il motore risulta adattato dinamicamente al carico. Combinando l'equazione 2.40 e la 2.43 si

verifica che per $\tau = \tau_{opt}$ l'accelerazione del carico è massima, ed è ricavabile dalla seguente espressione:

$$\frac{C_m}{\sqrt{J_m}} = 2\sqrt{J_r} \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.46)$$

La formula 2.43 fornisce un valore ottimo teorico per τ ; nel progetto di un azionamento elettrico è conveniente, quando possibile, utilizzare un valore di τ molto prossimo a τ_{opt} . Questa scelta permette di massimizzare le prestazioni dinamiche (maggiori accelerazioni) a parità di coppia motrice, oppure a parità di accelerazione è quella che minimizza la coppia motrice e, quindi, la taglia del motore.

Queste considerazioni non vanno però utilizzate a cuor leggero, perché in molte situazioni non possono essere trascurati altri fattori quali coppie resistenti e limiti operativi di motori e riduttori che influenzano la scelta del valore del rapporto di riduzione.

Nel caso fossero presenti anche coppie resistenti, la coppia motrice avrebbe la seguente espressione:

$$C_m = \left(\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r \right) \frac{d\omega_r}{dt} + \tau C_r \quad (2.47)$$

La ricerca della accelerazione massima (coppia minima) per C_r e $d\omega_r/dt$ con segno concorde porta al seguente risultato:

$$\frac{dC_m}{d\tau} = -\frac{J_m}{\tau^2} \frac{d\omega_r}{dt} + J_r \frac{d\omega_r}{dt} + C_r = 0 \quad (2.48)$$

da cui, posto $\dot{\omega}_r = d\omega_r/dt$, si ottiene:

$$\tau_{opt} = \sqrt{\frac{J_m \dot{\omega}_r}{J_r \dot{\omega}_r + C_r}} \quad \text{per } \dot{\omega}_r C_r > 0 \quad (2.49)$$

Nel caso, invece, di C_r e $\dot{\omega}_r$ discordi (coppia in realtà motrice) può esistere un valore che addirittura annulla la coppia motrice e che si ottiene dalla seguente equazione:

$$\left(\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r \right) \dot{\omega}_r = -\tau C_r \quad (2.50)$$

Il valore di τ ottimo risulta essere:

$$\tau_{opt} = \sqrt{\frac{J_m \dot{\omega}_r}{-J_r \dot{\omega}_r - C_r}} \quad \text{per } \dot{\omega}_r C_r < 0 \quad (2.51)$$

Ad entrambe le soluzioni delle equazioni 2.49 e 2.51 si può pervenire minimizzando il valore del quadrato della coppia motrice:

$$\frac{d}{d\tau} C_m^2 = 0 \quad (2.52)$$

Le equazioni 2.49 e 2.51 possono essere unificate considerando il modulo del denominatore:

$$\tau_{opt} = \sqrt{\left| \frac{J_m \dot{\omega}_r}{J_r \dot{\omega}_r + C_r} \right|} \quad (2.53)$$

che per $C_r = 0$ coincide con la relazione 2.43.

Nel caso in cui $J_r \dot{\omega}_r + C_r = 0$, si ha:

$$C_m = \frac{J_m}{\tau} \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.54)$$

ed allora il rapporto che minimizza la coppia motrice è infinito:

$$\tau_{opt} = \infty \quad (2.55)$$

Infine per azioni d'inerzia trascurabili rispetto alla coppia resistente si otterrebbe

$$\tau_{opt} = 0. \quad (2.56)$$

Si osserva che, generalmente, $\dot{\omega}$ e C_r variano nel tempo e, di conseguenza, anche il rapporto di riduzione ottimo varierebbe. Nelle applicazioni pratiche, dato che τ deve essere costante, per scegliere il valore più conveniente occorre fare riferimento all'istante più critico o a valori medi.

2.12 Scelta del motore e del rapporto di trasmissione per carichi a velocità costante

In molte situazioni il carico funziona a velocità costante e richiede una coppia costante. Il riduttore migliore è quello che consente di utilizzare il motore di taglia (potenza nominale) inferiore. Nel caso di carichi a velocità costante la scelta più ovvia è quella di scegliere un motore che, almeno approssimativamente, sia un generatore ideale di velocità. Ad esempio, si può considerare un motore asincrono collegato direttamente a rete e che può fornire una velocità approssimativa di $N \simeq 60f/p$ [giri/min] ($p = 1, 2, 3, \dots$) ossia circa $\omega_m \simeq \pi 100/p$ [rad/s], ove p rappresenta il numero di paia di poli ed $f = 50$ Hz la frequenza di rete (vedi paragrafo 5.5).

Individuata la condizione di funzionamento più gravosa, si identifica il valore di coppia resistente C_r e si calcola la potenza resistente $W_r = C_r \omega_r$ che deve essere fornita.

La taglia del motore si sceglie in maniera che la potenza nominale (cioè continuativa del motore) sia superiore a quella resistente aumentata per tenere conto del rendimento del riduttore $W_m > W_r/\eta$. Il rapporto di riduzione si calcola infine dal rapporto tra la velocità del carico e quella nominale del motore $\tau = \omega_r/\omega_m$.

A seconda dei motori e dei riduttori disponibili si possono individuare più gruppi di motore e riduttore adatti. La scelta definitiva va fatta con criteri economici o analizzando altri fattori quali, ad esempio, il tempo di avviamento.

Quando la velocità del carico lo consente si può valutare la possibilità di eliminare il riduttore di velocità, assumendo, perciò $\tau = 1$.

Nel caso di coppia variabile ciclicamente (ad esempio macchina a regime periodico) il criterio esposto deve essere adattato, nel senso che la taglia del motore va scelta in modo che la coppia resistente quadratica media sia inferiore a quella continuativa del motore (vedi anche capitolo 4) e che la coppia resistente di picco sia inferiore a quella massima erogabile dal motore (vedi paragrafo 2.16).

Per lo studio del transitorio di avviamento si fa riferimento al paragrafo 2.9.

2.13 Scelta del motore e del rapporto di trasmissione per carichi statici

Indichiamo con *carichi statici* tutti quelli che funzionano a velocità sostanzialmente costante o lentamente variabile e pertanto le azioni di inerzia non esistono o sono di entità trascurabile rispetto alle altre. Si farà generalmente riferimento al campo operativo *continuo* del motore. Il rapporto di riduzione migliore è quella che permette di selezionare il motore di taglia minima (in questo caso potenza nominale minima).

Nel caso di carichi statici si usano sovente motori asincroni comandati da inverter.

2.13.1 Adattamento dei campi operativi

Come già detto, normalmente tra motore e carico è previsto un riduttore di velocità, dato che normalmente il carico richiede coppie alte e velocità basse rispetto a quanto fornito da motori di pari potenza.

Quindi se cercassimo di sovrapporre i campi di lavoro di motore e carico senza interporre un riduttore di velocità ci troveremmo facilmente in una situazione come quella rappresentata in Fig.2.37.

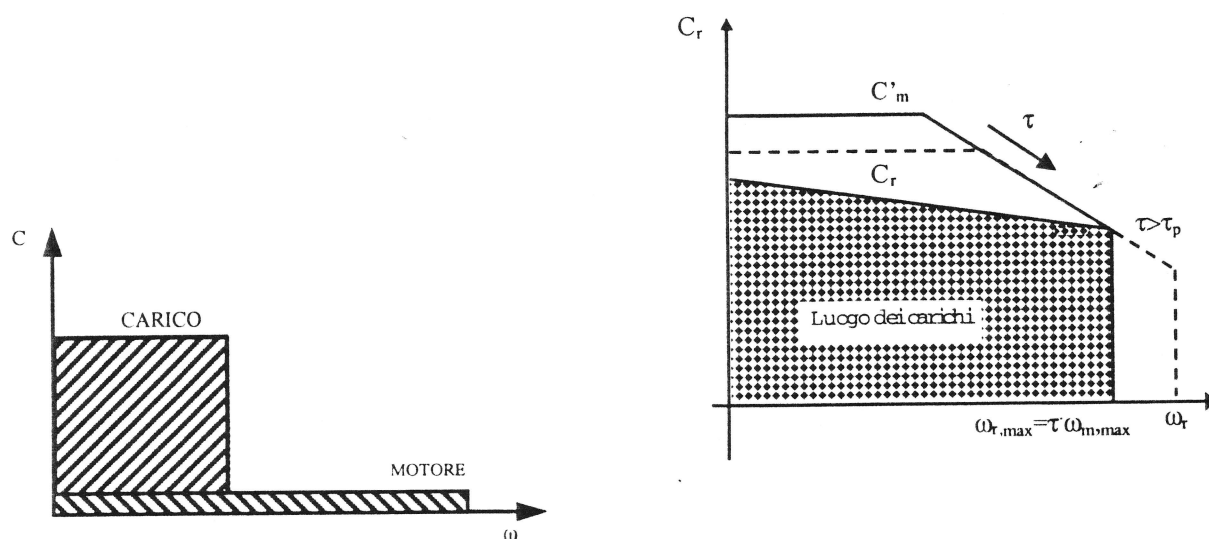


Figura 2.37: Campi di lavoro di motore e carico a confronto.

Figura 2.38: Scelta del rapporto di trasmissione con un motore con campo di lavoro con un tratto a potenza costante (scala doppio logaritmica).

La scelta del rapporto di riduzione più idoneo può essere fatta studiando la macchina a monte del riduttore, nel piano C_1, ω_1 , o a valle del riduttore, nel piano C_2, ω_2 .

Quando si passa dal piano C_1, ω_1 al piano C_2, ω_2 o viceversa, le curve limiti che racchiudono il campo di funzionamento del motore o il luogo dei carichi subiscono lo stesso tipo di trasformazioni illustrate per le curve caratteristiche: nei diagrammi in scala logaritmica esse traslano nella direzione a -45° della quantità corrispondente al valore del rapporto τ . Per tenere conto del rendimento del riduttore ($\eta < 1$) la coppia resistente va aumentata adeguatamente prima di tracciare il luogo dei carichi oppure va maggiorata in seguito la taglia del motore.

Il riduttore raggiunge l'obiettivo di *adattare staticamente* il motore al carico se lo si progetta con quel valore di τ per cui il campo di funzionamento del motore, riportato nel piano del carico, ricopre completamente, ma senza eccedere, il luogo dei carichi previsto (un adattamento di tipo dinamico, fatto cioè tenendo conto anche dei moti transitori, verrà studiato in seguito).

Naturalmente, poiché il riduttore è un *componente passivo* (cioè non può aumentare la potenza in gioco) è indispensabile scegliere un motore la cui potenza massima superi, o perlomeno sia uguale, alla potenza massima richiesta dal carico, che spesso, ma non sempre, corrisponde alla condizione di velocità massima $\omega_{r,max}$.

Fatta la scelta, si fa traslare il campo di funzionamento del motore lungo rette inclinate di -45° fino a ricoprire nel modo migliore il luogo dei carichi richiesto. L'entità della traslazione determina il rapporto di trasmissione τ del riduttore.

Evidentemente se $\omega_{m,max}$ è la velocità massima che il motore può fornire, ed $\omega_{r,max}$ la velocità massima prevista per il carico, il rapporto di trasmissione dovrà valere almeno:

$$\tau > \tau_p = \frac{\omega_{r,max}}{\omega_{m,max}} \quad (2.57)$$

Ragioni evidenti di economicità portano alla scelta di un motore avente il minimo surplus di potenza: il rapporto di trasmissione τ va quindi scelto in modo da far corrispondere alla potenza massima del motore la potenza massima richiesta dal carico. La potenza richiesta dal carico è generalmente crescente con la velocità e se il motore fornisce la potenza massima in corrispondenza alla sua velocità massima (motore del tipo a *coppia costante*), si potrà scegliere $\tau = \tau_p$.

In genere si avrà a disposizione un esubero di coppia e/o di velocità.

Si analizzano alcuni casi frequenti, immaginando che sia disponibile un motore che fornisca esattamente la potenza massima richiesta al motore.

Esempio 1

Il campo di funzionamento del motore termina con un tratto a *potenza costante* (motore del tipo a potenza costante, Fig.2.38).

In tal caso, pur essendoci una certa libertà di scelta di τ (che potrebbe essere maggiore di τ_p), si fa ancora $\tau = \tau_p$, sia perché è preferibile conservare un margine di coppia (da impiegare nei moti transitori per il passaggio rapido da una condizione di regime ad un'altra) piuttosto che un margine di velocità, sia perché in questo modo viene meglio ricoperto il campo di funzionamento alle velocità più basse.

Esempio 3

In altri casi, ad esempio motore a coppia costante e carico a potenza costante, si dovrà necessariamente scegliere un motore di potenza esuberante (Fig.2.40) perché, se la potenza massima del motore si limita ad uguagliare (o superare di poco) la potenza massima richiesta dal carico, non esiste alcun valore di τ che consente il completo ricoprimento del luogo dei carichi.

La regola fondamentale da osservare per evitare esuberi di coppia, velocità e potenza è quella di *scegliere preliminarmente un tipo di motore il cui campo di lavoro abbia, almeno approssimativamente, la stessa forma del luogo dei carichi*: un motore del tipo a coppia

Esempio 2 Se il motore fornisce la sua potenza massima solo fino ad una velocità $\omega_{m,b2}$ inferiore ad $\omega_{m,max}$, si dovrà fare (Fig.2.39):

$$\frac{\omega_{r,max}}{\omega_{m,b2}} > \tau_p \quad (2.58)$$

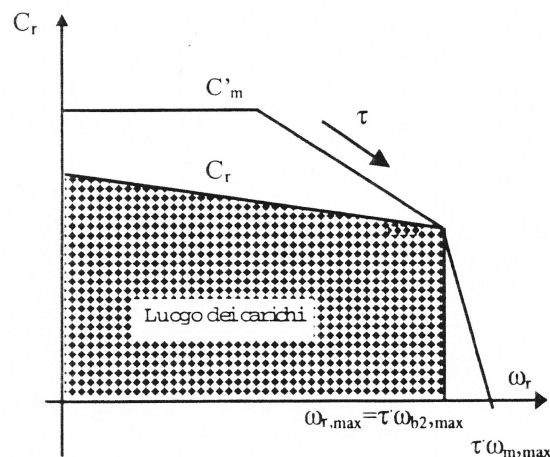


Figura 2.39: Campo di lavoro del motore con potenza massima in corrispondenza di $\omega_{m,b2}$.

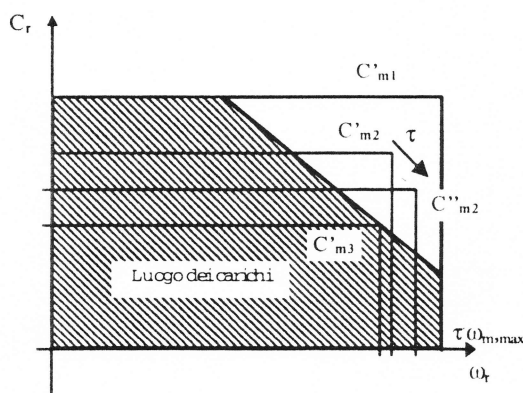


Figura 2.40: Scelta di un motore con potenza esuberante.

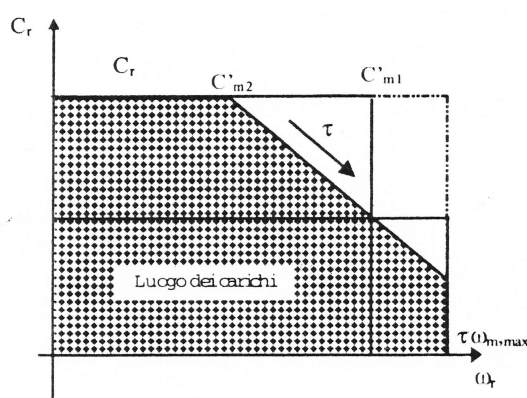


Figura 2.41: Ricoprimento del campo di lavoro usando un cambio di marce.

costante se il luogo dei carichi è a coppia costante, un motore del tipo a potenza costante se il luogo dei carichi è a potenza costante.

Non rispettando questa regola si ottengono soluzioni caratterizzate da un costo eccessivo del motore, del convertitore e del riduttore.

Si consideri, ad esempio, una macchina utensile: il carro ha una caratteristica a coppia costante, mentre il mandrino a potenza costante. Per questo motivo su una macchina utensile carro e mandrino sono azionati da motori distinti.

Poiché però non si ha mai una esatta corrispondenza di forma tra campo di lavoro del motore e luogo dei carichi, il motore dovrà in generale avere una potenza massima superiore a quella richiesta dal carico. Per determinare il valore della potenza massima del motore in modo corretto, si tenga presente che normalmente tutti i motori di una medesima famiglia hanno campi funzionamento che differiscono tra loro solo per un fattore moltiplicativo della coppia C_m : si passa quindi da un motore avente una determinata

taglia al motore di un'altra taglia con una semplice traslazione del suo campo di lavoro lungo l'asse delle ordinate (scala logaritmica).

Di conseguenza per la scelta del motore e del riduttore si può partire da un campo di funzionamento *adimensionale* del motore (in cui cioè le ordinate sono date in rapporto alla *coppia nominale*) e lo si sposta nel piano logaritmico in direzione qualunque fino a ricoprire al meglio il luogo dei carichi: il rapporto di trasmissione si ottiene quindi dal confronto delle ascisse, mentre da confronto delle ordinate si individua la taglia del motore. Nel caso che la coppia resistente sia costante occorrerà utilizzare il campo operativo continuativo del motore. Nel caso la coppia sia variabile occorrerà verificare che la coppia quadratica media sia all'interno della zona continuativa (vedi capitolo 4) e che quella di picco sia all'interno della zona intermittente.

Per lo studio del transitorio si fa riferimento al paragrafo 2.9.

2.13.2 Cambi di velocità

Nel caso tipico in cui il campo di funzionamento del motore è prevalentemente a coppia costante, mentre il luogo dei carichi è prevalentemente a potenza costante, il motore prescelto risulterà avere una potenza veramente esuberante (curva tratteggiata C'_{m1} in figura 2.41). Per evitare ciò senza cambiare tipo di motore, conviene impiegare un *variatore meccanico di velocità* di tipo *a gradini* (cambio di marce) o eventualmente *continuo*.

Questi dispositivi, spesso impiegati con motori a velocità non regolabile (ad es. un motore asincrono alimentato direttamente dalla rete) con lo scopo di variare la velocità in uscita, vengono anche molto opportunamente impiegati con motori a velocità regolabile perché permettono di ridurre la potenza installata (cioè la taglia del motore).

Nel caso di Fig.2.41, per ottenere una prima sensibile riduzione della potenza del motore, basterebbe chiaramente un cambio di velocità con due sole marce, che darebbero luogo alle curve C'_{m2} e C'_{m3} , capaci, nel loro insieme, di ricoprire l'intero luogo dei carichi; ulteriori riduzioni della potenza installata si ottengono aumentando il numero di marce. Continuando ad aumentare il numero delle marce si tende, come limite, al caso di un *variatore meccanico continuo*, e la potenza installata diventa minima.

I cambi di marcia hanno il difetto di non consentire una variazione continua del rapporto di trasmissione, ma hanno una serie di vantaggi:

- semplicità di costruzione
- lunga durata
- notevole capacità di carico
- rendimento elevato
- basso costo, ecc.

per cui vengono spesso preferiti ai variatori meccanici.

Il minimo numero di marce necessarie è determinato dal grado di elasticità delle curve caratteristiche del motore. Comunque in generale si avranno delle *buche di potenza* (Fig.2.42 e 2.43), ossia la potenza massima del motore potrà essere disponibile soltanto a certe particolari velocità.

Per ridurre le buche di potenza, oltre a ricorrere all'ovvio, ma oneroso, sistema di aumentare il numero delle marce disponibili, si debbono scegliere i valori di τ intermedi in modo da uguagliare fra loro tutte le buche di potenza. Ciò si ottiene facendo sì che nel passaggio da una marcia alla successiva il campo di lavoro trasli di una quantità fissa (Fig.2.43), il

che significa, trattandosi di scale logaritmiche, che i vari rapporti di trasmissione debbono stare fra loro in progressione geometrica

$$\tau_{i+1} = Q\tau_i \quad (2.59)$$

Se le marce sono k , la ragione Q della progressione geometrica può essere determinata con la relazione seguente:

$$Q = \sqrt[k-1]{\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}}} \quad (2.60)$$

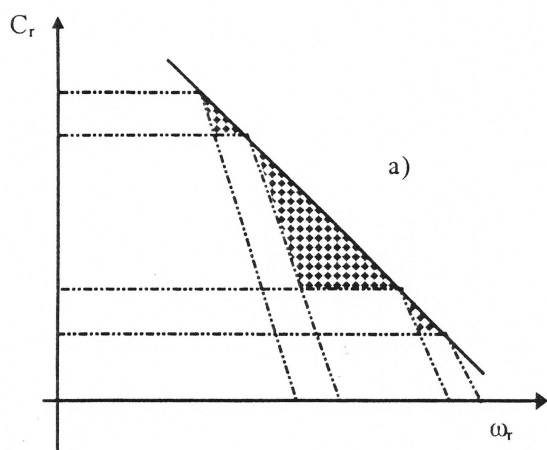


Figura 2.42: Scelta dei rapporti di trasmissione in progressione non geometrica (a) (scala logaritmica).

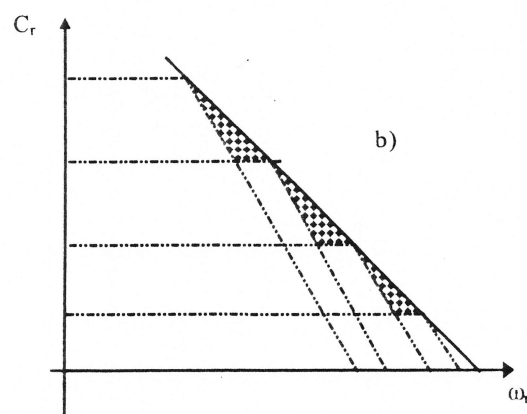


Figura 2.43: Scelta dei rapporti di trasmissione in progressione geometrica (b) (scala logaritmica).

2.14 Scelta del motore e del rapporto di trasmissione per carichi di durata limitata

Quando il motore funziona per periodi estremamente brevi rispetto alla sua costante termica (vedi capitolo 4 sul comportamento termico), come avviene ad esempio negli alzacristalli elettrici o nelle regolazioni degli specchietti retrovisori delle autovetture, si può fare riferimento al caso più simile tra quelli trattati, ma limitandosi a verificare la coppia di picco, senza considerare la coppia continuativa.

Si ottiene, in generale, una sensibile riduzione della taglia del motore.

2.15 Scelta del motore e del rapporto di trasmissione per carichi dinamici

2.15.1 Introduzione

Finora si è considerato il caso in cui al motore viene chiesto di poter lavorare in tante diverse condizioni di regime; il moto transitorio da un regime ad un altro è supposto

garantito dall'esistenza di un certo *surplus* di coppia motrice in fase di accelerazione, e dalla coppia resistente in caso di decelerazione.

Consideriamo ora il caso in cui i transitori siano frequenti e di "intensità" tali che l'effetto delle azioni d'inerzia non possa più essere trascurato nel confronto con le coppie resistenti. In questi casi gioca un ruolo fondamentale la legge di moto con i relativi diagrammi di velocità ed accelerazione.

In alcuni casi la legge sarà assegnata, in molti altri la legge non sarà completamente specificata e la selezione di una legge di moto "ottima" consentirà l'adozione di un motore di taglia minore.

Ad esempio, nel caso di un posizionatore sarà sovente assegnato il movimento totale da compiere ed il tempo per ottenerlo, ma talvolta si sarà liberi di scegliere la legge di moto (cioè il diagramma delle velocità e delle accelerazioni).

Sempre a titolo di esempio consideriamo la legge di figura 2.44 che consiste in un primo tratto ad accelerazione costante positiva, in un secondo tratto a velocità costante e di un terzo tratto ad accelerazione costante negativa.

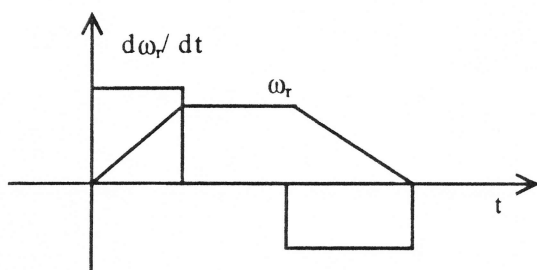


Figura 2.44: Leggi di moto ad accelerazione costante a tratti: diagrammi di velocità ed accelerazione.

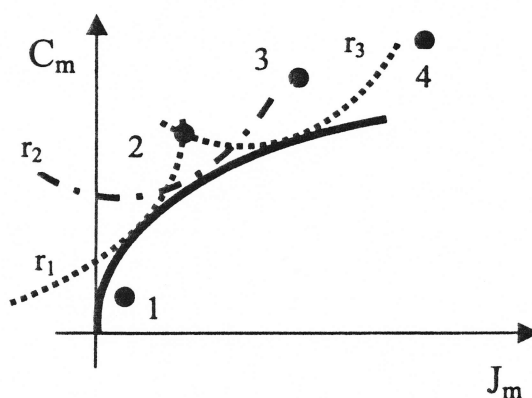


Figura 2.45: Parabola di coppia motrice RMS minima e iperboli dei τ massimo, minimo e ottimo per il motore 2 dell'esempio numerico sviluppato.

Ovviamente bisogna prima di tutto calcolare i valori dell'accelerazione e della velocità tenendo presente che l'area sottesa dal tratto positivo del diagramma delle accelerazioni è uguale a quella sottesa dal tratto negativo (perché la velocità iniziale e finale sono entrambe nulle) e che l'area sottesa dal diagramma delle velocità è fissata, in quanto è uguale alla *corsa* totale da compiere nel tempo previsto. A parità di tempo e di ampiezza di movimento un aumento del tratto a velocità costante abbassa la velocità massima ma aumenta le accelerazioni e quindi le azioni "inerziali", mentre una diminuzione di tale tratto provoca l'effetto inverso.

Maggiori dettagli si possono trovare nel capitolo 3.

Scelta una legge di moto "buona", l'obiettivo sarà in genere quello di selezionare il motore ammissibile tra quelli di taglia minima e, quindi, scegliere per esso il riduttore che minimizzi la coppia. In generale, la scelta del motore e del riduttore non potranno essere disgiunte. Come accennato nel paragrafo 2.4 e come verrà meglio spiegato nei capitoli

successivi ogni motore ha una coppia massima istantanea ed una “continuativa”. Nel caso di movimentazioni cicliche di durata breve rispetto alla costante di tempo termica del motore (alcuni o parecchi minuti) la coppia resistente “equivalente termica” media secondo un predefinito criterio deve essere inferiore a quella continuativa del motore per evitare eccessivi surriscaldamenti. Nei motori in cui la coppia è proporzionale alla corrente, come coppia equivalente media si può assumere quella quadratica media indicata spesso con *RMS* (Root Mean Square).

La scelta del motore e del riduttore “ottimi” risulta, pertanto, più complessa, perché in generale devono essere soddisfatte diverse condizioni che vengono di seguito elencate:

- *Coppia istantanea:*

$$|C_m| = \left| \left(\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r \right) \dot{\omega}_r + \tau C_r \right| \leq C_{m,max} \quad (2.61)$$

- *Coppia “termica”:* (se $C_m = ki$)

$$C_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int C_m^2 dt} \leq C_{rms,max} \quad (2.62)$$

- *Velocità massima:*

$$\tau \omega_{m,max} \geq \omega_{r,max} \quad (2.63)$$

La taglia (e quindi ingombri, pesi e costo) del motore aumenta spesso più con la coppia che con la velocità e quindi occorre scegliere, se possibile, un gruppo motore/riduttore che minimizzi le equazione 2.61 e 2.62 tenendo conto del vincolo dell’equazione 2.63.

Si osservi che nelle equazione 2.61 e 2.62 è presente J_m che non è noto finché non si sceglie il motore. Il problema si complica ulteriormente se anche la legge di moto può essere scelta arbitrariamente, almeno entro certi limiti. Si tenga inoltre presente che, in generale, la coppia limite del motore dipendono dalla velocità.

In genere si procede cercando di individuare i termini prevalenti (di picco o continuativa) e trascurando inizialmente quelli secondari, compiendo una prima selezione di motore e riduttore e, quindi, verificando il rispetto di tutte le condizioni.

2.15.2 Procedura generale di scelta

Nei casi di cicli con elevata dinamica (coppia e velocità molto variabili) per la scelta del gruppo motore-riduttore non è significativo riferirsi alla potenza nominale del motore. Infatti le azioni di inerzia che si generano sul motore stesso possono essere una percentuale significativa (e talvolta dominante) rispetto alle azioni del carico (inerzie e resistenti) inoltre l’adozione di rapporti di trasmissione che riducono le coppie richieste dal carico ($\tau \ll 1$) incrementano l’accelerazione del motore e quindi le azioni di inerzia.

Per una prima scelta orientativa della taglia si può riferirsi ad una potenza equivalente calcolata per il carico come prodotto della coppia quadratica media (somma di coppia resistente ed inerziale) per la velocità massima mentre per il motore si può considerare il prodotto tra coppia nominale (continuativa) e velocità massima:

$$(C_r + J_r \dot{\omega}_r)_{rms} \omega_{rMAX} < C_n \omega_{mMAX} \quad (2.64)$$

sarà comunque necessario effettuare appropriate verifiche. In ogni caso non è possibile sviluppare una procedura diretta che nel caso generale porti alla selezione immediata del motore più adatto (di taglia minima), ma sarà necessario compiere i seguenti passi:

- A. scelta di una legge di moto “conveniente” quando questa non sia vincolata;
- B. esecuzione di una prima scelta del motore e riduttore in base ad un certo criterio (normalmente riduzione della coppia quadratica media (detta anche *RMS*));
- C. verifica del rispetto di tutti i vincoli ed eventuale ritorno ai passi precedenti.

Per verificare se un motore è adatto ad azionare un dato carico è necessario selezionare un riduttore e verificare che il motore con quel riduttore possa soddisfare sia la coppia di picco che quella termica (continuativa o quadratica media).

Avendo a disposizione parecchi motori e parecchi riduttori può essere troppo oneroso verificare tutte le combinazioni possibili, ed è pertanto utile sviluppare una metodologia che permette di escludere con estrema semplicità il massimo numero di accoppiamenti possibili.

Detta metodologia dovrà anche indicare la taglia minima di motore necessario per azionare il carico infatti un'errata scelta del riduttore può forzare la scelta di un motore di taglia inutilmente elevata. Infatti, in presenza di forti accelerazioni può succedere che l'adozione di un motore di taglia più elevata potrebbe portare, in alcune situazioni, ad ottenere prestazioni più scadenti.

Nei paragrafi successivi, prima del caso generale, verranno analizzati dei casi dove uno o più fattori sono predominanti e si potranno quindi operare delle semplificazioni.

Il metodo si presta ad interpretazioni grafiche che chiariscono alcuni passaggi chiave.

Essendo molto laborioso analizzare la coppia di picco, conviene effettuare una prima selezione dei motori e dei riduttori in base alla coppia termica. Verrà illustrato come a questo riguardo la taglia del motore è rappresentabile da un coefficiente $\alpha = C / \sqrt{J}$ che deve essere superiore ad un corrispondente parametro β che dipende esclusivamente dal carico (coppia resistente, ciclo di movimentazione).

Più in dettaglio la selezione viene effettuata nel piano (J_m, C_m) (inerzia, coppia) mediante la costruzione della *parabola di coppia motrice RMS minima* richiesta dal carico, la cui equazione dipende solo dal carico (vedi figura 2.45). Ad ogni valore di β corrisponde una parabola ad asse orizzontale di equazione $J = \beta^2 C^2$.

Ad ogni motore corrisponde un punto (1,2,3 e 4) nell'esempio di figura 2.45.

I motori con momento d'inerzia J_m e coppia nominale C_m , che sono sotto la parabola vanno esclusi perché non hanno una coppia RMS sufficiente (esempio motore 1 in figura 2.45).

I motori che superano questo test (ad es. motori 2, 3 e 4 della figura) e che hanno sufficiente velocità massima possono essere sottoposti alla verifica della coppia di picco per la scelta definitiva.

Ogni riduttore è rappresentabile nel piano (J_m, C_m) da una iperbole tangente alla parabola di coppia motrice RMS minima: i motori adatti all'azionamento del carico con il riduttore in esame sono solo quelli che si trovano sopra l'iperbole. Ad esempio in figura se si adotta il riduttore r3 solo i motori 2 e 3 sono ammissibili. Il riduttore r2 è quello “ottimo” per il

motore 2 cioè quello che minimizza la sua coppia RMS. I riduttori r1 e r3 sono quelli con riduzione massima e minima ammissibile per lo stesso motore.

A questo punto si è ristretto notevolmente l'ambito entro il quale selezionare il gruppo motoririduttore definitivo, e solo con quelli posizionati sopra l'iperbole è necessario proseguire ed effettuare una verifica di coppia massima e di velocità massima, e se necessario della coppia per picchi prolungati.

2.15.3 Carico puramente inerziale

Supporremo per semplicità che il motore abbia una coppia di picco ed una coppia quadratica media erogabile indipendenti dalla velocità di funzionamento.

Schema di selezione

In caso di carico puramente inerziale la selezione del motore può essere fatta in maniera molto semplice.

Si ricorda che in ogni istante la coppia motrice C_m vale:

$$C_m = \left(\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r \right) \dot{\omega}_r \leq C_p^* \quad (2.65)$$

ove $\dot{\omega}_r$ rappresenta l'accelerazione del carico in un dato istante, mentre C_p^* indica la coppia erogabile dal motore.

In questo caso la coppia quadratica media può essere espressa in funzione della accelerazione quadratica media:

$$C_{m,rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int C^2 dt} = \left(\frac{J_m}{\tau} + \tau J_r \right) \dot{\omega}_{r,rms} \leq C_n \quad (2.66)$$

$$\dot{\omega}_{r,rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int \dot{\omega}_r^2 dt} \quad (2.67)$$

e, quindi, il valore di τ che minimizza la coppia di picco (equazione 2.65) minimizza anche la coppia quadratica media (equazione 2.66).

Ricordando il contenuto del paragrafo 2.11.3 se si adotta il valore di riduzione ottimo $\tau_{opt} = \sqrt{J_m/J_r}$ si ottiene:

$$C_m = 2\sqrt{J_m J_r} \dot{\omega}_r \quad (2.68)$$

Indicando con C_n la coppia (termica) nominale e con C_p quella di picco, i vincoli di coppia sul motore divengono:

$$\alpha_{max} = \frac{C_p}{\sqrt{J_m}} \geq 2\sqrt{J_r} \dot{\omega}_{r,max} = \beta_{max} \quad (2.69)$$

$$\alpha = \frac{C_n}{\sqrt{J_m}} \geq 2\sqrt{J_r} \dot{\omega}_{r,rms} = \beta \quad (2.70)$$