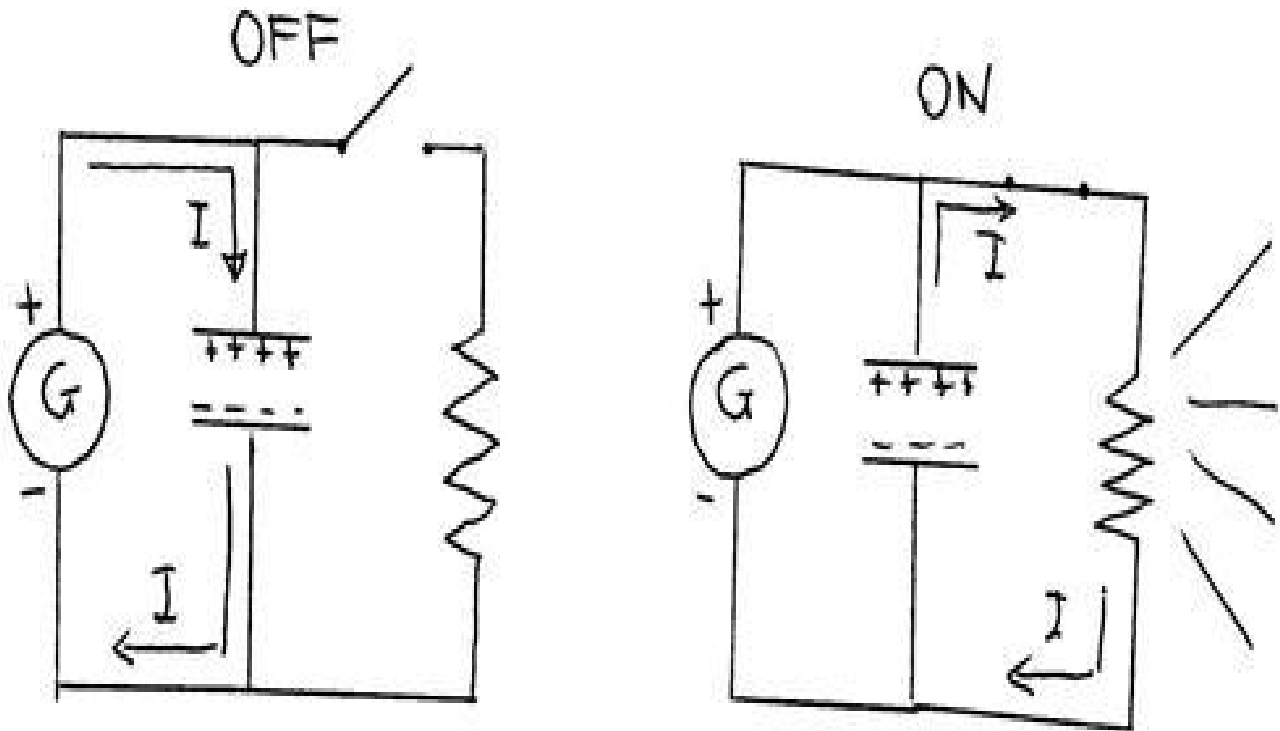


ELETTROTECNICA I

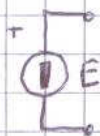


Appunti Integrati da : Di Palma Felice
Anno 2013/14

CIRCUITI IN REGIME STAZIONARIO

I circuiti in regime stazionario semplici si compongono di 3 diversi elementi detti componenti:

■ Generatore di tensione



■ Generatore di corrente



■ Resistenza

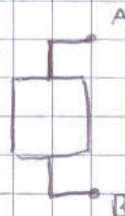


I componenti possono essere associati e studiati come bipoli.

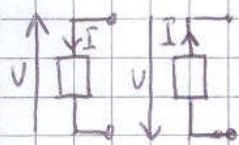
Il bipolo, come schematizzato è una scatola con 2 morsetti

A e B che avranno una certa differenza di potenziale

$V = V_{AB} = V_A - V_B$ che corrisponderà alla nostra tensione.



Per lo studio della corrente sceglieremo in modo del tutto arbitrario la direzione della corrente (I) e della tensione (V).



CONVENZIONE DEL
UTILIZZATORE



CONVENZIONE DEL
GENERATORE

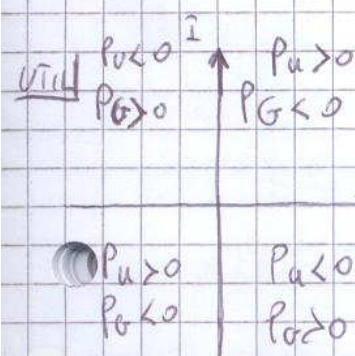
Quante le configurazioni sono raggruppate in 2 convenzioni:

■ Direzioni concordi → Convenzione del generatore

■ Direzioni discordi → Convenzione dell'utilizzatore

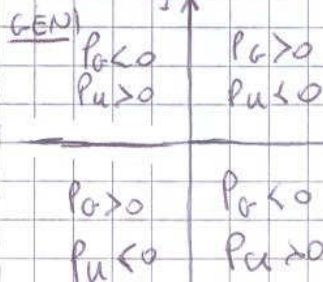
Una volta eseguita la convenzione in modo arbitrario si potrà studiare l'elemento e scrivere l'equazione caratteristica del dipolo. $V = V(I)$ $I = I(V)$

Potenza nelle 2 convenzioni:



$P_u = VI$ Potenza
assorbita

$$P_g = -VI = P_u$$



$P_g = VI$ Potenza
generata

$$P_u = -VI = -P_g$$

I bipoli possono essere:

- b. Inerte = quando l'equazione caratteristica passa per l'origine del grafico (V, I)
- b. Passivo = Quando il prodotto delle sue coordinate ha sempre lo stesso segno. Un b. Passivo è sempre Inerte.
- b. Attivo = non soddisfa le condizioni precedenti;
- b. Lineare = Che ha una rappresentazione grafica lineare (rettificia)

Bipoli fondamentali

Resistore

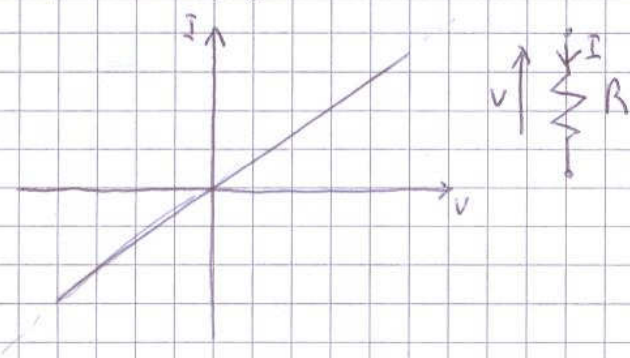


È un bipolo passivo, Inerte, lineare.

Scelta arbitrariamente la convenzione del bipolo l'equazione caratteristica del resistore si scrive:

- Convenzione dell'utilizzatore $V = RI$

$$R > 0 \text{ } [\Omega]$$

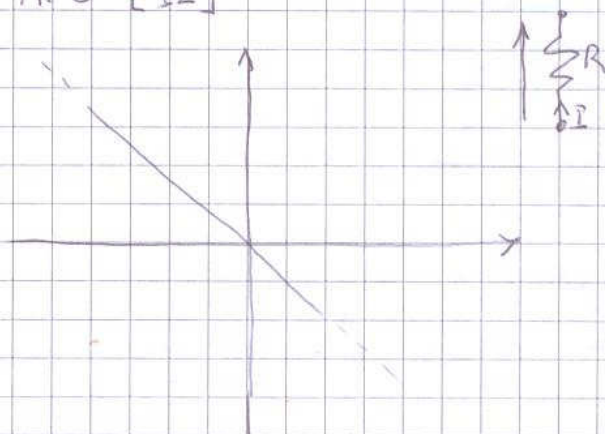


$$I = \frac{V}{R} \quad V = IR$$

$$P_a = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} > 0$$

- Convenzione del generatore

$$R > 0 \text{ } [\Omega]$$



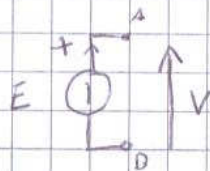
$$P_g = -VI = -RI^2 = -\frac{V^2}{R} < 0$$

La resistenza R può anche scriversi:

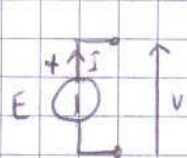
$$\frac{1}{R} = G \text{ } [S] \quad \text{conduttanza che si misura in siemens.}$$

Generatore di Tensione

- Il generatore di Tensione ideale impone ai suoi morsetti una f.e.m. di valore E indipendente dalla corrente I .
Esso è un bipolo attivo lineare.

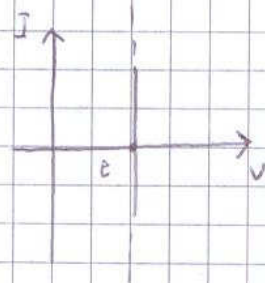


- Conversione del Generatore



$$V = E$$

$$P_G = VI = EI$$



- Il generatore di tensione è detto ideale perché può erogare o immettere una quantità infinita di corrente. La I immessa o erogata dal generatore dipende solo dai componenti a cui viene collegato nel circuito.

Generatore di corrente



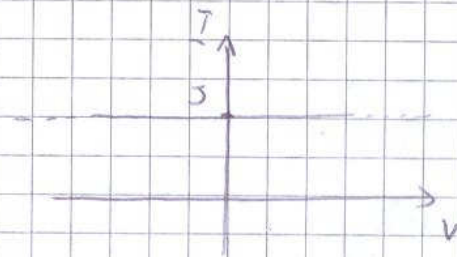
Il generatore ideale di corrente immette nel circuito una quantità di corrente $S = I$ costante, indipendente dalla Tensione del circuito.

- Conversione del generatore.



$$P_G = VI = VS$$

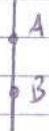
$$I = S$$



Per quanto riguarda le resistenze possono avere 2 casi limite

• Circuito ideale

$$R = 0 \quad V = 0 \quad \forall I$$



• Circuito aperto ideale

$$G = 0 \quad I = 0 \quad \forall V$$



- Il grafico coincide con l'asse I

È analogo ad un generatore di Tensione con

$$E = 0$$

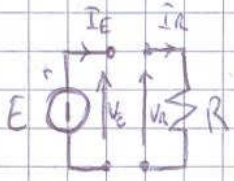
- Il grafico coincide con l'asse della V

È analogo ad un generatore di corrente con

$$S = 0$$

Equazioni Topologiche

Le equazioni Topologiche indicano come sono collegati tra di loro i componenti di un circuito.



Questo è un circuito aperto, per cui non è ancora possibile scrivere l'equazione caratteristica.

Una volta collegato il circuito a 2 cortocircuiti ideali e volti arbitrariamente i riferimenti per corrente e tensione, posso passare allo studio del circuito.

Equazioni Topologiche (Kirchhoff)

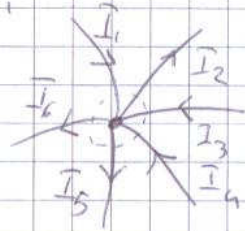
- 1) Principio di Kirchhoff delle correnti (I^o principio)
- 2) Principio di Kirchhoff delle Tensioni (II^o principio)

• I^o principio di Kirchhoff

Il principio di Kirchhoff delle correnti rappresenta un bilancio di carica per un generico punto di un circuito detto nodo.

nodo: È un punto in cui convergono 3 o più lati di un circuito.

lati: parti del circuito compresi tra 2 nodi



$$\sum_{k=1}^L I_k = 0$$

La somma delle correnti che affluiscono ad un nodo deve essere pari a 0. Per convenzione possiamo prendere positive le correnti entranti nel nodo e negative quelle uscenti:

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 - I_6 = 0$$

oppure

$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5 + I_6$$

Superficie di Togli: è una superficie chiusa immaginaria che contiene una parte di un circuito, e cui applichiamo le formule fisiche (sup. tratt.).

Maxwell: $i = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds \Rightarrow \oiint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds = 0$

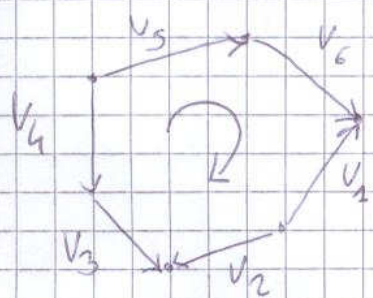
La corrente elettrica è il flusso del vettore densità di corrente attraverso una superficie S .

Se la superficie è chiusa dobbiamo rispettare il principio di conservazione della carica: Tutte le correnti che entrano e uscono sono uguali a quelle che escono. $\vec{J}$ è solenoidale.

$$i = \oiint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds = 0 \Rightarrow \sum_k i_k = 0$$

• II° principio di Kirchhoff.

Dato un circuito analizziamo e studiamo le tensioni in una maglia.
maglia: È la parte di circuito composta da i lati che mi permettono di passare per più nodi, tornando a quello di partenza, senza sovrapporci in nessun nodo della maglia stessa.

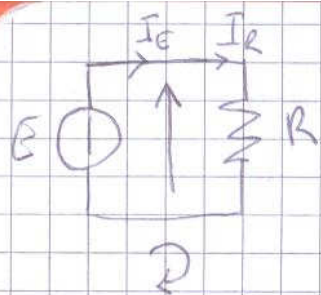


Una volta presa una maglia e scelto arbitrariamente il verso delle tensioni, possiamo applicare il principio di Kirchhoff alle tensioni:

$$\sum_{k=1}^l V_k = 0 \Rightarrow -V_1 + V_2 - V_3 - V_4 + V_5 + V_6 = 0$$

I segni sono scelti in base al verso di percorrenza che scegliamo all'inizio (orario e antiorario)

Maxwell: $\vec{E}$ è irrotazionale $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. $V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_k V_k = 0$



$$E = 12 \text{ V}$$

$$R = 2 \Omega$$

$$\begin{cases} V_E = E \\ R_R = R I_R \\ I = I_R \\ V_E - V_R = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E = R I_R \rightarrow I_R = \frac{E}{R} = 6 \text{ A}$$

$$V_R = 12 \text{ V}$$

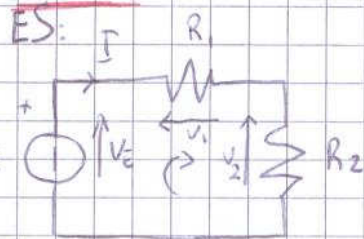
$$P_G^{(E)} = V_E I_E = 72 \text{ W}$$

$$P_u^{(R)} = V_R I_R = 72 \text{ W}$$

Tutta la potenza generata dalla generatore di Tensione viene assorbita dalla resistenza.

Resistenza equivalente.

- SERIE



$$E = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$R_2 = 4 \Omega$$

Consideriamo il seguente circuito

I resistori si dicono collegati in serie perché sono attraversati dalla stessa corrente I

$$\begin{cases} V_E = E \\ V_1 = R_1 I \\ V_2 = R_2 I \\ V_E - V_1 - V_2 = 0 \end{cases}$$

Per un circuito con resistenze in serie possiamo semplificare le n resistenze in serie con un'unica resistenza R_{eq} di valore equivalente alle n serie resistenze

$$E = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2 \text{ A}$$

$$V_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = 4 \text{ V}$$

$$V_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 8 \text{ V}$$

Il circuito così schematizzato ha equazione caratteristica per i vari resistori:

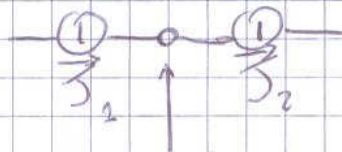
$$V_i = R_i I = \frac{R_i}{R_{eq}} E = K_{R_i} E$$

Avremo creato così un partitore di Tensione

che ci permette di distribuire la tensione in maniera proporzionale sulle varie resistenze. K_{R_i} è un fattore in ingresso detto rapporto di partizione per la resistenza R_i

Va inoltre precisato che nei circuiti lineari in regime stazionario vale il principio di non amplificazione delle Tensioni e delle correnti.

• GENERATORI IN SERIE

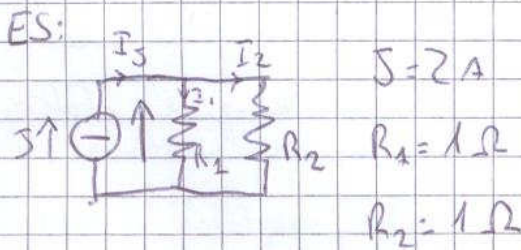


Si violano i principi di Kirchhoff in questo punto.

Vale solo se $\vec{I}_1 = \vec{I}_2$

ed è uguale ad un generatore con la stessa corrente ma con tensione ripetuta. Tra i vari generatori che lo compongono.

- PARALLELO



$$I_3 = 2$$

$$V_1 = R_1 I_1 = V$$

$$V_2 = R_2 I_2 = V$$

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$I_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V$$

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^n G_k$$

$$G_1 + G_2 = G_{eq}$$

multo per 2 resistenze in parallelo

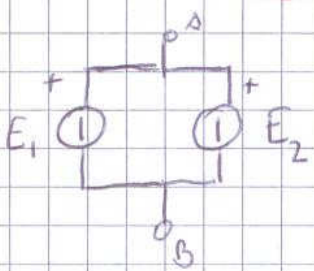
$$I_3 = G_{eq} V \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

Nel circuito così schematizzato troveremo che:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{cases} \quad I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

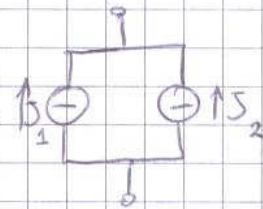
Avremo creato così un ripartitore di corrente in cui la corrente I si ripartisce tra i due resistori in misura inversamente proporzionale alle rispettive resistenze.

• GENERATORI IN PARALLELO



I due generatori hanno la stessa V ai morsetti

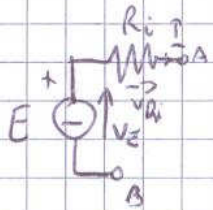
$$I_{eq} = I_1 + I_2$$



$$I_{eq} = I_1 + I_2$$

GENERATORE REALE DI TENSIONE

Il generatore reale di ~~Tensione~~ si differenzia da quello ideale per la presenza di una resistenza interna R_i , della quale dobbiamo tenere conto ponendola in serie al generatore.



R_i = resistenza interna del generatore

$$V = V_E + V_{R_i} = E + (-R_i I)$$

$$V_{AB} = E - R_i I$$

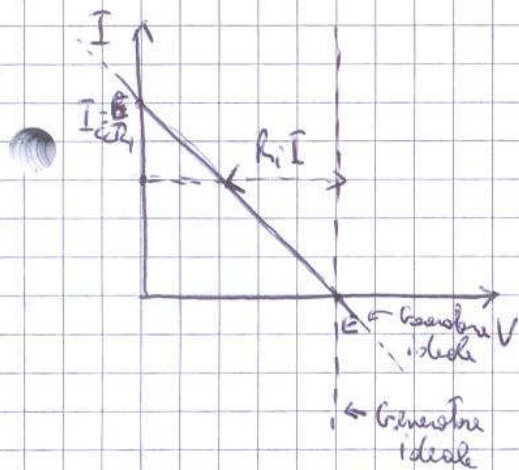
Se analizziamo questo componente, quando il circuito è aperto ($I=0$)

avremo:

$$V \Big|_{I=0} = E \quad \text{che chiameremo Tensione a vuoto}$$

Quando invece è in cortocircuito ($V=0$) $I \Big|_{V=0} = \frac{E}{R_i} \rightarrow I_{cc}$ corrente di cortocircuito.

Più sarà piccola la nostra I e più ci avvicineremo al caso ideale.



$R_i I$ è la nostra caduta di tensione interna

Studiamo ora la potenza:

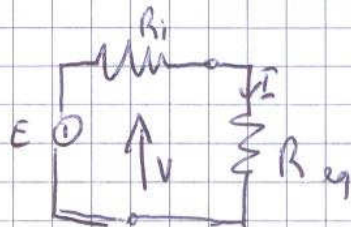
$$P_G = VI = EI - R_i I^2$$

per trovare la P_G max:

$$\frac{\partial P_G}{\partial I} = 0 \rightarrow E - 2R_i I = 0$$

$$I = \frac{E}{2R_i} \rightarrow P_G^{max} = \frac{E^2}{2R_i} - \frac{E^2}{4R_i} = \frac{E^2}{4R_i}$$

Potendo ora in un circuito reale



con resistenza esterna R_{eq}

Per ottenere il caso

di massima potenza:

$$I = \frac{E}{R_i + R_{eq}} \rightarrow I = \frac{E}{2R_i} \Rightarrow R_{eq} = R_i$$

Troviamo quindi che per ottenere la massima potenza dal generatore dovremo collegare ad una resistenza esterna uguale a quella interna.

Analizziamo ora l'efficienza:

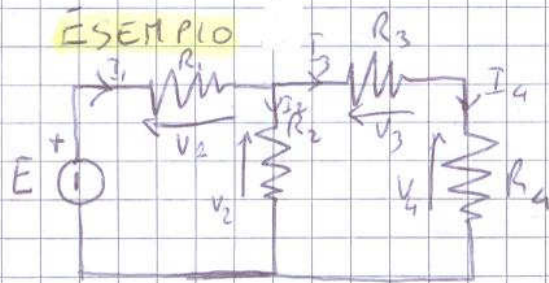
$$\eta = \frac{P_u}{P_G} = \frac{RI^2}{EI} \left| \begin{array}{l} I = \frac{E}{R+R_i} \\ R = R_{eq} \end{array} \right. = \frac{R}{R+R_i} = \left(1 + \frac{R_i}{R}\right)^{-1}$$

nel caso di $R = R_i \Rightarrow \eta = 50\%$ il che ci dice in esame spreco di energia attraverso la resistenza interna.

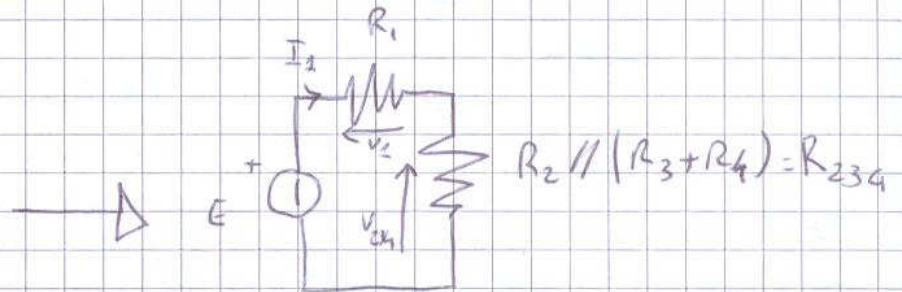
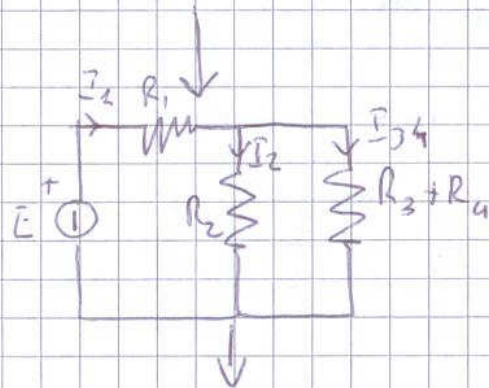
$$\eta \rightarrow 100\% (\Leftrightarrow) \frac{R_i}{R} \ll 1 \rightarrow R_i \ll R$$

Quindi ci troveremo a preferire una bassa resistenza interna quando ci troviamo a lavorare con grandi carichi di tensione (max eff.) e invece con una resistenza alta vicino a zero e quella esterna se siamo come motori e wanto di max Potenza.

ESEMPIO



Possiamo semplificare un circuito complesso, risolvendo ad un circuito semplice.



per il partitore di corrente

$$I_2 = I_1 \frac{R_3 + R_4}{R_2 + (R_3 + R_4)}$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{234}}$$

Per il partitore di Tensione abbiamo $\rightarrow$

$$V_1 = E \frac{R_1}{R_1 + R_{234}} \rightarrow V_3 = V_{234} \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

KIR. ALGEBRA

$$V_{234} = E - V_1$$

Kirchhoff alle correnti:

$$I_{34} = I_1 + I_2$$

In fine

$$P_G^{(E)} = EI_1 = P_U^{(R)} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + (R_3 + R_4) I_{34}^2$$

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Quando ci troviamo di fronte a circuiti complessi con più generatori, sia di tensione che di corrente, ma presuppone caratterizzati da dipoli lineari, possiamo adottare il principio di sovrapposizione degli effetti:

In una rete lineare comunque complessa, contenente, oltre ai resistori, generatori sia di tensione che di corrente, le tensioni e le correnti di tutto possono essere determinate sommando i contributi derivanti da singoli generatori considerati agenti uno per volta.

Per ogni componente i contributi in ingresso sono uguali a quelli in uscita.

$$I_x = H_1(R_1, R_2, \dots, R_N) E_1 + H_2(R_1, R_2, \dots, R_N) J_1 + \dots$$

↑
coef. di tensione $\hookrightarrow$

$$V_x = K_1(R_1, R_2, \dots, R_N) E_1 + K_2(R_1, R_2, \dots, R_N) J_1 + \dots$$

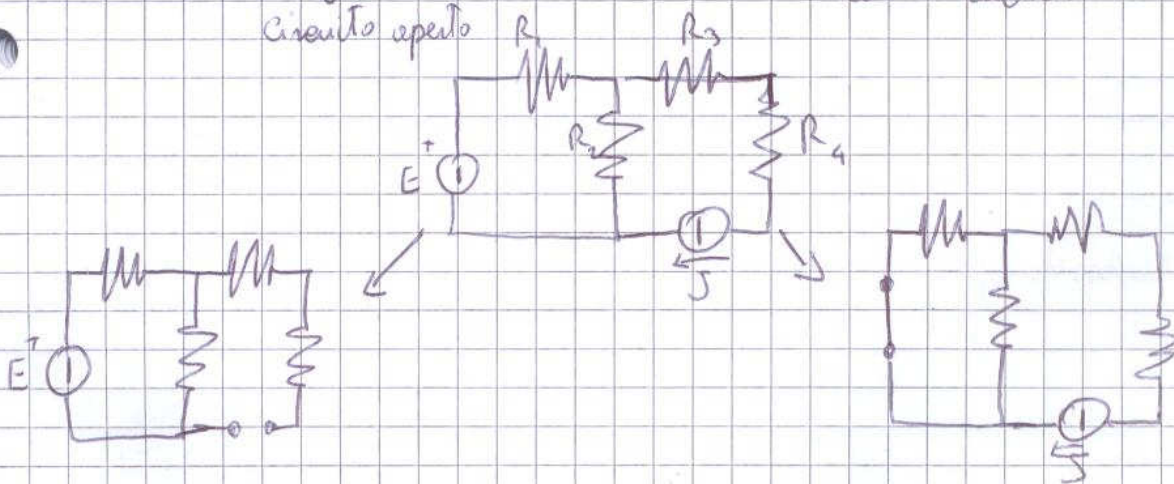
quindi applicando il p.s.e. al caso di un generatore di tensione e uno di corrente:

$$H_1 = \frac{I_x}{E_1} \Big|_{J_1=0}$$

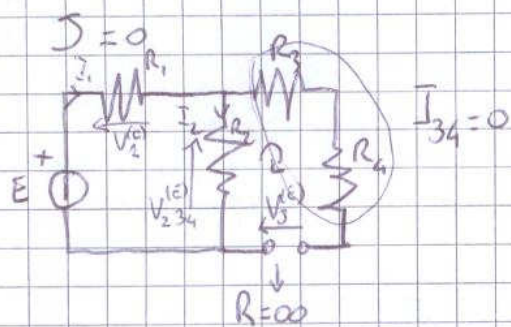
↓
circuito aperto

$$H_2 = \frac{I_x}{J_1} \Big|_{E_1=0}$$

↓
cortocircuito



Studiamo questo circuito esaminando caso per caso questi 2 sotto circuiti e poi applichiamo la sovrapposizione degli effetti.

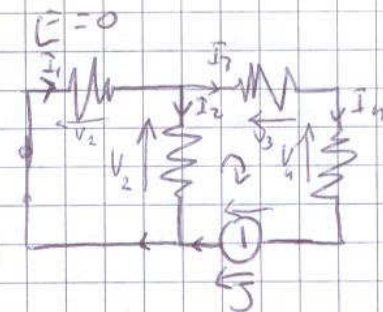


$$I_1^{(E)} = \frac{E}{R_1 + R_2} = I_2^{(E)}$$

K.C.I

$$V_{234}^{(E)} - V_3^{(E)} - V_4^{(E)} + V_5^{(E)} = 0$$

$$V_5^{(E)} = -V_{234}^{(E)} = -R_2 I_2^{(E)}$$



$$I_3 = I_4 = J$$

$$I_1 = J \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = -J \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

K.C.I

$$V_5^{(J)} + V_2^{(J)} - V_3^{(J)} - V_4^{(J)} = 0$$

$$V_5 = (-R_2 I_2^{(J)}) + R_3 J + R_4 J$$

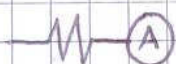
$$I_1 = I_1^{(J)} + I_1^{(E)} ; I_2 = I_2^{(E)} + I_2^{(J)} ; V_5 = V_5^{(J)} + V_5^{(E)}$$

$$P_G^{(E+J)} = EI_1 + V_5 J$$

$$P_M = \sum_x R_x I_x^2$$

la sovrapposizione degli effetti non vale per la potenza

Componenti per la misurazione



Amperemetro (collegato in serie)

Resistenza
 $R_A \rightarrow 0$ interna



$R \rightarrow \infty$

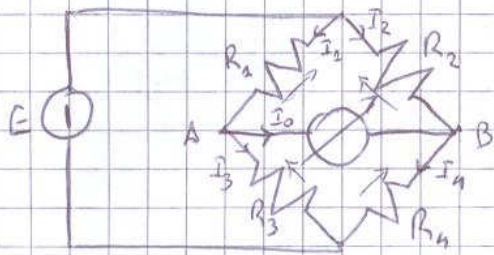
Voltaggio (parallelo)



Wattmetro

galvanometro (indica solo se c'è passaggio o no di corrente)

Dispersione Wheatstone (circuiti a ponte)



Galvanometro segna zero o non passaggio di corrente. Quando $I_0 = 0$ il circuito è in equilibrio quindi avviene che:

$$R_1 // R_2 \quad R_3 // R_4 \quad I_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_3 \\ I_2 = I_4 \end{cases} \quad V_{AB} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ R_3 I_3 = R_4 I_4 \end{cases}$$

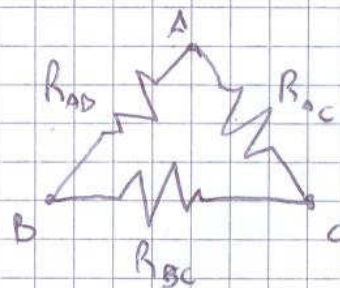
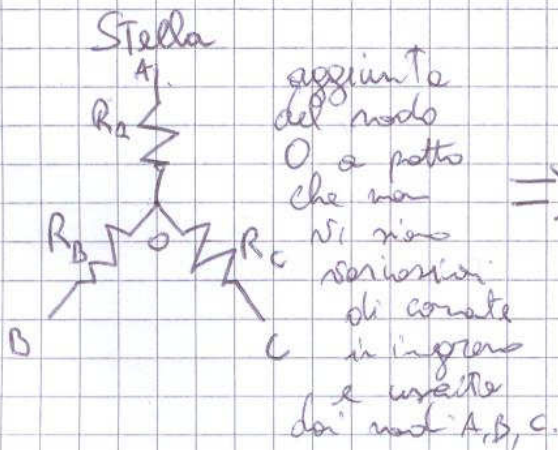
$$\text{Equilibrio} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_4}{I_3} = \frac{R_3}{R_4} \Rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}}$$

Variano i valori delle 3 resistenze note possiamo trovare il valore di una resistenza incognita una volta raggiunto l'equilibrio $I_0 = 0$

$$R_4 = \frac{R_3 R_2}{R_1}$$

Circuiti a stella o Triangolo.

Possono essere dei casi in cui delle resistenze non sono ammissibili né ad una "serie" né ad un "parallelo". Queste configurazioni possono essere studiate tramite le similitudini tra "stelle" e "triangoli".



eliminazione del nodo O, verso variazione di corrente in ingresso e uscite da A, B, C.

Per Trasformare il Triangolo nella stella equivalente:

$$\begin{cases} R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_0} \\ R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_0} \\ R_C = \frac{R_{AC} R_{CB}}{R_0} \end{cases}$$

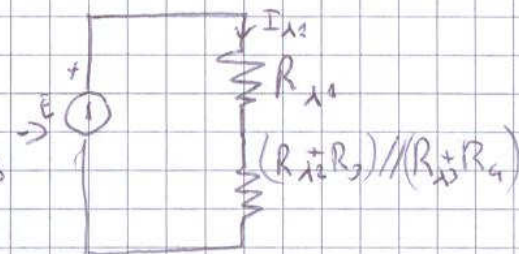
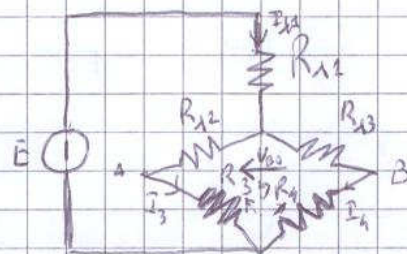
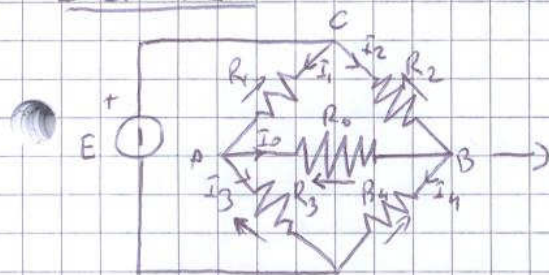
viceversa: $G_0 = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$

$$\begin{cases} R_{AB} = R_A R_B G_0 \\ R_{BC} = R_B R_C G_0 \\ R_{CA} = R_C R_A G_0 \end{cases}$$

Nel caso particolare in cui le Tre resistenze a stella abbiano lo stesso valore R_1 anche quelle a Triangolo avranno valore uguale

$$R_{\Delta} = \boxed{R_{\Delta} = 3 R_1} \leftrightarrow \boxed{R_1 = \frac{R_{\Delta}}{3}}$$

ESERCIZIO



$$I_{x1} = \frac{E}{R_{x1} + (R_{x2} + R_3) // (R_{x3} + R_4)}$$

$$I_3 = I_{x2} = I_{x1} \frac{R_{x3} + R_4}{R_{x2} + R_3 + R_{x3} + R_4}$$

L.K.C. $I_4 = I_{x1} - I_3$

L.K.N. $V_{BA} + V_4 = V_3 \quad V_{BA} = R_3 I_3 - R_4 I_4$

$$I_1 = I_0 + I_3$$

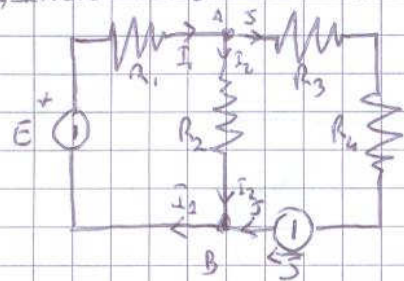
$$V_{BA} = R_0 I_0 \quad I_0 = \frac{R_3}{R_0} I_3 - \frac{R_4}{R_0} I_4$$

$$I_2 = I_4 - I_0$$

KIRCHHOFF A PIÙ GENERATORI

Per poter studiare un circuito più complesso, in cui si trovano più generatori, senza dover applicare i principi della sovrapposizione degli effetti, si deve:

1) Individuare i nodi del circuito e scrivere K.C.



$$A \rightarrow I_1 = I_2 + I_3$$

una delle equazioni si può

$$B \rightarrow I_2 + I_3 = I_4$$

eliminare perché dipendente dall'altra

n numero dei nodi allora $\neq n-1$ K.C.

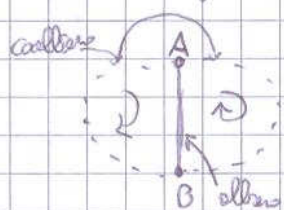
NODA $I_1 = I_3 + I_2$

NOD. B $I_2 + I_3 = I_4$

Prima di passare all'individuazione delle maglie schematizziamo il nostro circuito raggruppando i lati nell'albero e nel coalbero.

GRAFO DEL CIRCUITO

(da solo inf. Topologiche)



Albero: sottoinsieme di lati, che ci permette di andare da qualsiasi nodo del circuito ad un altro nodo.

Coalbero: i lati che non appartengono all'albero

$$\begin{cases} E - V_1 - V_2 = 0 \\ V_2 - V_3 - V_4 - V_5 = 0 \end{cases}$$

l = numero di lati = 3

n = numero di nodi = 2

$n-1$ e K.C.

$l - (n-1)$ e K.T.

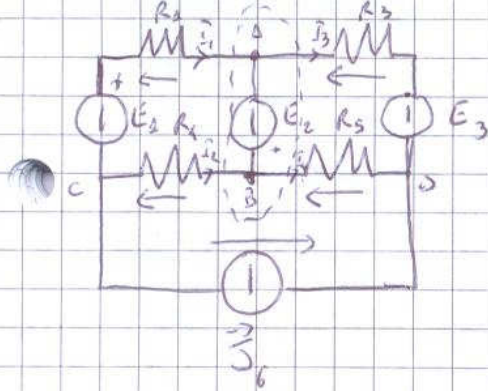
2) Individuiamo le maglie. Tutte maglie quanti sono i lati di coalbero. Costruiamo le maglie con 1 lato di coalbero e tutti i lati di albero affinché si chiuda la maglia. Questo sistema ci permette di scrivere equazioni delle maglie linearmente indipendenti.

3) Scriviamo le equazioni di Ohm.

$$\begin{cases} V_1 = R_1 I_1 ; V_2 = R_2 I_2 \\ V_3 = R_3 I_3 ; V_4 = R_4 I_4 \end{cases}$$

Abbiamo costruito così il nostro sistema con 2 equazioni linearmente indipendenti e 7 incognite.

Sostituendo le equazioni del 3) nel 2) otteniamo 3 equazioni di cui V_3 poniamo l'incognita se non richiesta dal problema.

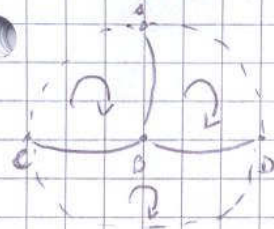


$$n=3 \quad \text{e} \quad K.C. = n-1=2$$

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

$$I_2 + I_4 + J_6 = 0$$

$$l=3 \quad n=4 \quad \text{e} \quad K.C. = l-(n-1)=3$$



$$E_1 - R_1 I_1 + E_2 + R_4 I_4 = 0$$

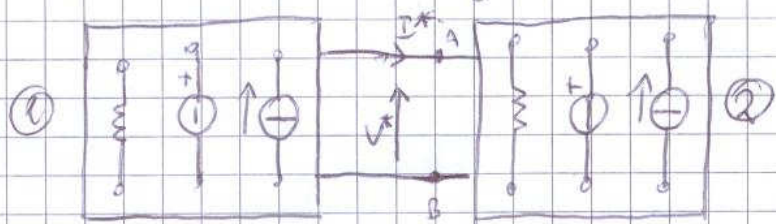
$$E_3 - E_2 + I_5 R_5 - R_3 I_3 = 0$$

$$V_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0$$

Se ci troviamo di fronte ad un circuito in cui uno o più generatori di t.e. trovino su un lato in presenza di resistenze (A-B) estremo quindi che tra quei nodi la differenza di potenziale sarà proprio la somma $\sum E_i$ dei generatori di quel lato. Abbiamo così un I_{E_i} ai generatori, che risulta secondo la indicazione, allora prendiamo un insieme di Taglio che comprede A e B e da 2 nodi è come se ne ottenessimo uno solo, escludendo gli E_i dal calcolo di R.C. Per R.C. non dobbiamo eliminare i contributi di E_i , e

$$\begin{cases} I_1 - I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\ I_1 + I_4 + J_6 = 0 \\ E_1 - R_1 I_1 + E_2 + R_4 I_4 = 0 \\ E_3 - E_2 + I_5 R_5 - R_3 I_3 = 0 \end{cases}$$

Se prendiamo un circuito molto complesso ma lo possiamo dividere in 2 sottosistemi collegati. Tra loro da solo 2 morsetti A-B.



Ai morsetti A-B non compaiono né una differenza di potenziale V^* e una corrente I^* .

Possiamo quindi scegliere uno dei due circuiti ad uno più semplice del tipo, generatore + resistenza.

(Teorema del generatore equivalente)

Indichiamo così 2 diversi circuiti equivalenti,

uno con un generatore di Tensione

(Teorema di Thévenin) e uno con un generatore di corrente (Teorema di Norton).

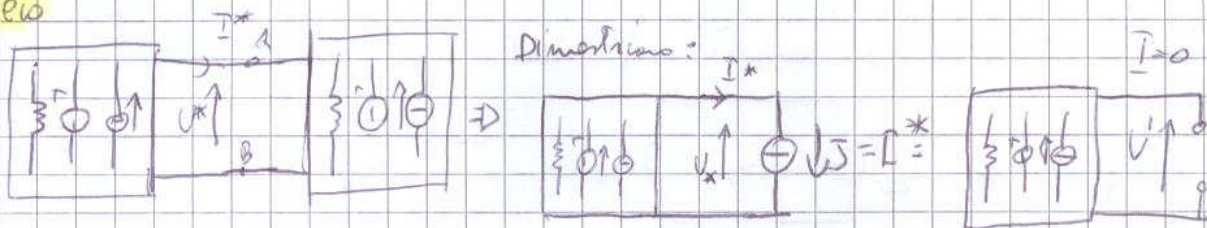
Teorema di Thévenin

Una rete lineare comunque complessa, "vista" da una coppia di morsetti AB, può essere considerata equivalente ad un circuito semplice costituito da un generatore ideale di Tensione con E_0 pari alla Tensione a vuoto V^* dei morsetti AB, in serie con la resistenza equivalente della rete (resa passiva - spegnendo tutti i generatori) ai morsetti AB, Req.

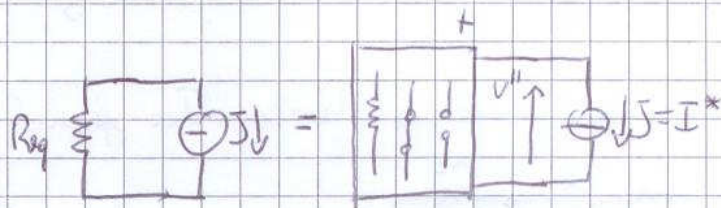
Teorema di Norton

Una rete lineare comunque complessa, vista da una coppia di morsetti AB, può essere considerata equivalente a un circuito semplice costituito da un generatore ideale di corrente, di valore I_{sc} pari alla corrente di cortocircuito tra i morsetti AB, in parallelo con la resistenza equivalente della rete (resa passiva) ai morsetti AB aperti, Req.

ESEMPIO

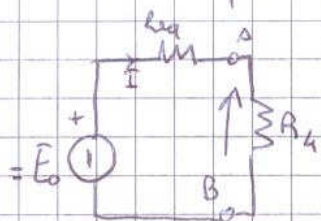
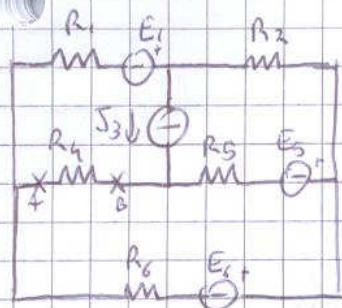


$$V^* = V' + V'' = E_0 + (-R_{eq} I^*)$$

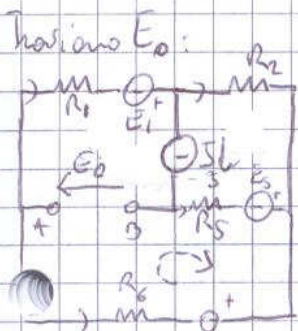


\$V'\$ è la Tensione che abbiamo quando facciamo il generatore di corrente (Tensione a vuoto) e sarà uguale a \$E_0\$.

\$V''\$ è la differenza di Tensione vista dal generatore di corrente nella \$R_{eq}\$ del circuito di sinistra reso passivo.



$$I_4 = \frac{E_0}{R_A + R_{eq}}$$



$$\text{c.k.t. } -E_0 - R_5 I_5 + E_5 - E_6 + R_6 I_6 = 0$$

$$E_0 = E_5 - E_6 + R_6 I_6 - R_5 I_5$$

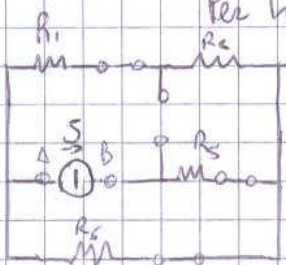
inseguito.

$$\begin{cases} I_5 = I_3 \\ I_2 + I_6 + I_3 = 0 \\ E_2 - R_2 I_2 - E_6 + R_6 I_6 + R_1 I_1 = 0 \end{cases}$$

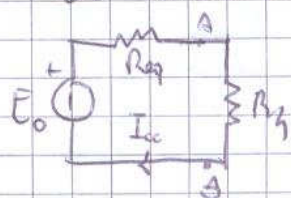
Proviamo con trovare \$E_0\$

Per trovare la \$R_{eq}\$ inversa:

$$R_{eq} = R_5 + (R_1 + R_2) // R_6$$



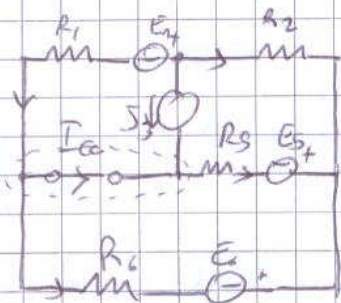
Per trovare il circuito equivalente di Norton possiamo:



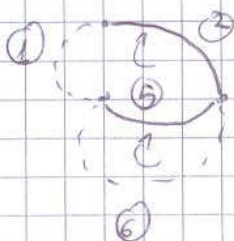
$$I_{cc} = \frac{E_0}{R_{eq}}$$

$$I_L = I_{cc} \frac{R_{eq}}{R_L + R_{eq}}$$

Se invece vogliamo trovare I_{cc} facendo tutti i porggi allora:



$$I_{cc} = I_5 - I_3$$

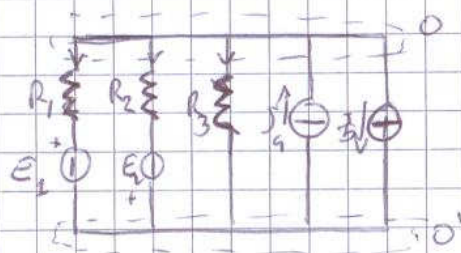


$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_2 + I_5 + I_6 = 0 \\ R_1 I_1 + E_1 - R_2 I_2 - E_2 + R_3 I_5 = 0 \\ -R_3 I_5 + E_3 - E_4 + R_4 I_6 = 0 \end{cases}$$

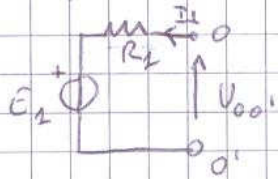
Risolvo il sistema e troviamo I_{cc} , la R_{eq} è la stessa di prima.

FORMULA DI MILLMAN

Nel caso limite che in una rete siano presenti solo due nodi ma un numero comunque grande di maglie possiamo pervenire ad una formula per il calcolo delle differenze di potenziale ai nodi:



consideriamo i vari lati come:



$$E_1 + R_1 I_1 - V_{00'} = 0$$

$$I_1 = \frac{V_{00'} - E_1}{R_1}$$

$$\text{analogamente } I_2 = \frac{V_{00'} - E_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V_{00'}}{R_3}$$

(Nodo 0')

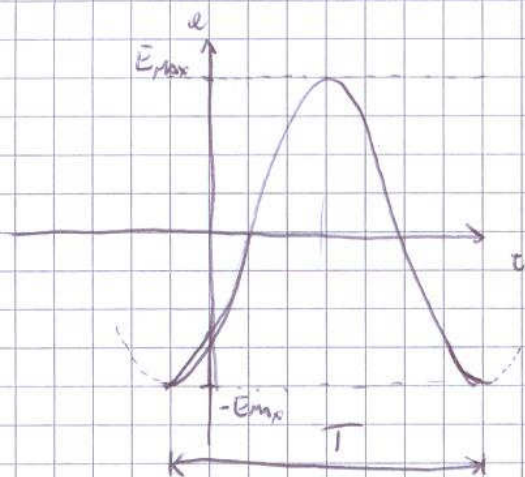
$$\text{eseguendo un e.r.c. } I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0 \rightarrow \frac{V_{00'} - E_1}{R_1} + \frac{V_{00'} - E_2}{R_2} + \frac{V_{00'}}{R_3} + I_4 + I_5 = 0$$

$$V_{00'} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + I_4 - I_5 \Rightarrow V_{00'} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + I_4 - I_5}{G_1 + G_2 + G_3}$$

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

A differenza del regime stazionario, in cui Tensione e corrente erano considerati costanti nel Tempo oppure erano generate secondo funzioni continue lineari, non dipendenti dal Tempo, nel regime sinusoidale, Tensione e corrente in un circuito sono funzioni dipendenti dal Tempo. La Tensione sarà data da una funzione del Tipo:

$$e(t) = E_{\max} \sin(\omega t + \alpha)$$



dove abbiamo indicato con $E_{\max}$ il valore massimo di Tensione prodotta, mentre ω sarà la pubbrezione e α la fase iniziale.
 $e(t=0) = E_{\max} \sin \alpha \rightarrow \alpha = \sin^{-1} \frac{e(0)}{E_{\max}}$

La pubbrezione ω sarà indicata in [rad/s]

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

dove f è la frequenza [Hz] e T il periodo [s] $f = \frac{1}{T}$

T quindi è l'intervallo di Tempo in cui

$e(t)$ ha lo stesso valore e la stessa pendenza

indichiamo il valore medio di $e(t)$: $\langle e(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = 0$ la media è nulla

non avendo un valore medio allora troviamo il valore efficace della $e(t)$:

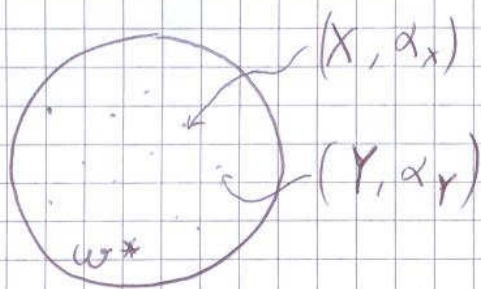
$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}}$$

la nostra funzione diventa

$$e(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha)$$

Funzioni sinusoidali con stessa pulsazione

Possiamo raggruppare le funzioni sinusoidali caratterizzate dalla stessa pulsazione ω^* in un unico insieme:



$$x(t) = \underbrace{\sqrt{2} X}_{\text{valore efficace}} \sin(\omega^* t + \underbrace{\alpha_x}_{\text{fase iniziale}})$$

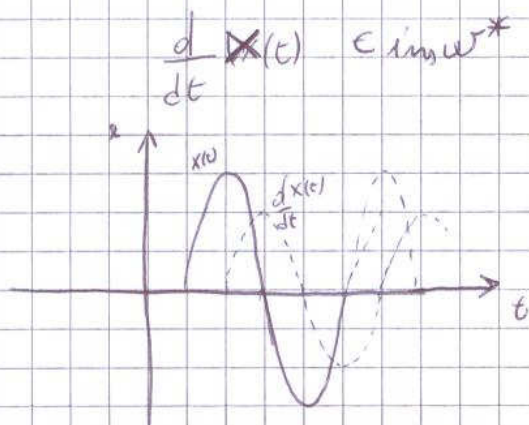
$$y(t) = \sqrt{2} Y \sin(\omega^* t + \alpha_y)$$

avremo solo 2 variabili:

Proprietà

• $K \in \mathbb{R} \quad K x(t) \in \text{ins } \omega^*$

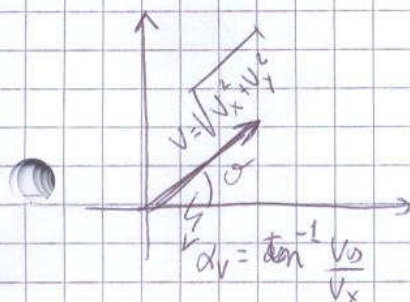
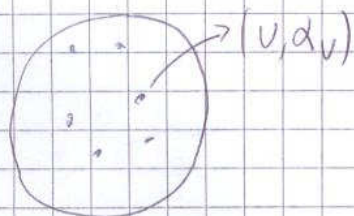
• $\frac{d}{dt} x(t) = X \sqrt{2} \omega^* \cos(\omega^* t + \alpha_x) = \sqrt{2} \underbrace{X \omega^*}_{\text{valore efficace}} \sin(\omega^* t + \underbrace{\alpha_x + \frac{\pi}{2}}_{\text{fase iniziale}})$



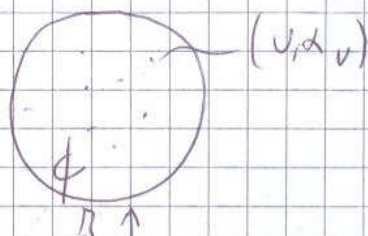
• $x(t) \pm y(t) \in \text{ins } \omega^*$

Spazi Vettoriali

Possiamo rappresentare una funzione anche come un vettore
Vettori reali



Numeri complessi



$$\bar{V} = R(\bar{V}) + jI(\bar{V})$$

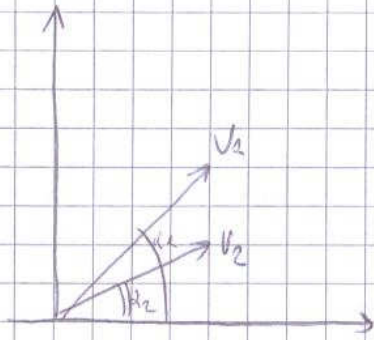
$$j = \sqrt{-1}$$

$$V = \sqrt{R(\bar{V})^2 + I(\bar{V})^2}$$

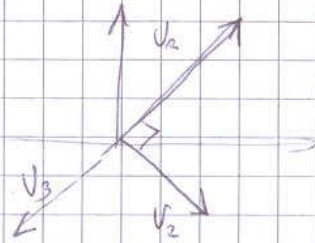
$$\alpha_v = \tan^{-1} \frac{I(\bar{V})}{R(\bar{V})}$$

Proprietà

se la fase di v_1 è maggiore di quella di v_2
 $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ allora v_1 è in anticipo rispetto
a v_2 di $\Delta\alpha$



se abbiamo che $\Delta\alpha = 90^\circ$ i vettori saranno
in quadratura.
 v_1 è in quadratura anticipata di v_2
 v_2 è in quadratura ritardata di v_1



se $\Delta\alpha = 180^\circ$ allora v_3 è in opposizione di fase a v_1

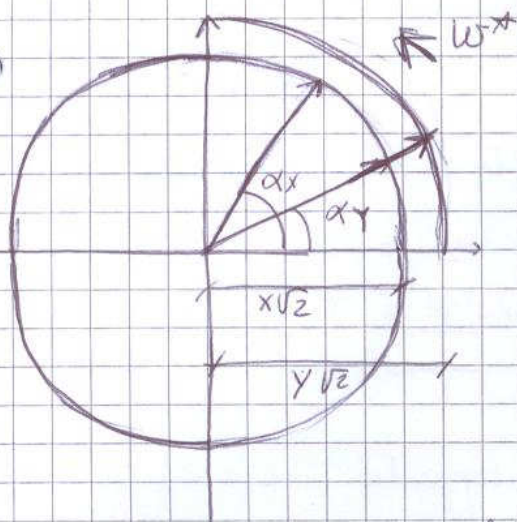
Queste proprietà valgono per entrambi gli insiemi vettoriali.

Nell'insieme $\mathbb{C}$ inoltre:

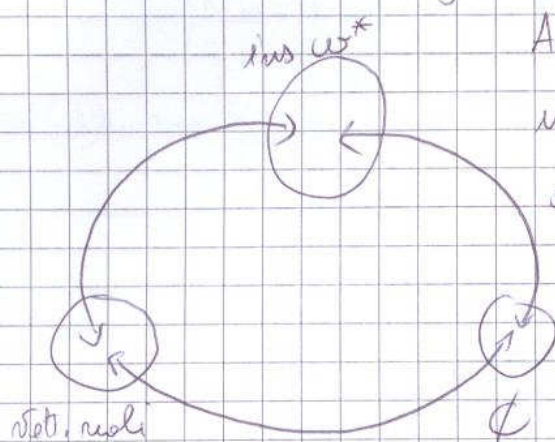
$$\vec{X} = R(\vec{x}) + j I(\vec{x}) = |\vec{X}| e^{j\alpha_x} = \vec{x} (\cos\alpha_x + j \sin\alpha_x)$$

$$K \in \mathbb{R} \quad K\vec{x} = K|\vec{x}| e^{j\alpha_x}$$

RELAZIONE TRA I 3 INSIEMI



~~X~~ X e Y mantengono sempre lo stesso riferimento perché hanno la stessa pulsazione ω^* . Qualsiasi vettore rotante con pulsazione ω^* costante identifica una funzione sinusoidale ~~obliqua~~ e vi è una corrispondenza tra l'insieme delle funzioni e lo stesso ω^* e gli insiemi di vettori reali e immaginari:



Ad ogni funzione sinusoidale potremo associare un vettore rotante reale o immaginario a cui potremo applicare le proprietà e le operazioni delle funzioni sinusoidali.

$$\begin{cases} z = Kx \\ \alpha_z = \alpha_x \end{cases} \rightarrow \tilde{z} = K \tilde{x}$$

$$|\tilde{z}| = \sqrt{(R(\tilde{x}) + R(\tilde{y}))^2 + (I(\tilde{x}) + I(\tilde{y}))^2}$$

$$x(t) + y(t) = z$$

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= (R(\tilde{x}) + jI(\tilde{x})) + (R(\tilde{y}) + jI(\tilde{y})) = \\ &= (R(\tilde{x}) + R(\tilde{y})) + j(I(\tilde{x}) + I(\tilde{y})) \\ \tilde{z} &= |\tilde{z}| e^{j\arctan\left(\frac{I(\tilde{x}) + I(\tilde{y})}{R(\tilde{x}) + R(\tilde{y})}\right)} \end{aligned}$$

$$\tilde{z} = Z e^{j\alpha_z} \rightarrow z(t) = Z\sqrt{2} \sin(\omega^* t + \alpha_z)$$

Per quanto riguarda le derivate:

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow \tilde{x} = X e^{j\alpha_x} & \frac{d}{dt} x(t) = z(t) &\leftrightarrow (X\omega^*) e^{j(\alpha_x + \frac{\pi}{2})} = \omega^* X e^{j\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{j\alpha_x}}_{\tilde{x}} \\ \frac{d}{dt} x(t) &= \omega^* \tilde{x} e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

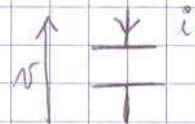
Condensatore e induttore.

- Condensatore.

Niente in regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto, e quindi serve trascurato nelle valutazioni del circuito, ora dobbiamo invece tenerlo in considerazione.

Il condensatore è un meccanismo che ci permette di immagazzinare energia attraverso il campo elettrico che viene a formarsi dalla differenza di potenziale tra le sue 2 armature.

È un dipolo positivo, ma la differenza del resistore non dissipa energia ma la memorizza.



$$E = \frac{1}{2} C V^2$$

$$C = \text{capacità} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

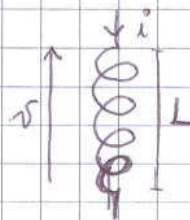
S = superficie
 d = distanza

$$Q = C V \quad i = \frac{dQ}{dt}$$

$$i = \frac{d(CV)}{dt} = C \frac{dV}{dt} \text{ cons. utilità.}$$

- Induttore.

In regime stazionario l'induttore si comporta come un cortocircuito, mentre in regime sinusoidale induce un campo al variare della corrente e della tensione.



$$\Phi = L i$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$B = \mu_0 H \rightarrow \text{settore campo magnetico}$$

$$E = \frac{1}{2} L i^2 \quad v = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

CIRCUITI SINUSOIDALI SEMPLICI E FASORI

Come abbiamo visto possiamo trovare una corrispondenza diretta tra le funzioni sinusoidali e i vettori. Chiameremo il vettore rappresentativo di una funzione sinusoidale fasore, questo ci permetterà, come già visto, di risolvere le operazioni fondamentali delle funzioni direttamente sui fasori.

$$x(t) = \underbrace{X\sqrt{2}}_{\text{valore efficace}} \sin(\omega t + \underbrace{\alpha_x}_{\text{fase}}) \rightarrow \bar{X} = \underbrace{X}_{\text{valore efficace}} e^{j\alpha_x} = x(\cos \alpha_x + j \sin \alpha_x)$$

Resistore

Dato un generatore di tensione sinusoidale

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin(t) \Rightarrow \bar{E} = 10 e^{j0}$$

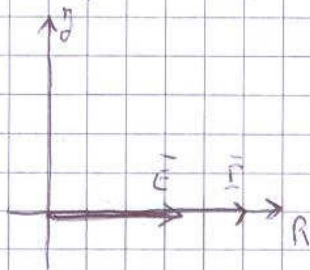
dalla legge di Ohm:

$$v(t) = R i(t) \rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{10\sqrt{2} \sin(t)}{1}$$

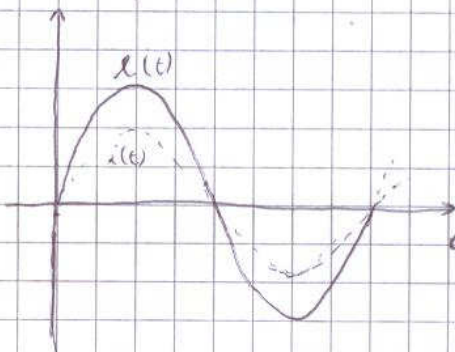
si può risolvere con i fasori

$$\bar{I} = I e^{j\alpha_I} = \frac{\bar{E}}{R} = \frac{10 e^{j0}}{1} = 10 e^{j0} \rightarrow 10\sqrt{2} \sin(t)$$

nel piano di Gauss



e la rapp. grafica sarà:



si indicano con φ l'angolo di ritardo tra la funzione corrente e la funzione tensione

$$\varphi = \alpha_V - \alpha_I$$

$$v(t) = R i(t) \rightarrow \bar{V} = R \bar{I}$$

per il resistore

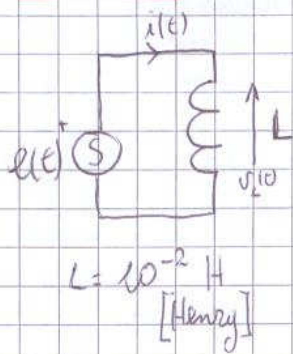
$$\begin{cases} V = RI \\ \alpha_V = \alpha_I \end{cases}$$

$$\varphi = 0$$

$$\underline{V} e^{j\alpha_V} = R \underline{I} e^{j\alpha_I}$$

Il termine R che è la nostra resistenza si chiamerà impedenza e avrà un termine caratteristico esclusivamente reale.

Induttore



prendendo lo stesso generatore precedente $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(t)$
per quanto riguarda l'induttore:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow e(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad e(t) = 10^{-2} \frac{di(t)}{dt}$$

$$\bar{E} = L j\omega \bar{I} \rightarrow 10e^{j0} = 10^{-2} j \cdot 1 \cdot \bar{I} \rightarrow \bar{I} = \frac{10^3}{j} = -j10^3$$

$$\bar{I} = 10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad i(t) = 10^3 \sqrt{2} \sin(t - \frac{\pi}{2})$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{2} \text{ ritardo di } \frac{\pi}{2}$$

quindi i come se la legge di Ohm si scriverebbe:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \bar{V} = \underbrace{L j\omega}_{\text{impedenza } \bar{Z}} \bar{I} = \bar{Z} \bar{I}$$

$$\begin{cases} V = \omega L I \\ \alpha_V = \alpha_I + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\bar{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \rightarrow$$

nel piano di Gauss.

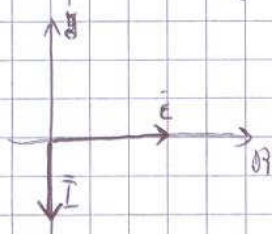
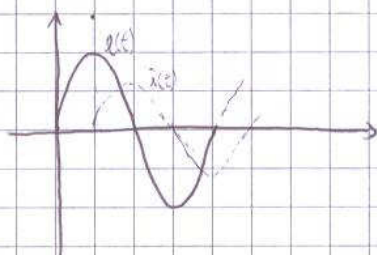


grafico:



$X_L = \omega L [\Omega]$ che chiameremo reattanza induttiva.

$$\text{dato che } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

la corrente i in quadratura
ritardo rispetto alla tensione.

Condensatore

per un condensatore di capacità $C = 10^{-2} \text{ F}$ [Farad] collegato sempre
allo stesso generatore $e(t)$, avremo analogamente all'induttore:

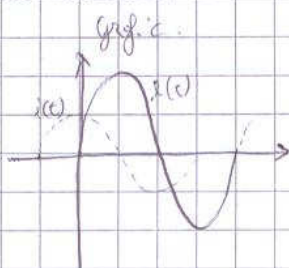
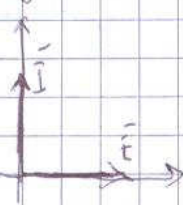
$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \rightarrow i(t) = C \frac{de(t)}{dt} = C 10\sqrt{2} \cos(t)$$

con i fuori:

$$\bar{I} = C j\omega \bar{E} = 10^{-2} j\omega 10 e^{j0} = 10^{-1} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ corrente in quadratura anticipa rispetto alla tensione.}$$

Gauss.



$$i(t) = 10^{-1} \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{2}) \quad \bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}$$

scriviamo la legge di Ohm:

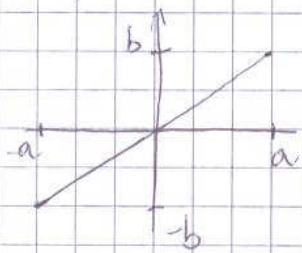
$$\bar{I} = C j\omega \bar{V} \rightarrow \bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}$$

$$\begin{cases} V = \frac{1}{\omega C} I \\ \alpha_V = \alpha_I - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\frac{1}{\omega C} = X_C$ reattanza capacitiva

• Nota 2 (ON)

1) Se prendiamo due vettori complessi $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ in opposizione, ma di modulo uguale:



$$\bar{X} = +a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \tan^{-1} \frac{a}{b}}$$

$$\bar{Y} = -a - jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \tan^{-1} \frac{-a}{-b}}$$

stesso risultato

nelle motorie e nei calcolatori i fasori debbono dunque tenere conto che fasori in opposizione danno lo stesso risultato in fase, e non se ne tiene conto.

2) Se prendiamo una funzione sinusoidale $x(t) = X/\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_x)$ e ne ricaviamo solo la pulsazione ω , vediamo che se periamo $\omega = 0$

$$x(t) = X/\sqrt{2} \frac{\sin \alpha_x}{\cos t} \quad x = X/\sqrt{2} \sin \alpha_x \quad \text{non dipende dal Tempo}$$

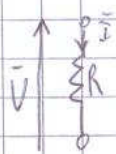
Potremo quindi dedurre che il regime stazionario è un caso limite del regime sinusoidale.

3) Se periamo un induttore in regime stazionario $\omega = 0$ avremo che $x(t) = 0$ quindi l'induttore si comporta come un cortocircuito. Similmente nel condensatore con $\omega = 0$ avremo che $i(t) = 0$ quindi si comporta come un circuito aperto.

4) Il termine di impedenza nei tre bipoli caratteristici è sempre presente, anche se nelle resistenze ha solo la parte reale, mentre negli induttori e condensatori avrà ~~la~~ parte immaginaria, costituita dall'unità immaginaria j e dalla resistenza.

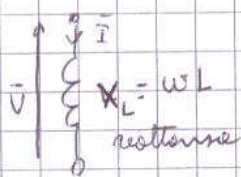
CIRCUITI SINUSOIDALI

Riassumendo la legge di Ohm nel dominio dei fasori per i dipoli caratteristici:



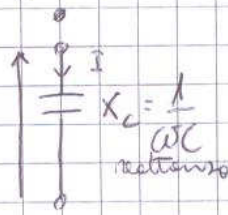
$$\bar{V} = R \bar{I}$$

induttanza



$$\bar{V} = jX_L \bar{I}$$

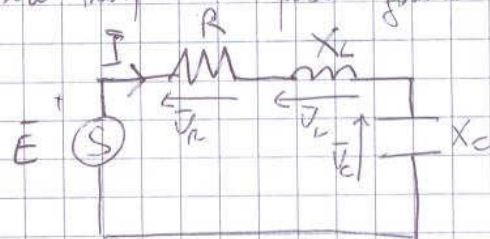
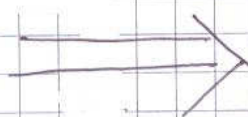
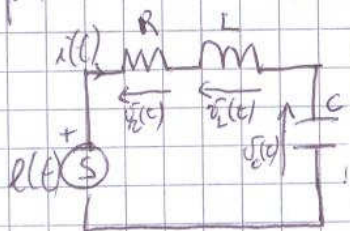
induttanza



$$\bar{V} = -jX_C \bar{I}$$

induttanza

quindi un circuito nel dominio del Tempo può essere trasposto in quello fasoriale:



$$\begin{cases} v_R(t) = R i(t) \\ v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ v_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \\ e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \end{cases} \quad e(t) = E \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow \bar{E} = E e^{j\alpha}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_R = R \bar{I} \\ \bar{V}_L = jX_L \bar{I} \\ \bar{V}_C = -jX_C \bar{I} \\ \bar{E} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C \end{cases}$$

$$\bar{E} = [R + j(X_L - X_C)] \bar{I} \Rightarrow \bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$$

impedenza equivalente

che per risolvere dobbiamo:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt]$$

$$\frac{de(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t)$$

che è un'equazione differenziale alquanto complessa.

$$\bar{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

reattanza X

$$\bar{Z} = R \pm jX$$

Trasforma così 2 possibili casi, uno in cui la reattanza è positiva e quindi l'impedenza avrà un carattere Induttivo - Induttivo.

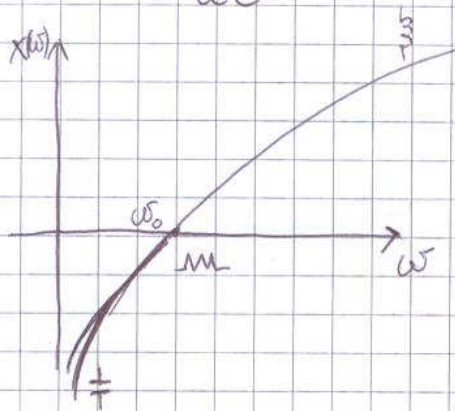
Il caso opposto in cui l'impedenza avrà un carattere Induttivo - Capacitivo.

$$\vec{V} = \vec{Z} \vec{I} \rightarrow V e^{j\alpha_V} = Z e^{j\alpha_Z} I e^{j\alpha_I}$$

$$\begin{cases} V = Z I \\ \alpha_V = \alpha_Z + \alpha_I \rightarrow \alpha_Z = \alpha_V - \alpha_I = \varphi \text{ angolo di potenza.} \end{cases}$$

per $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ otteniamo:

se studiamo $x(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$



• vediamo che per valori di $\omega \rightarrow 0$ $x \rightarrow -\infty$ ed è come se il condensatore prevalesse sugli altri elementi, la corrente tende così a rimpiazzare sempre di più perché il generatore vede solo il condensatore. $i(t)$ non è quindi sfasata di $\frac{\pi}{2}$ in anticipo.

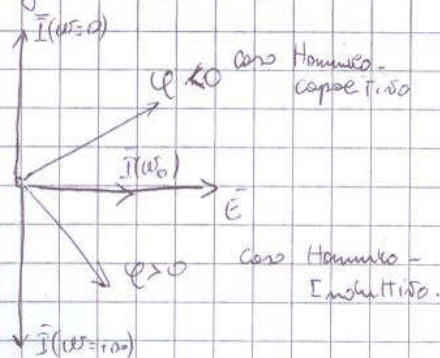
• Al contrario se $\omega \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$, ora sarà l'induttore a prevalere, dando così alla corrente $i(t)$ un ritardo di $\frac{\pi}{2}$.

• Se invece individuiamo il termine ω_0 , $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

ovvero che l'impedanza Z sarà solo composta reali R , e quindi nel circuito prevale la resistenza e la corrente sarà in fase con la tensione.

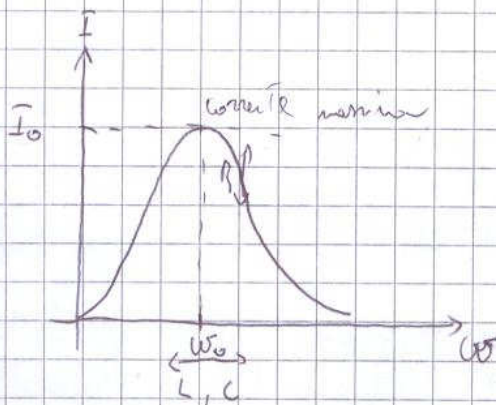
- nei forni otteniamo:

il $\alpha = 0$ $E = \vec{E}$



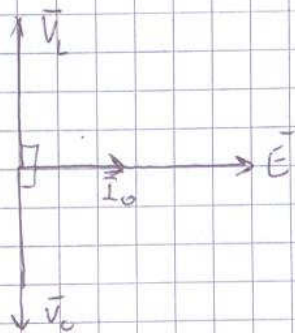
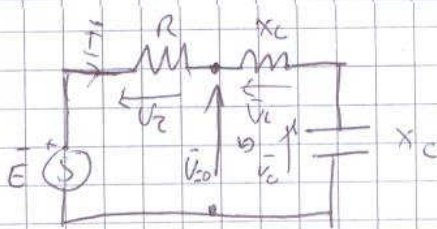
$$\vec{I} = \frac{\vec{E}}{\vec{Z}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)}$$

$$|I| = \frac{E}{Z} = I_0$$



$$\omega = \omega_0 \quad \text{RISONANZA}$$

$$\bar{U}_R = R \bar{I}_0 = R \frac{\bar{E}}{R} = \bar{E}$$



$$\bar{V} = \bar{U}_L + \bar{U}_C = 0 \Rightarrow \bar{U}_L = j\omega_0 L \bar{I}_0 = j \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\bar{E}}{R}$$

risposta
valori efficaci di $\bar{U}_L$ e $\bar{U}_C$

$$\begin{cases} \bar{U}_L = j \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{R} \bar{E} \\ \bar{U}_C = -\bar{U}_L = -j \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{R} \bar{E} \end{cases}$$

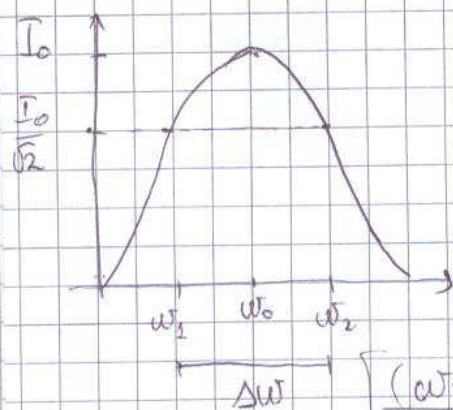
Possiamo variare con i valori di R, L, C affinché i valori efficaci $\bar{U}_L$ e $\bar{U}_C$ siano molto superiori o inferiori a $\bar{E}$. Se sono superiori c'è risonanza nel caso di un amplificatore, quindi non vale più il principio di non amplificazione del regime stazionario.

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1 \quad \text{fattore di qualità o di merito.}$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{E/R}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} (\omega L \frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega})^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} (\omega L \frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$\sqrt{\frac{E}{C}}$

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \frac{L}{C} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$



$$\text{Prendiamo } I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{Q^2} \Rightarrow \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

se i valori di ω_1 e ω_2 sono molto vicini a ω_0

$$\left[\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega \omega_0} \right]^2 = \frac{1}{Q^2} \Rightarrow \lim_{\substack{\omega_1 \rightarrow \omega_0 \\ \omega_2 \rightarrow \omega_0}} \left[\frac{2\omega_0(\omega - \omega_0)}{\omega_0^2} \right]^2 = \frac{1}{Q^2}$$

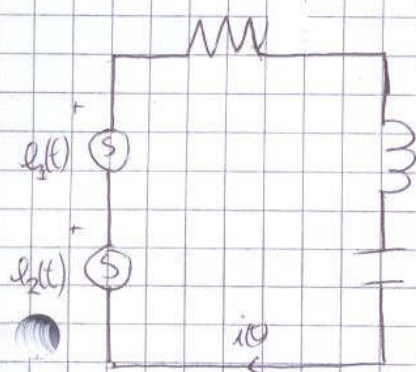
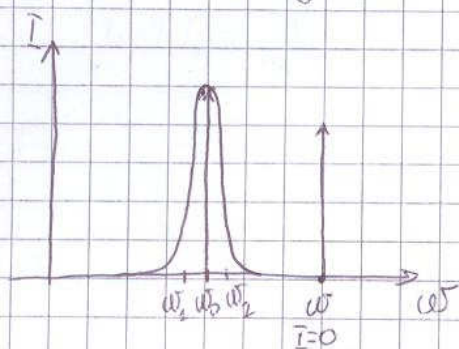
$$\rightarrow \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{Q^2}$$

$$\omega - \omega_0 \approx \pm \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\omega_{2,2} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right)$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} - 1 + \frac{1}{2Q} \right) = \frac{\omega_0}{Q} = \Delta\omega$$

Se abbiamo un ω_0 molto piccolo e un Q molto grande $Q \gg \omega_0$ abbiamo creato così un filtro che ci esclude le pulsazioni non prossime a ω_0



$$e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(100t)$$

$$e_2(t) = 10\sqrt{2} \sin(100t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

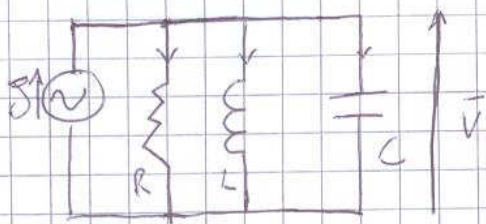
Circuito non infrequenzabile
vale quindi il principio
di sovrapposizione degli
effetti

però se vediamo che $\omega_0 = 1$ e $Q = 100 \Rightarrow I_1 \gg I_2$

Il valore di I_2 è trascurabile sarà attenuato nell'ordine di

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ che corrisponde a 3 decibel : $\alpha_{dB} = 20 \lg_{10} X$

RISONANZA IN PARALLELO



$$R \rightarrow G = \frac{1}{R} \text{ conduttanza}$$

$$L \rightarrow \dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$$

$$C \rightarrow \dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{-j\omega C} = j\omega C$$

$$\bar{S} = \dot{Y} \bar{V} = \left(G - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C \right) \bar{V}$$

$$\bar{V} = \frac{\bar{S}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$\rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\bar{I}_R = \bar{S}$$

Notiamo che si possono trovare
risultati analoghi all'amplificatore di tensione,
però stavolta sono di corrente.

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

Dato che Tensione e corrente in regime sinusoidale sono funzioni
 alternative (dipendono dal tempo)

$$v(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_v)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_i)$$

Parleremo quindi anche di una potenza istantanea:

$$p(t) = v(t) i(t)$$

$$p(t) = 2VI \frac{1}{2} [\cos(\alpha_v - \alpha_i) + \cos(2\omega t + \alpha_v + \alpha_i)]$$

$$= \boxed{VI \cos \varphi + VI \cos(2\omega t + \alpha_v + \alpha_i)} \quad \begin{matrix} \text{LIBRO} \\ \rightarrow VI \cos \varphi - VI \cos(2\omega t - \varphi) \end{matrix}$$

La potenza istantanea la definiremo quindi come la somma di:

- Una potenza media o ATTIVA

$$\langle P(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = VI \cos \varphi$$

$$\boxed{\langle P(t) \rangle_T = P = VI \cos \varphi}$$

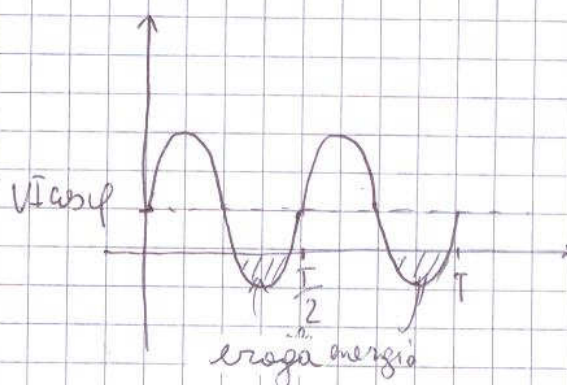
- Una potenza del tipo sinusoidale, dipendente dal tempo, detta potenza fluttuante.

$$\boxed{VI \cos(2\omega t + \alpha_v + \alpha_i)} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{LIBRO} \\ - VI \cos(2\omega t - \varphi) \end{matrix}$$

Graficamente abbiamo che:

Il circuito assorbe solo energia
 perché sempre positivo

Il circuito assorbe ed eroga
 energia a seconda del segno



Dalla potenza possiamo dedurre che il valore efficace non è niente altro che
 il valore che moltiplicato corrente e tensione si ritrova in regime
 lineare.

• Definiamo inoltre il prodotto

$$Q = VI \sin \varphi \quad \text{potenza reattiva} \quad \text{e si misura in Volt-Ampere reattivi [VAR]}$$

• Definiamo invece la potenza apparente:

$$A = VI \quad [\text{VA}] \quad \text{che può esprimersi anche in altre potenze: } A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

POTENZA NEI BIPOLI

• RESISTORE

$$\varphi = 0 \rightarrow P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad [W] \quad Q = 0$$

• INDUTTORE

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad P = 0 \quad Q = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L}$$

• CONDENSATORE

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad P = 0 \quad Q = -VI = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C}$$

POTENZA COMPLESSA

Se abbiamo:

$$\bar{V} = V e^{j\varphi_V}$$

$$I = I e^{j\varphi_I}$$

allora le nostre potenze

$$\boxed{\bar{A} = \underline{P} + jQ}$$

con parte reale $P = VI \cos \varphi$

e parte immaginaria $Q = VI \sin \varphi$

$$\bar{P} = \bar{V} \bar{I}^* = VI e^{j\varphi_V} e^{-j\varphi_I} = VI e^{j\varphi} = VI (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \bar{A}$$

dove $\bar{I}^*$ è il complesso coniugato di $\bar{I}$

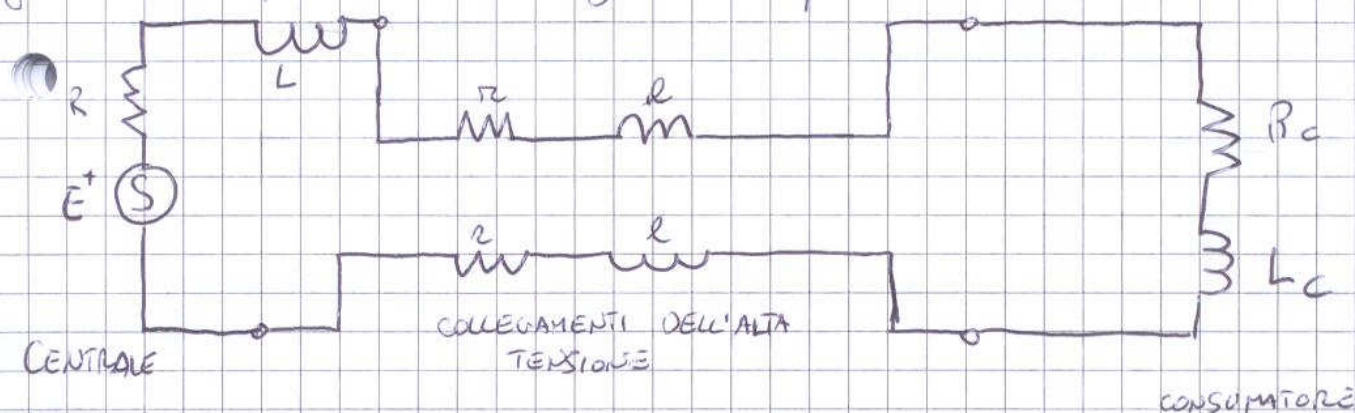
In un circuito quindi abbiamo che:

$$\boxed{\sum_k \bar{A}_k = 0} \rightarrow \boxed{\begin{cases} \sum_k P_k = 0 \\ \sum_k Q_k = 0 \end{cases}}$$

RIFASAMENTO

Vogliamo ora prendere in esame un problema di tipo economico legato all'angolo di potenza Tensione-corrente.

Una centrale elettrica, per la produzione di tensione, si comporterà come un generatore di tensione sinusoidale a cui sono attaccati in serie un resistore ed un induttore, dovuti alle impedenze interne alla centrale. Anche i cavi dell'alta tensione sono un'impedenza del tipo resistiva più induttiva. Infine il consumatore (fabbrica, officina, fabbrica, ecc...) avrà anche egli un comportamento induttivo-resistivo.



Il consumatore paga l'ente produttore in base all'energia erogata in un certo lasso di tempo, in base al valore della potenza attiva.

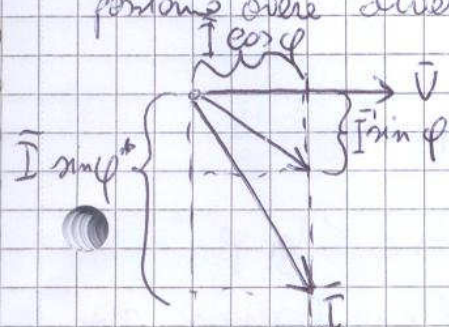
$V = 220 \text{ V}$
 $f = 50 \text{ Hz}$
 $P = 3 \text{ kW}$

$$P = VI \cos \varphi$$

$$\tilde{Z} = R_c + j\omega L_c = \sqrt{R_c^2 + (\omega L_c)^2} e^{j \tan^{-1} \frac{\omega L_c}{R_c}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L_c}{R_c}$$

Come possiamo notare graficamente a partire dal valore P e dal valore del $\cos \varphi$ possiamo avere diversi valori della corrente I .



In parole potremmo a partire da potenza attiva possiamo avere diversi valori di potenza fluttuante.

$$Q = VI \sin \varphi$$

Il produttore cercherà di mantenere in uscita sempre il valore $\bar{I}'$ di corrente, così da non dover investire troppo nella manutenzione degli organi induttivi e resistivi, soggetti a tanto sforzo e usura quanto la corrente che si deve pompare.

Il produttore indicherà il valore $\cos \varphi$ come "factor di potenza".

$\cos \varphi > 0,9$ condizione ideale per il produttore

$0,7 < \cos \varphi < 0,9$ pagamento di una penale oppure esecuzione del riforamento

$\cos \varphi < 0,7$ riforamento obbligatorio.

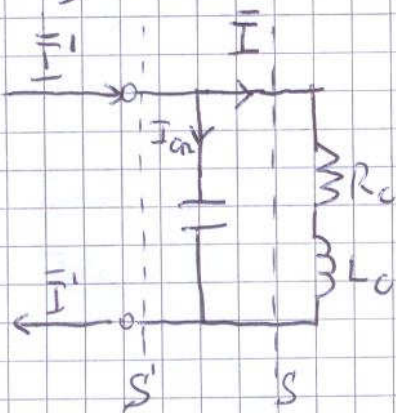
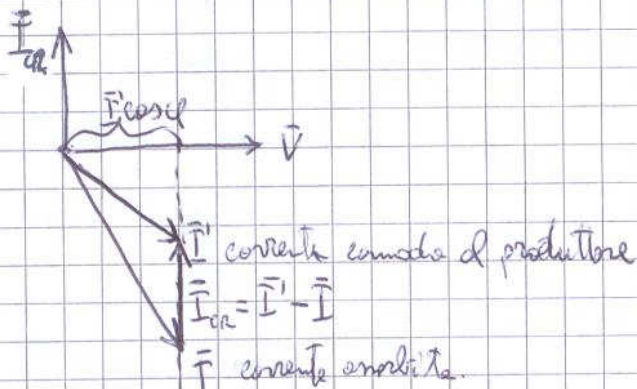
l'energia che non si pagherà è:

$$E = \int_T P(t) dt$$

le perdite invece:

$$\int Q(t) dt$$

Per eseguire il riforamento:



Inseriamo una corrente in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ nel nostro circuito in modo da riequilibrare il tutto.

L'organo che ci permette ciò non è nient'altro che un condensatore.

Se prendiamo ora le espressioni di Togli
 S' vista dal produttore e la S vista dal consumatore:

$$S'$$

$$\bar{V}, \bar{I}', \varphi', A'$$

$$P = P'$$

$$\varphi' = \tan^{-1} \frac{Q'}{P'}$$

$$Q' = P' \tan \varphi'$$

$$S$$

$$\bar{V}, \bar{I}, \varphi, A$$

$$P = P'$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$$

$$Q = P \tan \varphi$$

$$\bar{I}' \cos \varphi' = \bar{I} \cos \varphi$$

$$\bar{I}' = \bar{I} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}$$

entrando le espressioni hanno valori vantaggiosi sia per il produttore che per il consumatore.

Avremo quindi a portata di P diversi valori di Q :

$$P = P'$$

$$Q' = Q + Q_{CR}$$

$$Q_{CR} < 0$$

$$Q' = Q + \left(- \frac{V^2}{X_{CR}} \right) \rightarrow P \tan \varphi' = P \tan \varphi - \frac{V^2}{X_{CR}}$$

$$X_{CR} = \frac{V^2}{P(\tan \varphi - \tan \varphi')} = \frac{1}{\omega C_R} \rightarrow C_R = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{V^2 \omega}$$

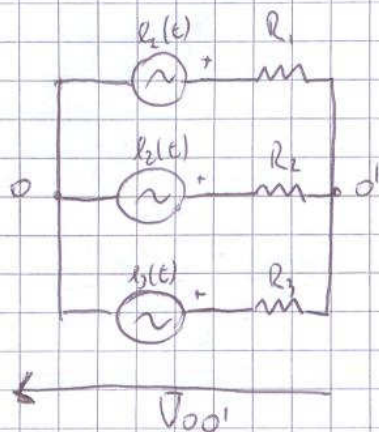
Abbiamo così tutti i valori per trovare la capacità del nostro condensatore che è riportata al valore di $\cos \varphi > 0,9$ (consigliati i valori 0,92-0,95).

Naturalmente l'acquisto di un condensatore ad elevata capacità è una spesa molto onerosa, e sconsigliata rispetto al pagamento della penale. Per ovviare a questo problema si può applicare un condensatore o una batteria di condensatori, solo ai componenti che emettono la maggior quantità di corrente, eseguendo un riforamento localizzato della corrente.

Il condensatore frena la risalita di potenza, anche la potenza reattiva e la riduce all'occorrenza. Con l'inserimento del condensatore abbiamo un circuito del tipo R, L, C, quindi soggetto a risonanza, per evitare problemi il condensatore va attivato sempre dopo l'interruttore dell'impianto, in modo da ridurlo insieme a tutto l'impianto quando necessario.

RETI TRIFASI

Prendiamo in esame la seguente configurazione:



$$e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(t) \rightarrow \bar{E}_1 = 10e^{j0}$$

$$e_2(t) = 20\sqrt{2} \sin(t) \rightarrow \bar{E}_2 = 20e^{j0}$$

$$e_3(t) = 15\sqrt{2} \sin(t) \rightarrow \bar{E}_3 = 15e^{j0}$$

Se applichiamo Millmann

$$\bar{V}_{oo'} = - \frac{\frac{\bar{E}_1}{R_1} + \frac{\bar{E}_2}{R_2} + \frac{\bar{E}_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Prendiamo per ora in un caso particolare 1^* :

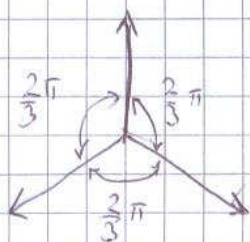
$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$\bar{V}_{oo'} = - \frac{\frac{1}{R}(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3)}{\frac{3}{R}} = - \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{3}$$

Possiamo estendere questo caso al 2^* in cui:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 &= 0 \\ \bar{V}_{oo'} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{E}_1 \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{R_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{V}_2 = \bar{E}_2 \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{R_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{V}_3 = \bar{E}_3 \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{R_3} \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto che i 3 lati del circuito sono indipendenti dal circuito:



$$|E_1| = |E_2| = |E_3| = E$$

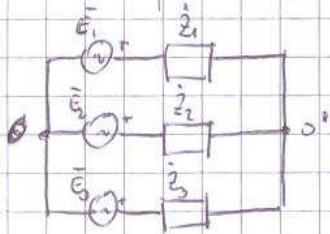
Stesso modulo e sfasamento di $\frac{2}{3}\pi$

$$\bar{E}_1 = E e^{j0} \rightarrow e_1(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$\bar{E}_2 = E e^{j\frac{2}{3}\pi} \rightarrow e_2(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$$

$$\bar{E}_3 = E e^{-j\frac{4}{3}\pi} = E e^{j\frac{2}{3}\pi} \rightarrow e_3(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi)$$

Possiamo quindi generalizzare il caso 2*:



In un circuito con generatori $\bar{E}_k$ e impedenze $\bar{Z}_k$ essere simmetrico ed equilibrato α :

$$\bar{V}_{00'} = 0$$

$$\bar{V}_k = \bar{E}_k$$

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{E}_k}{\bar{Z}_k}$$

con $k=1, 2, 3$

Il caso generale invece ~~non~~ è:

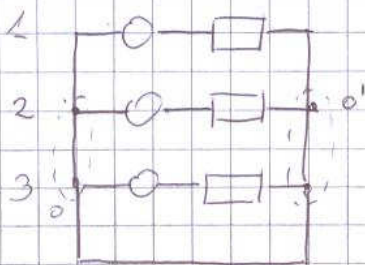
$$\bar{V}_{00'} = - \frac{\sum_{k=1}^3 \bar{E}_k / \bar{Z}_k}{\sum_{k=1}^3 1/\bar{Z}_k}$$

$$\bar{V}_k = \bar{V}_{00'} + \bar{E}_k$$

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{V}_{00'} + \bar{E}_k}{\bar{Z}_k}$$

Il caso generale vale anche per la presenza dello ~~z~~ solo simmetrico.

In un circuito in simmetria possiamo imporre la $V_{00'}$ inserendo un cortocircuito tra i morsetti 0 e $0'$:



Imponiamo con $\bar{V}_{00'} = 0$

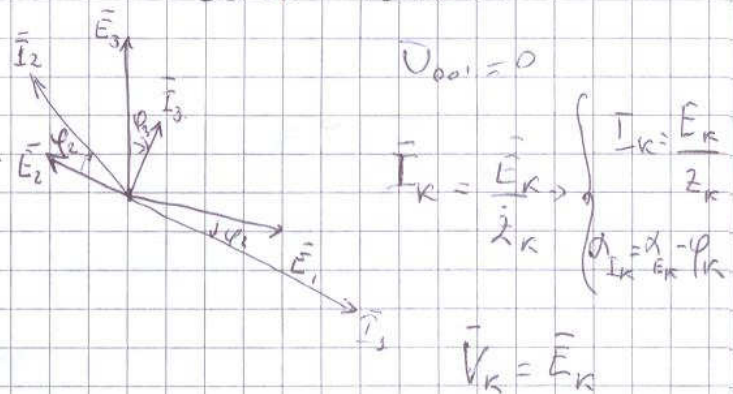
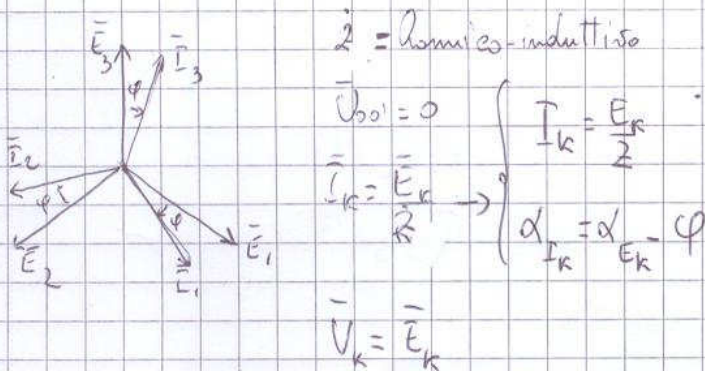
$$\bar{I}_k = \frac{\bar{E}_k}{\bar{Z}_k}$$

$$\bar{V}_k = \bar{E}_k$$

Graficamente possiamo vedere che le 2 configurazioni sono:

Simmetrico ed equilibrato

$\bar{V}_{00'} = 0$ Forzato.

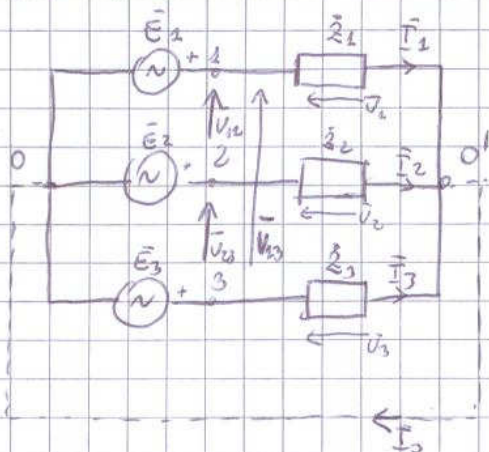


anche $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}_3$ è una
tensione simmetrica

Il vantaggio sta nel fatto che nonostante ai morsetti ~~non~~ sia una corrente ~~non~~ una tensione ~~non~~ una tensione ella.

TRIFASE SIMMETRICO - TENSIONE CONCATENATA

Se prendiamo un circuito in Trifase simmetrico ($\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$)
 e vediamo il caso in cui sia in equilibrio o non.



Tensioni stellate simmetriche $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$

Equilibrio $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}$

Tensioni concatenate $\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$ (simul.)

3 FILI

Equilibrio

$$\bar{V}_{00'} = 0$$

$$\bar{I}_K = \frac{\bar{E}_K}{\bar{Z}}$$

$$\bar{V}_{2K} = \bar{Z} \bar{I}_K = \bar{E}_K$$

$$\bar{Z} = \bar{Z} e^{j\varphi}$$

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

corrente di linea

Squilibrio

$$\bar{V}_{00'} = - \frac{\sum_K \bar{E}_K / \bar{Z}_K}{\sum_K 1/\bar{Z}_K}$$

$$\bar{I}_K = \frac{\bar{V}_{00'} + \bar{E}_K}{\bar{Z}}$$

$$\bar{V}_{00'} + \bar{E}_K = \bar{V}_{2K}$$

$$\bar{Z}_K = \bar{Z}_K e^{j\varphi_K}$$

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

4 FILI

Equilibrio

$$\bar{V}_{00'} = 0$$

$$\bar{I}_0 = 0$$

Come il caso

3 Fili in
equilibrio

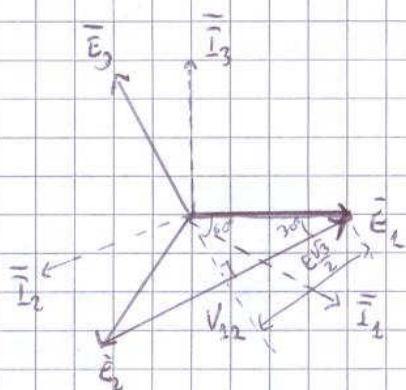
Squilibrio

$$\bar{V}_{00'} = 0$$

$$\bar{I}_K = \frac{\bar{E}_K}{\bar{Z}_K}$$

$$\bar{V}_{2K} = \bar{E}_K$$

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_0$$



tensione simmetrica diretta (tensioni in senso orario)

Definiamo la corrente concatenate:

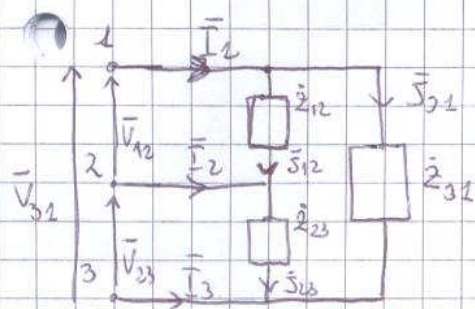
$$\text{tra i punti 1-2: } \bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \sqrt{3} \bar{E}_1 e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{tra i punti 2-3: } \bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \sqrt{3} \bar{E}_2 e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{tra i punti 3-1: } \bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$$

Resistenza a Triangolo - Vediamo già dalla schematizzazione che la tensione ai morsetti della resistenza non è altre che quella concatenata:



$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{\bar{Z}_{12}}$$

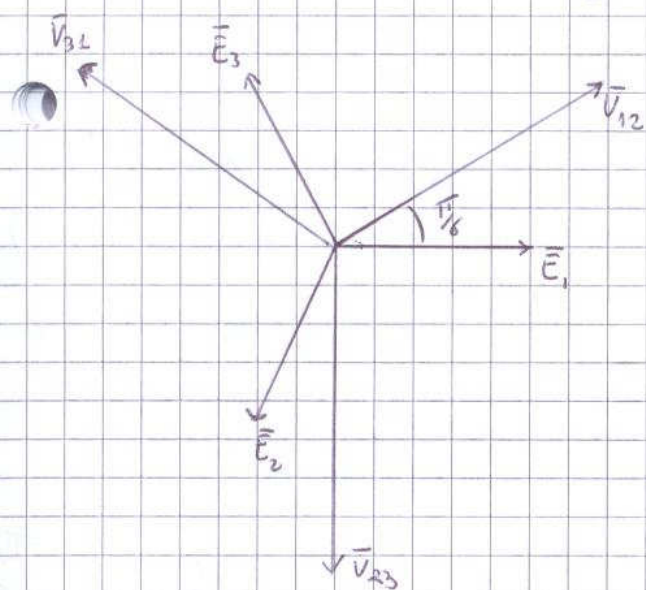
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31}$$

$$\bar{I}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{\bar{Z}_{23}}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12}$$

$$\bar{I}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{\bar{Z}_{31}}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23}$$



Abbiamo che le correnti $\bar{I}_k$ sono sfasate rispetto alle tensioni stellate $\bar{E}_k$ di un angolo φ mentre quelle concatenate $\bar{I}_{hk}$ lo sono, sempre di un angolo φ , rispetto alle tensioni concatenate $\bar{V}_{hk}$.

In un circuito in equilibrio:

$$\bar{Z}_\Delta = 3 \bar{Z}_Y$$

$$\Delta \rightarrow \bar{I}_{hk} = \frac{\bar{V}_{hk}}{\bar{Z}_\Delta}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \bar{E}_{hl} e^{j\frac{\pi}{6}}}{3 \bar{Z}_Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{I}_h e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$Y \rightarrow \bar{I}_k = \frac{\bar{E}_k}{\bar{Z}_Y}$$

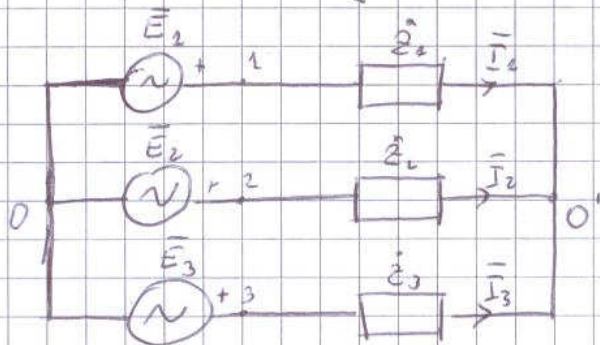
$$\bar{I}_1 = \sqrt{3} \bar{I}_{12} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Si perviene agli stessi risultati:

POTENZA IN TRIFASE

La potenza istantanea in un sistema trifase è definita dalla somma delle 3 potenze istantanee delle 3 fasi:

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$



Le equazioni in stato stazionario + equilibrio:

$$\begin{cases} e_1(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ e_2(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ e_3(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi) \\ i_3(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi) \end{cases}$$

Dalla formula per un generatore $p(t) = EI(\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi))$

$$p(t) = EI \left[\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi) + \cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi) \right]$$

Questi valori si annullano a vicenda.

$p(t) = 3EI \cos \varphi$ L'annullarsi della potenza fluttuante non vuol dire che essa scompare bensì che le tre linee si compensano tra di loro.

Posiamo inoltre facilmente individuare:

$P(t) = \underline{P} = 3EI \cos \varphi$ la potenza si riduce alla sola componente attiva.

Tensioni concatenate

$$V = \sqrt{3} E \rightarrow \underline{P} = \sqrt{3} VI \cos \varphi$$

φ resta l'angolo di sfasamento tra $\underline{I}$ ed $\underline{E}$

$$\underline{P} = 3EI \cos \varphi$$

$$Q = 3EI \sin \varphi$$

La potenza complessa:

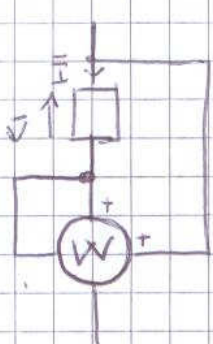
$$\hat{A} = P + jQ = 3EI(\cos\varphi + j\sin\varphi) = 3EI e^{j\varphi} \quad A = 3EI$$

$$\hat{A} = 3\vec{E}_1 \vec{I}_1^*$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3EI$$

MISURARE LA POTENZA ATTIVA

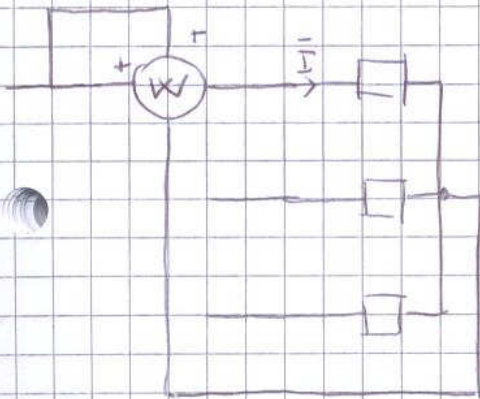
Il wattmetro come già visto è un dispositivo che misura la corrente in serie (amperometro) e la tensione in parallelo (voltmetro) e ne fa il prodotto, nel caso della corrente sinusoidale, ne prende i valori e ne fa il prodotto reale:



$$W = \vec{V} \cdot \vec{I} = VI \cos(\vec{V}, \vec{I})$$

$$\vec{V} \cdot \vec{I} = VI \cos\varphi$$

Collegiamo il wattmetro così:

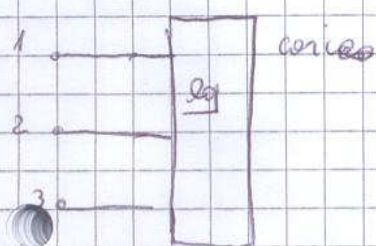


Collegando le differenze di potenziale al centro stella dei resistori, misureremo:

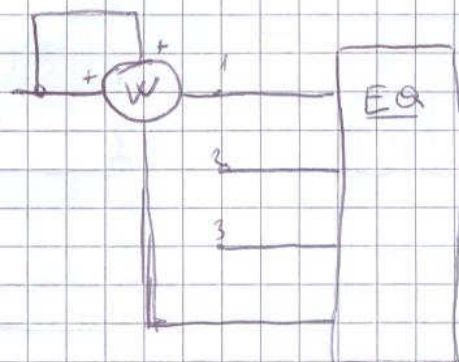
$$(W) = \vec{E} \cdot \vec{I} \rightarrow P = 3\vec{E} \cdot \vec{I}$$

Di solito in un circuito il carico non è visibile come tre resistori men'a stella,

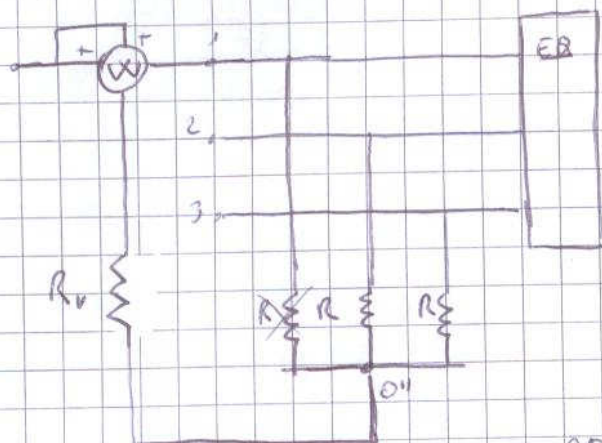
ma come un unico agglomerato, schematizzabile come una scatola chiusa:



Se il centro neutro è disponibile il filo di centro stella allora colleghiamo il wattmetro:



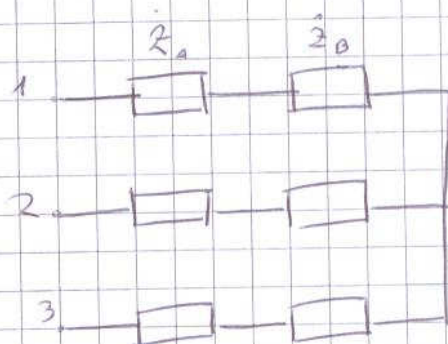
Altimenti utilizziamo delle resistenze in parallelo:



Che come vedremo in seguito ci dà lo stesso risultato e inoltre ci permette di eliminare la resistenza sul primo filo, comprendendo delle resistenze $R = R_v$. Più la R_v è alta più la misura sarà precisa (vicina alla tensione a vuoto)

SERIE E PARALLELO

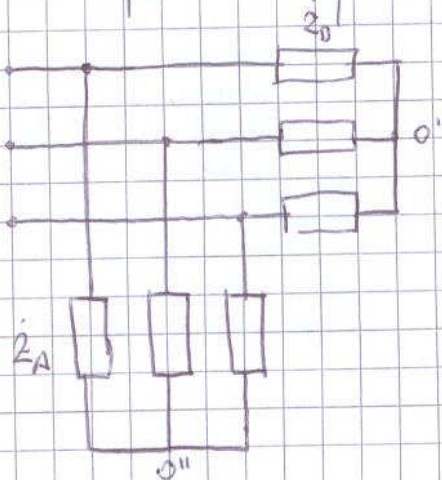
Le impedenze in serie sono molto semplici da studiare e schematizzare, e non rappresentano un caso molto particolare dato che possono essere semplicemente viste come una Z_{eq}



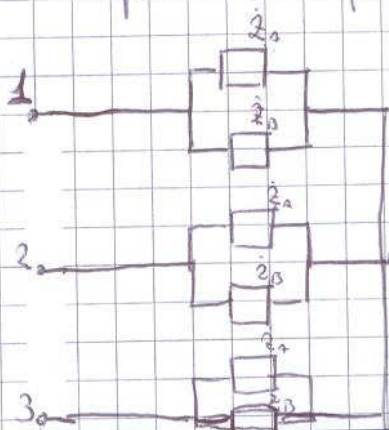
$$Z_{eq} = Z_A + Z_B$$

Il series è equilibrato se entrambe le impedenze sono equilibrate, squilibrate o almeno una delle stelle di impedenze è squilibrata.

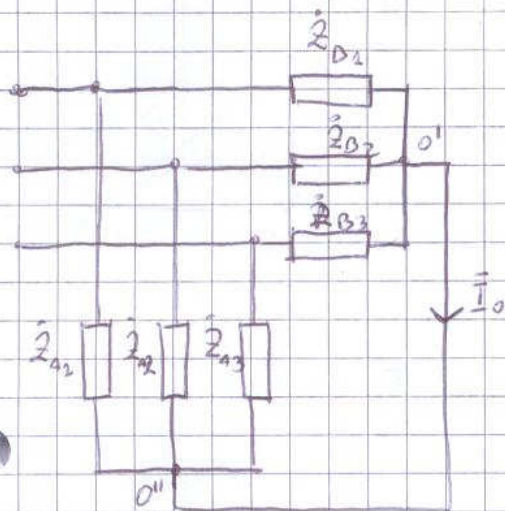
Le impedenze in parallelo invece ci trovano spazio a diverse applicazioni.



Se i corichi delle Z_A e Z_B sono equilibrati allora avremo che $V_{00'} = V_{00''} = 0$ allora le impedenze si possono considerare in parallelo:

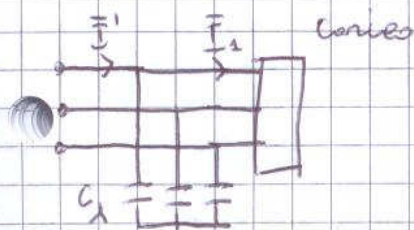


Se entrambi i carichi o almeno uno dei due è un carico squilibrato allora le impedenze non possono mettersi in parallelo, a meno che di non imponga la loro differenza di potenziale nulla con un cortocircuito. Otteniamo così un carico squilibrato.



RIFASAMENTO

Il rifasamento di un circuito trifase viene fatto in maniera del tutto analoga a quello di una semplice rete a regime sinusoidale con il vantaggio di poter scegliere se i condensatori li vogliamo porre a stella o a triangolo:



$$Q' = Q + Q_{CA}$$

$$Q' = P' \tan \varphi'$$

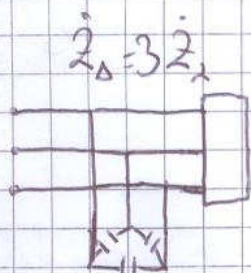
$$P \tan \varphi' = P \tan \varphi - \frac{3E^2}{X_{CA}}$$

$$Q = P \tan \varphi$$

$$Q_{CA} = -\frac{3E^2}{X_{CA}}$$

$$X_{CA} = \frac{3E^2}{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}$$

$$\rightarrow C_X = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega E^2}$$



$$C_D = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{9\omega E^2}$$

Assumo che la capacità dei condensatori a triangolo è molto inferiore di quella a stella. La scelta delle due configurazioni dipende dalle esigenze della rete da rifasare.

CALCOLO POTENZA - METODO ARON.

Un sistema molto utile e importante per la misura della potenza trifase, con l'utilizzo di solo 2 watt-metri, senza dover essere connessi al centro stella del circuito, è il metodo ARON.

Se consideriamo una stella simmetrica di tensioni e le rispettive correnti concatenate, possiamo trovare, un'altra stella di tensioni, non simmetrica, di centro O' diverso dal precedente, ma che ottiene le stesse correnti concatenate.

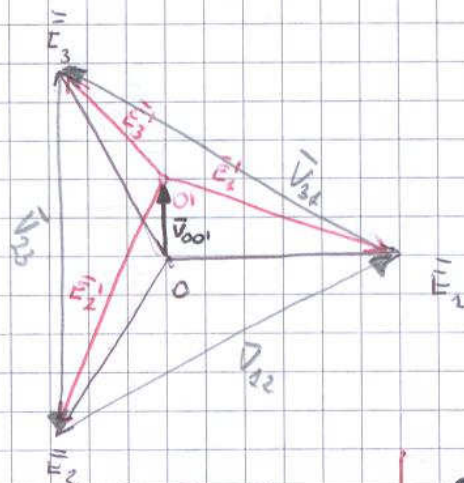
Tramite semplici passaggi matematici:

$$\begin{cases} \bar{E}'_1 = \bar{E}_1 - \bar{V}_{00'} \\ \bar{E}'_2 = \bar{E}_2 - \bar{V}_{00'} \\ \bar{E}'_3 = \bar{E}_3 - \bar{V}_{00'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{A} = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}_2 \bar{I}_2^* + \bar{E}_3 \bar{I}_3^* \\ \bar{A}' = \bar{E}'_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}'_2 \bar{I}_2^* + \bar{E}'_3 \bar{I}_3^* \end{cases}$$

$$\bar{A} = \bar{A}' + \bar{V}_{00'} (\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*) \Rightarrow \bar{A} = \bar{A}' \text{ quando } \bar{V}_{00'} = 0 \text{ oppure}$$

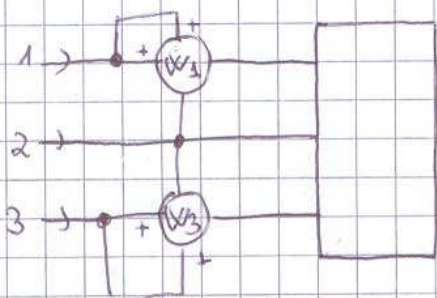
$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ cioè il sistema è equilibrato o a 3 fili equilibrato



$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \quad \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$$

$$\bar{E}'_1 + \bar{E}'_2 + \bar{E}'_3 \neq 0$$

Ora inseriamo 2 watt-metri nel circuito con la seguente configurazione:



$$W_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{V}_{12}$$

$$W_3 = \bar{I}_3 \cdot \bar{V}_{32}$$

se ora alle correnti concatenate ne aggiungiamo un'altra (tenendo gli stessi valori concatenati), ne cambia il centro O' in

$$\bar{E}_2 \rightarrow \bar{V}_{00'} = \bar{E}_2$$

$$\bar{A}' = \bar{V}_{12} \bar{I}_1^* + \bar{V}_{32} \bar{I}_3^*$$

$$\begin{cases} \bar{E}'_2 = 0 \\ \bar{E}'_1 = \bar{V}_{12} \\ \bar{E}'_3 = -\bar{V}_{23} = \bar{V}_{32} \end{cases}$$

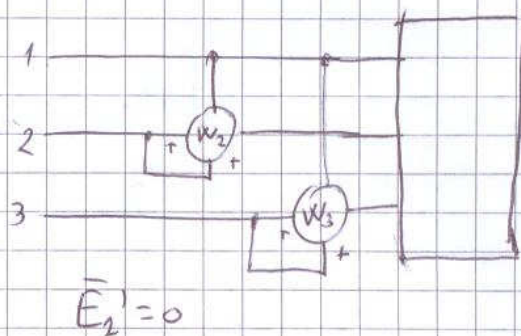
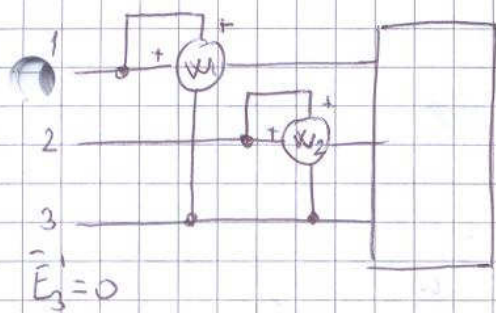
$$P = \bar{V}_{12} \bar{I}_1 + \bar{V}_{32} \bar{I}_3 = W_1 + W_3$$

se vogliamo ricavare la relazione trovata rispetto alla precedente (tenendo di tensione stellate):

$$P = \bar{V}_{12} \bar{I}_1 + \bar{V}_{32} \bar{I}_3 = \bar{E}'_1 \bar{I}_1 + \bar{E}'_3 \bar{I}_3 = (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \bar{I}_1 + (\bar{E}_3 - \bar{E}_2) \bar{I}_3 = \bar{E}_1 \bar{I}_1 + \bar{E}_2 (\bar{I}_1 - \bar{I}_3) + \bar{E}_3 \bar{I}_3$$

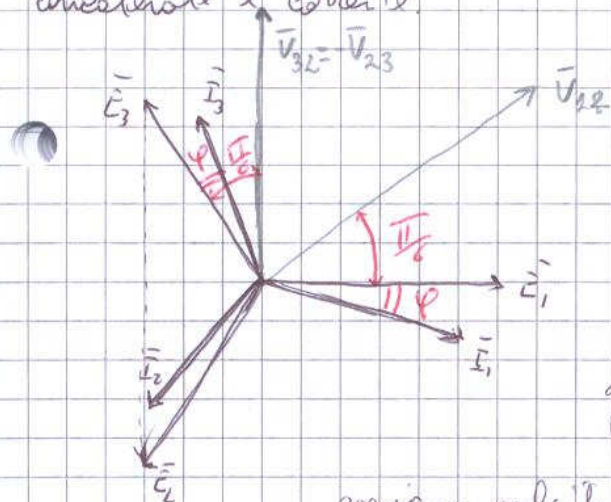
$$P = \bar{E}_1 \bar{I}_1 + \bar{E}_2 \bar{I}_2 + \bar{E}_3 \bar{I}_3$$

Abbiamo altre 2 possibilità di inserire i 2 wattmetri tra le linee:



Bisogna sempre controllare la posizione dei morsetti positivi.

Per il calcolo della potenza fluttuante possiamo riferirci agli angoli tra tensioni concatenate e correnti.



$$\begin{cases} W_1 = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \\ W_2 = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \end{cases}$$

ricorrendo alle formule di trigonometria:

$$\begin{cases} W_1 = VI \left(\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi - \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi \right) \\ W_2 = VI \left(\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi + \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi \right) \end{cases}$$

possiamo subito notare che $W_1 + W_2 = \sqrt{3} VI \cos\varphi = 3EI \cos\varphi = P$

inoltre: $W_3 - W_1 = VI \sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$ abbiamo così trovato una correlazione anche per la potenza fluttuante.

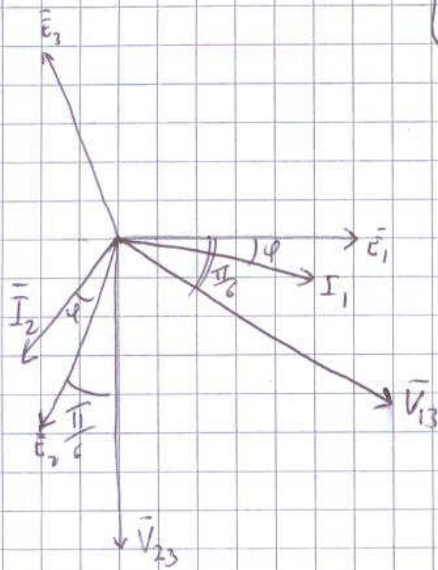
Dobbiamo però fare attenzione al fatto che mentre il calcolo della potenza attiva vale sempre (come nel caso squilibrato a 4 fili), la correlazione con la potenza fluttuante si può adottare solo per circuiti simmetrici equilibrati. Con l'inserimento nel circuito di un amperometro e di un voltmetro, possiamo facilmente trovare il valore di φ dai risultati delle formule di ABOVE.

ossia $\cos\left(\frac{W_1 + W_2}{VI}\right) = |\cos\varphi|$ ma ci dà più informazioni sul ritardo o anticipo della corrente.

$Q = \sqrt{3}(W_3 - W_1) \geq 0$ ci dà l'informazione necessaria per il segno.

Il calcolo della G nei casi $\bar{E}_1' = 0$ e $\bar{E}_3' = 0$ è molto semplice:

$$\bar{E}_3' = 0$$

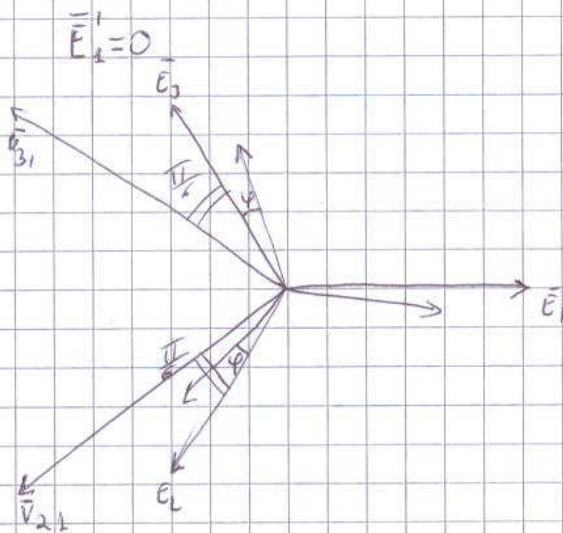


$$\begin{cases} W_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{V}_{13} = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \\ W_2 = \bar{I}_2 \cdot \bar{V}_{23} = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \end{cases}$$

$$W_1 = VI \left(\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi + \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi \right)$$

$$W_2 = VI \left(\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi - \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi \right)$$

$$\frac{G}{\sqrt{3}} = W_1 - W_2$$



$$W_2 = \bar{I}_2 \cdot \bar{V}_{21} = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$$

$$W_3 = \bar{I}_3 \cdot \bar{V}_{31} = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$$

$$W_2 = VI \left(\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi + \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi \right)$$

$$W_3 = VI \left(\cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi - \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi \right)$$

$$\frac{G}{\sqrt{3}} = W_2 - W_3$$

VANTAGGI DELLE LINEE TRIFASI

Prendiamo ad esempio due linee, una monofase e una trifase.

In cui le potenze attive sono:

$$P_M = \sqrt{3} I_M \cos \varphi \quad \text{e} \quad P_T = 3 I_T \cos \varphi \quad P_M = P_T \Rightarrow I_M = \sqrt{3} I_T$$

per quanto riguarda le potenze dissipate avranno che:

$$P_d = P_{dM} = 2 R_L I_M^2 \quad P_d = P_{dT} = 3 R_L I_T^2$$

$$= 2 R_L 3 I_T^2 = 6 R_L I_T^2 \quad \rightarrow \quad P_{dM} = 2 P_{dT}$$

Questo se le resistenze sono uguali, ~~invece se vogliono avere gli stessi valori di potenza e corrente:~~

$$R_k = \rho \frac{L}{S_k}$$

$$P_{dM} = 2 P_{dT}$$

$$2 R_M I_M^2 = 3 R_T I_T^2 \quad 2 R_M = \frac{R_T}{3}$$

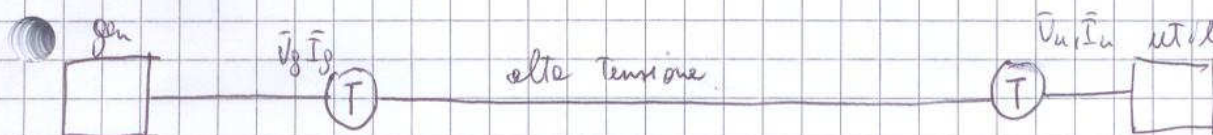
$$2 \rho \frac{L}{S_M} = \rho \frac{L}{S_T}$$

$S_M = 2 S_T$ la resistenza dei cavi è doppia, quindi a

parte di lunghezza e materiale, la spesa dei cavi è doppia e quindi costo di più

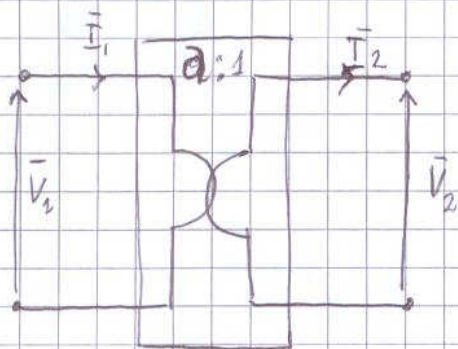
Concludiamo che a parte di tensione un circuito monofase dissipa potenza doppia, con una corrente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ volte inferiore, e con un costo di fili per il trasporto ~~33%~~ maggiore (3 fili con sezione 1 per T, 2 fili con sezione 2 per M, quindi $4-3=1$ in risparmio solo il 25% di materiale)

Se in una linea per il trasporto della corrente, data una certa tensione, potremo far vedere ai due capi della linea una corrente molto bassa e una molto alta, dato che la potenza dissipata va con il quadrato della corrente, otteniamo valori di spreco molto bassi. Questo è possibile grazie ai trasformatori, che fanno vedere una tensione molto alta ai due capi della linea di trasporto, abbassando enormemente i valori di corrente e consumo.



TRASFORMATORE IDEALE

Il trasformatore è un doppio bipolo che si schematizza:



• Il trasformatore ideale ~~de~~ ~~non~~ ~~ammette~~ potenze attive e reattive nulle, esso quindi lavora invariato i rapporti tra potenze e correnti:

$$P_1(t) = v_1(t) i_1(t)$$

$$P_2(t) = v_2(t) i_2(t)$$

$$P_1(t) = P_2(t)$$

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = a \in \mathbb{R} \quad \text{rapporto di trasformazione.}$$

se $v_1 > v_2$ $a > 1$ elevatore

se $v_1 < v_2$ $a < 1$ riduttore

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{1}{a}$$

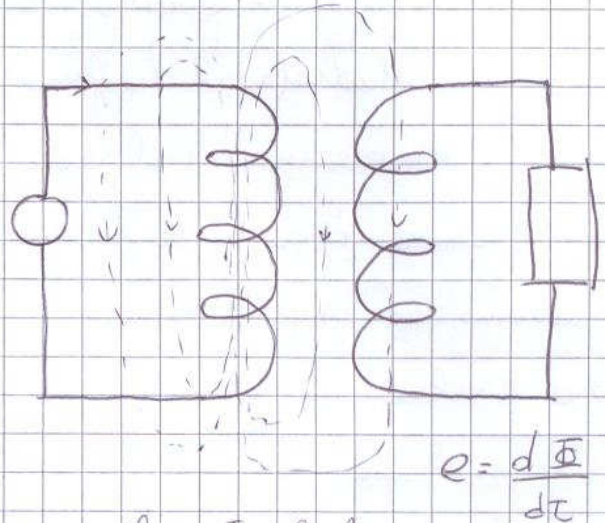
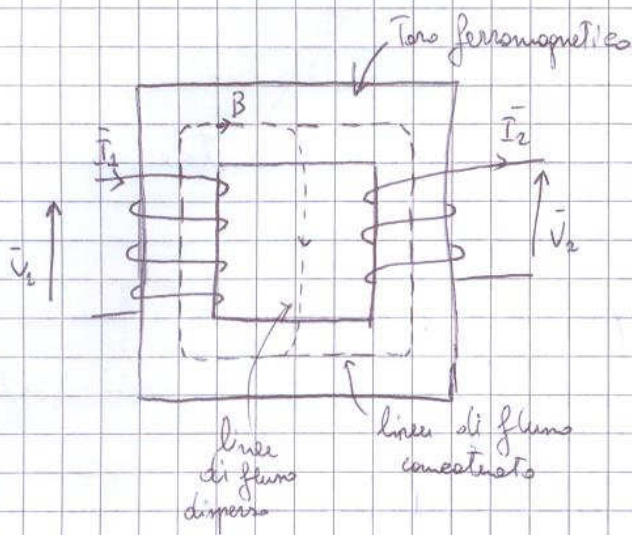
Notiamo che per la potenza complessa: $\dot{A}_1 = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* = a \bar{V}_2 \left(\frac{\bar{I}_2}{a} \right)^* = \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = \dot{A}_2$

se colleghiamo una resistenza ai morsetti e abbiamo:

$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{a \bar{V}_2}{\frac{\bar{I}_2}{a}} = a^2 \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = a^2 \dot{Z}_2$$

concludiamo che ai morsetti il valore dell'impedenza Z_2 risulta moltiplicato per a^2

Il funzionamento di un trasformatore reale si basa sulle linee di campo magnetiche prodotte da un induttore, che si concatenano con un altro induttore, creando una nuova corrente. Questo sistema naturalmente non ci dà gli stessi risultati del sistema ideale sopra studiato. Nelle linee del campo magnetico non si concatenano con l'altro induttore, per aumentare il rendimento e quindi condurre il campo magnetico ~~tra~~ i due induttori si inserisce un toro ferromagnetico, che permeabilità magnetica μ superiore a quella dell'aria (μ_0), che oppone meno resistenza al campo dell'induttore e ne devia le linee verso l'altro induttore.



senza il materiale ferromagnetico
le linee di campo magnetico che si generano
si disperdono molto più numerose.

Per supporre un caso ideale si suppone che la μ del Toro ferromagnetico sia molto vicino all'infinito e che la resistenza interna degli induttori sia pressoché nulla. Ciò non è possibile dato che i materiali magnetici hanno una μ solo di un numero intero di volte molto maggiore di quella dell'aria molto densa*. Tutto ciò determina materialmente l'efficienza dei trasformatori, che comunque con il progresso raggiungono valori vicini al 99%.

* Inoltre nel materiale si genera e cresce una corrente (di Foucault) che disperde energia sotto forma di calore a causa della resistenza interna del materiale ferromagnetico di cui è composto il Toro.

Riassumendo abbiamo:

- 1) Perdite del rame degli induttori + Perdite del Toro magnetico.
- 2) μ non ∞ quindi un accoppiamento non perfetto.
- 3) $\Phi = LI$ $L = d\mu \neq \infty$ $I = \frac{\Phi}{L} \rightarrow 0$ caso ideale irrealizzabile.
- 4) Corrente magnetomotrice.

CIRCUITI MAGNETICI - LEGGI DI HOPKINSON

Abbiamo già studiato il trasformatore, prendendoci in un condensatore. Per poter studiare però i meccanismi e il reale funzionamento del trasformatore, dobbiamo fare dei trasformati ai circuiti magnetici.

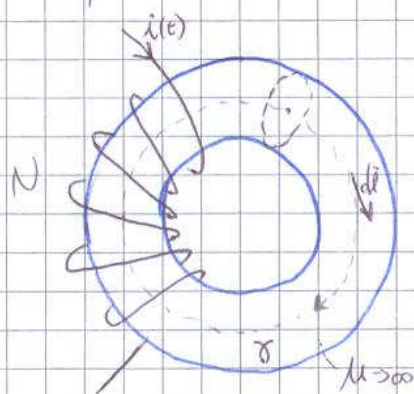
Se studiamo un semplice esempio di macchina magnetica, costituita da un Toro circolare, in cui è avvolto un induttore di N spire, con spire molto strette in modo da limitare il più possibile le linee di campo disperso, possiamo studiare il campo magnetico e di induzione magnetica tramite le due leggi di Hopkinson, che hanno un'analogo diretta con quelle di Kirchhoff.

Dalle leggi della fisica sappiamo:

1- campo induzione magnetica $\rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$

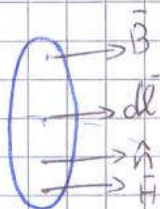
2- campo magnetico $\rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = [\mathcal{F}]$

forza magnetomotrice



La relazione delle forze magnetomotrice $\oint$ è del tipo causa effetto: se ignetto una corrente I ottengo un campo H

Limitiamoci ora allo studio nella sezione S del Toro:

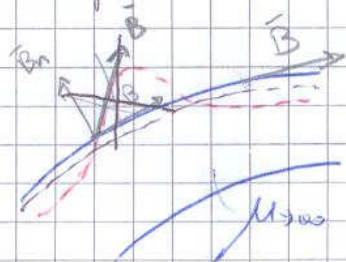


Abbiamo il flusso:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds$$

inoltre dalle formule precedenti: $d\vec{l} // \hat{n}$ $\vec{B} // \vec{H}$

Però il secondo parallelismo non è sempre verificato. Se il campo magnetico H è sempre contenuto nel Toro, avremo che il campo B , tangente a H nella superficie del Toro, non ha componenti normali alla superficie esterna, quindi sarà parallelo anche a $\hat{n}$. Se non verificato tutto le relazioni di parallelismo



abbiamo: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = \mathcal{F} = \oint \frac{B}{\mu} dl = \oint \frac{\Phi}{\mu_s} dl$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS \quad B = \frac{\Phi}{S}$$

$\uparrow$
B omogeneo

$$\mathcal{F} = \oint \frac{dl}{\mu S}$$

il valore $\oint \frac{dl}{\mu S} = R$ (riluttanza)

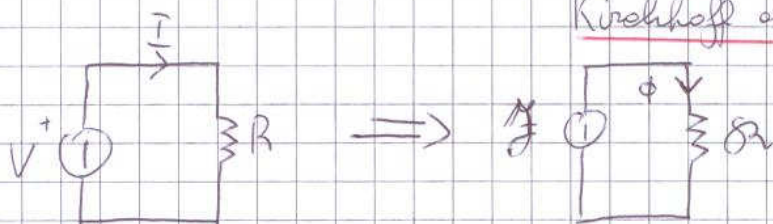
perché molto simile ad una resistenza:

$$R = \oint \frac{\rho}{S} dl = \rho \frac{l}{S}$$

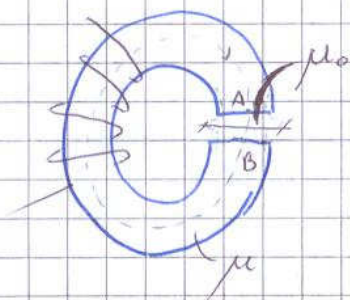
Quindi in condizioni di campo induttore omogeneo, μ costante, S anche costante nel γ troviamo:

$$\mathcal{F} = \Phi R \Leftrightarrow V = IR$$

(Hopkinson alla forma magnetomotrice =
Kirchhoff alle Tensioni)



Adesso se prendiamo un "Toro a C" e lo studiamo con Hopkinson:



$$R = \int_{\text{FERRO}} \frac{dl}{\mu S} + \int_{\text{ARIA}} \frac{dl}{\mu S} = R_{fe} + R_{aria}$$

$$\mathcal{F} = (R_{fe} + R_{aria}) \Phi$$

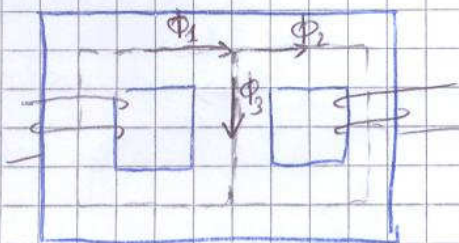
Ritornando alla formula della forma magnetomotrice, con μ e S costanti:

$$\mathcal{F} = \Phi R = NI$$

$$\Phi = \frac{NI}{R} \text{ flusso medio per spira.}$$

definiamo il flusso totale $\Phi = \Phi N = \frac{N^2}{R} I$
 $\frac{N^2}{R} \rightarrow L$ coefficiente di autoinduzione.

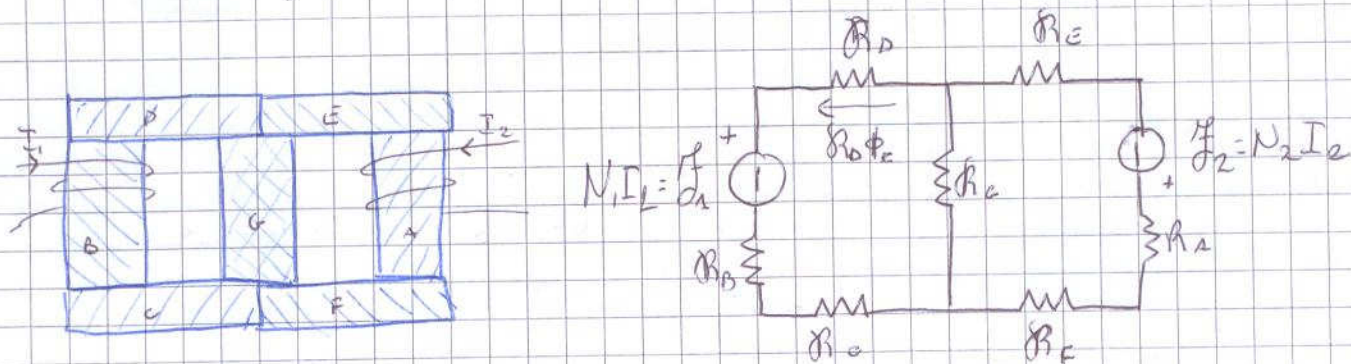
$$L = \frac{N^2}{R} = \frac{N^2 \mu S}{l}$$



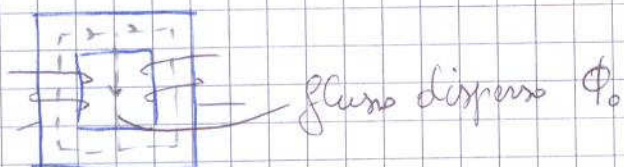
$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \rightarrow \sum_k \Phi_k = 0$$

Hopkinson ai flussi = Kirchhoff alle correnti.

Queste leggi riportano chiaramente ad una analogia e ad una schematizzazione del circuito magnetico in un circuito elettrico.



Possiamo così trovare anche le linee di campo del campo magnetico:

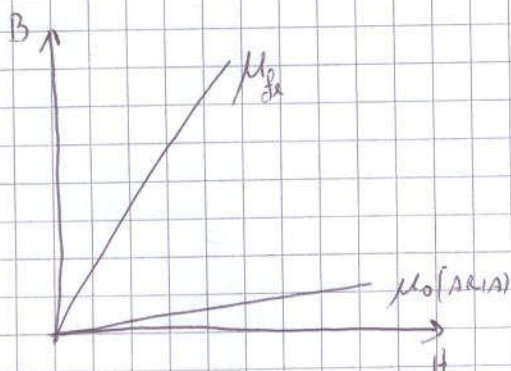


~~XXXX~~

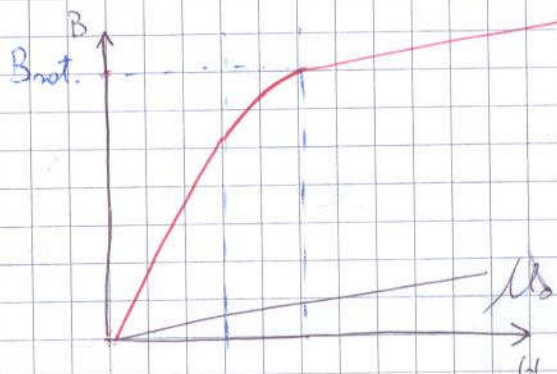
MATERIALI FERROMAGNETICI

Fino ad ora abbiamo costruito il nostro Toro con una μ (coefficiente per magnetico) tendente ad infinito. Abbiamo inoltre detto che questo con lo potremmo rappresentare al comportamento di un materiale ferromagnetico. Questo non è esattamente vero, perché, se rappresentiamo l'andamento $B = \mu H$ in un materiale ferromagnetico, sempre considerato ideale, non otteniamo una rappresentazione grafica reale del comportamento.

IDEALE

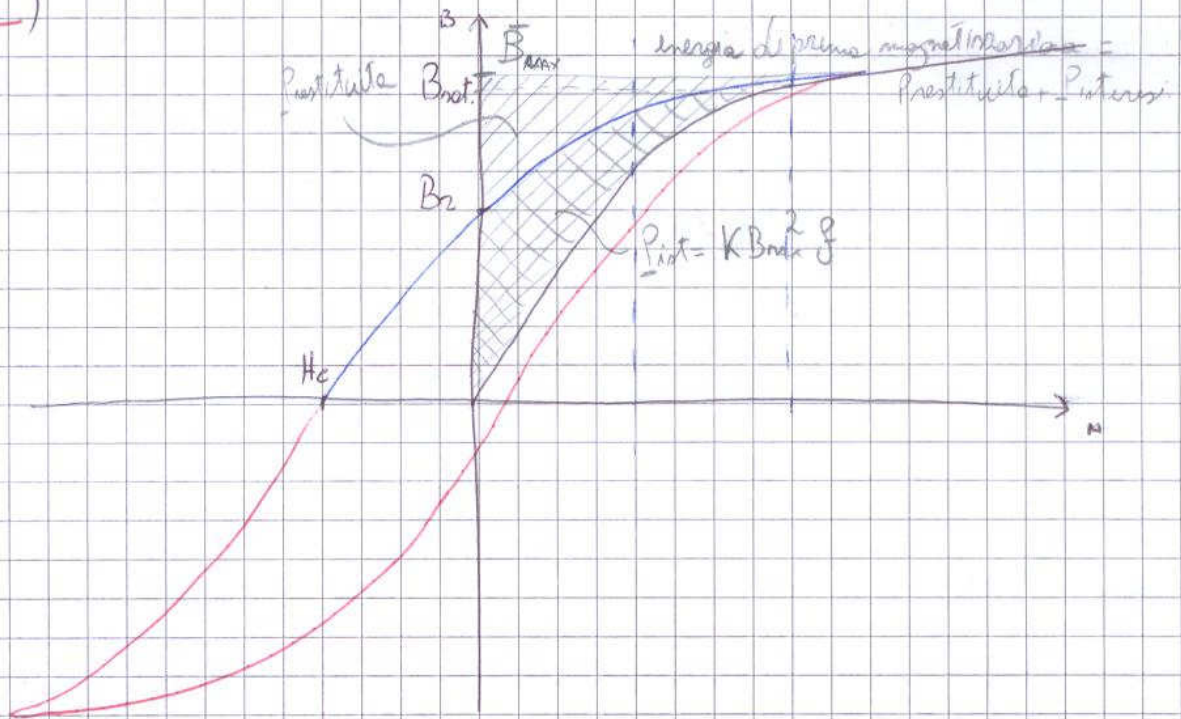


REALE



È evidente che un materiale reale ha un comportamento con perdite μ_{se} fino ad un valore dove poi inizierà a decrescere (giacché) fino a raggiungere valori prossimi a μ_0 .

Studiamo ora l'andamento dei valori di B al variare di H (ciclo di isteresi)

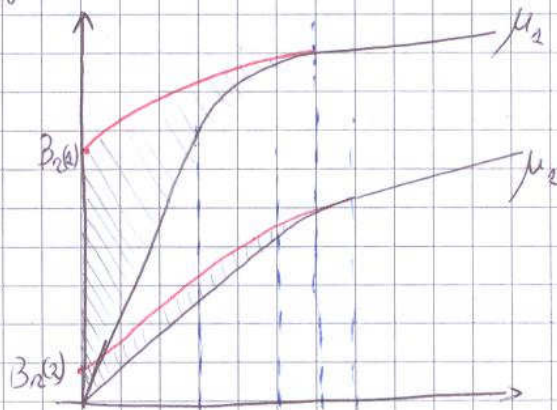


Dopo aver caricato il nostro materiale ferromagnetico, sottoponendolo a un campo H , sarà presente un certo campo B . Se otteniamo il valore di H a zero, notiamo che il campo B non si riduce del tutto, ma sarà presente un campo residuo B_r (—). Per effettuare il completo smagnetamento del campo B dobbiamo sottoporre il materiale ad un campo H_c negativo (campo coercitivo). Naturalmente maggiore è la capacità del materiale di magnetizzarsi (B_r) maggiore è il valore di H_c a cui lo riduce sottopone per smagnetarlo. Se continuiamo ad ottenere il valore di H otterremo un comportamento di B analogo al precedente. Ricominciando H fino al valore iniziale chiudiamo il nostro ciclo (—). Studiamo ora il comportamento della potenza nel primo quadrante, sfruttando le analogie tra $H \times I$ e tra $B \times \Phi \times V$. Vediamo che fino al valore di B_{max} si spende una certa potenza P per magnetizzare il materiale, però quando si ottiene il valore del campo magnetico (H) solo una parte dell'energia viene restituita, mentre un'altra viene consumata per l'isteresi.

$$P_{\text{inferiori}} = K B_{\text{max}}^2 f$$

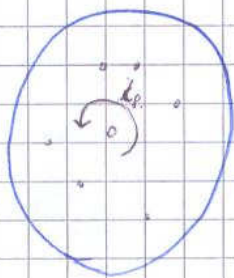
Naturalmente maggiore è il campo B_{max} maggiore sarà la potenza ~~inferiore~~.

P_{ist} analiticamente la formula di P_{ist} viene trovata sperimentalmente e non ha dimostrazione matematica. Come possiamo vedere graficamente due materiali con diverse proprietà magnetiche avranno diversi valori di P_{ist} .



La scelta del materiale dipenderà dall'utilizzo del materiale ferromagnetico. In strutture di macchine movimento dinamiche si usano materiali con basse P_{ist} perché soggetti a campi continui di H (cicli) mentre se si ha bisogno di macchine statiche ~~che~~ ~~è~~ ~~ciclo~~ ~~una~~ lavorano a valori di H costanti si sceglie un alto valore di P_{ist} , per facilitare anche le macchine eccentriche.

Se ripassiamo la sezione del nostro Toro magnetico.



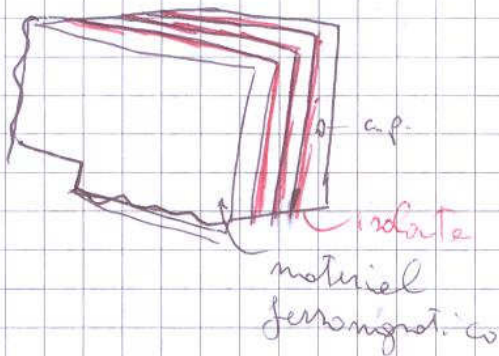
Le linee di campo magnetico intorno al Toro non sono variabili col tempo, perché dipendenti dalla corrente, questo causerebbe, a causa della resistenza interna del materiale una spreca di potenza dovuta a delle correnti "perdute".

$$P_{\text{c.p.}} = K B_{\text{max}}^2 f^2 \sigma S \quad \text{con } \sigma = \text{conduttività elettrica}$$

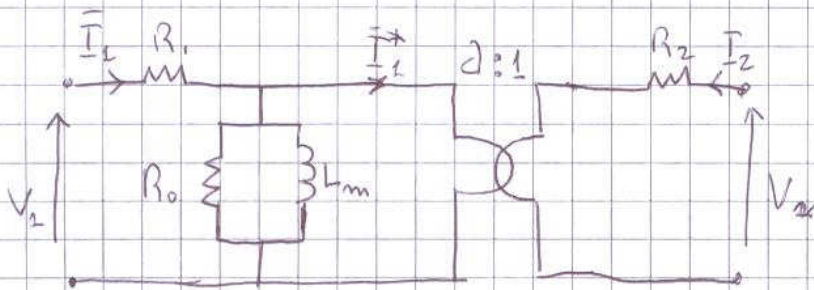
Le leghe che non evolvono a usare al posto del ferro servono a mantenere pressoché inalterato (o almeno il valore di μ e ad ottenere quello di σ). Queste leghe sono però molto fragili.

Per diminuire la resistenza interna del materiale si può aumentare il numero delle lamine di materiale ferromagnetico, molte tra di loro con servizi isolati a corto.

Le correnti parassite non riusciranno così a circolare bene.



Proviamo infine giungere alla conclusione che il nostro trasformatore ideale, per esserci a quello reale, ha bisogno di un'aggiunta di resistenza interna al filo in ingresso e in uscita, di una resistenza R_0 dovuta alle perdite statene del Toro e di una induttanza costante del flusso:



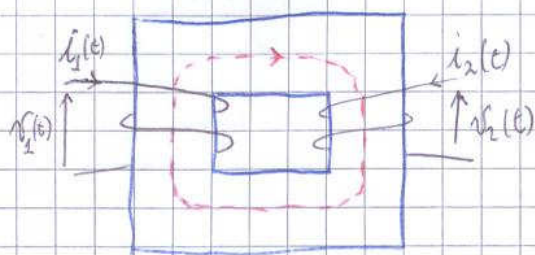
Le correnti che passeranno attraverso L_m e R_0 saranno tanto minori quanto maggiore sarà il loro valore, e quindi spreceranno meno potenza;

$$\begin{aligned} L &= \mu N^2 \\ \Phi &= LI \\ B &= \mu H \end{aligned}$$

$$R_0 \gg R_1$$

Se $I_2 = 0 \rightarrow I_1^* = \frac{1}{n} I_2 = 0$ non si trasforma corrente a tensione, però la corrente circolerà lo stesso all'interno del Toro e quindi si saranno spesi di potenza dovuti a R_0 e L_m .

~~Equazioni~~ EQUAZIONI CARATTERISTICHE TRASFORMATORE

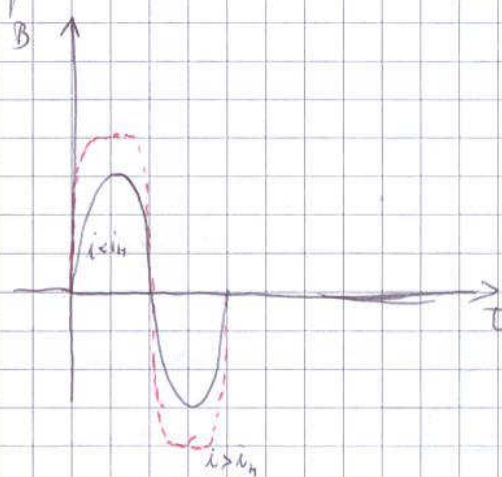
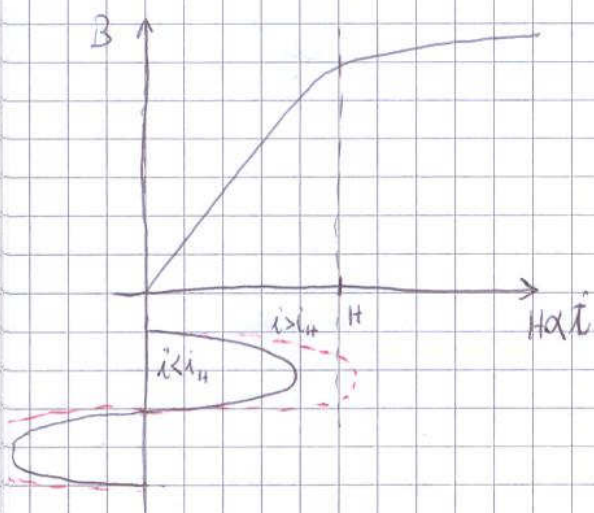


Il circuito 1 e il circuito 2 del trasformatore possono essere descritti con il secondo principio di Kirchhoff utilizzando i coefficienti L_1 e L_2 di autoinduzione e il coefficiente M di mutua induzione

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

il coefficiente M dipende dal flusso di B indotto e lo stesso in entrambe le equazioni perché questo è un sistema reciproco.

Riconoscendo che H e B sono reciproci vediamo che:



Per valori di i corrispondenti a un H inferiore a quella massima di linearità, il sistema $B \times H$ ha un comportamento rettilineo, quindi proporzionale, i coefficienti L_1 e L_2 in quest'intervallo sono delle costanti, ciò ci permette di scrivere le equazioni alle tensioni nel campo dei fasori:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \rightarrow \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1 \rightarrow \frac{\bar{V}_2}{j\omega L_2} = \bar{I}_2 + \frac{M}{L_2} \bar{I}_1 \end{cases}$$

Se ipotizziamo che i due circuiti sono in accoppiamento perfetto,
cioè il flusso usante del primo induttore va tutto nel secondo,
senza dispersioni

$$\Phi_{11} = L_1 i_1$$

$$\Phi_{22} = L_2 i_2$$

flusso autogenetico

$$\Phi_{12} = M i_1$$

$$\Phi_{21} = M i_2$$

flusso di mutua

$$\Phi_{11} = \Phi_{21}$$

$$L_1 i_1 = M i_2$$

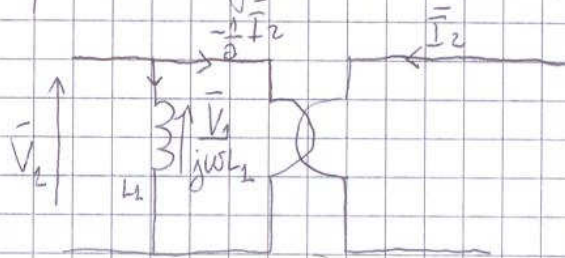
$$L_1 L_2 = M^2$$

obtien inoltre che:

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a = \frac{N_1}{N_2}$$

mettendo a rapporto le due equazioni fondamentali $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$ di prima

troviamo: $\frac{V_1}{V_2} = a$



per la corrente:

$$\frac{\bar{V}_2}{j\omega L_2} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_2} \bar{I}_2 \rightarrow \bar{I}_1 = -\frac{1}{a} \bar{I}_2 + \frac{j\bar{V}_2}{j\omega L_2} \rightarrow \text{corrente magnetizante } \bar{I}_m$$

la corrente magnetizante $\frac{\bar{V}_2}{j\omega L_2}$ diventa trascurabile per valori

di L_2 molto grandi ($\rightarrow \infty$) e quindi $L_2 = \frac{N_2^2}{R} \rightarrow \infty$ un numero di spire

tendente all'infinito. Abbiamo così il caso ideale:

$$\boxed{\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a}}$$

Se rimuoviamo l'ipotesi di accoppiamento perfetto, possiamo scomporre L_1 e L_2 in

due termini, due accoppiati e 2 non:

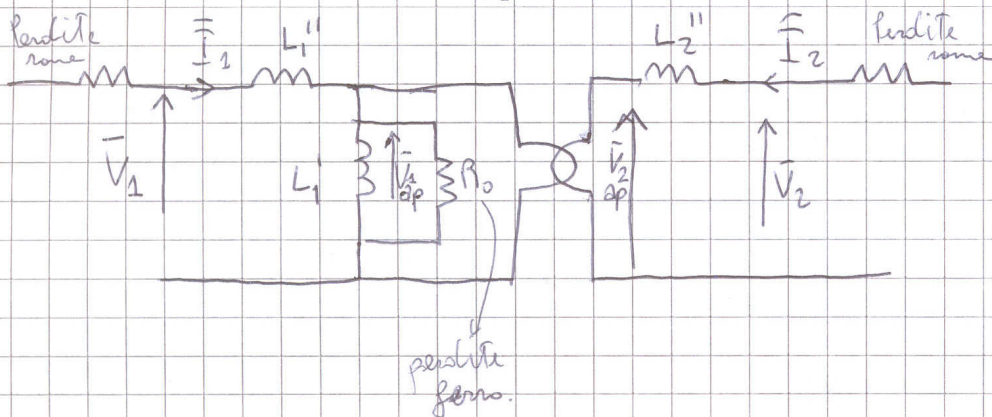
$$L_1 = L_1' + L_1''$$

$$M^2 = L_1' L_2'$$

$$L_2 = L_2' + L_2'' \rightarrow \text{disaccoppiati}$$

Periamo così ricavare il caso reale:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = [j\omega L_1' \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2] + j\omega L_1'' \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 = [j\omega L_2' \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1] + j\omega L_2'' \bar{I}_2 \end{cases}$$



CENNI DI TRANSITORIO

Un circuito che lavora a regime è caratterizzato da valori di tensione e corrente caratterizzati da funzioni costanti o periodiche. Ma nel tempo che interessa noi l'esaminare dei generatori e lo stabilirsi del regime di lavoro, i valori di tensione e corrente erogati dal generatore non hanno una caratteristica semplice da studiare. Transitorio.

Prendiamo un generatore di tensione continua a cui è collegato un resistore e un induttore. A regime lo studio dell'induttore è superfluo dato che si comporta come un cortocircuito, vediamo invece cosa succede dal momento in cui attiviamo l'interruttore del circuito fino allo stabilirsi del regime:



$$\text{REGIME } I = \frac{E}{R}$$

$$\text{TRANSITORIO } E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L}$$

di quest'equazione lineare possiamo trovare la primitiva tramite la risoluzione del problema di Cauchy, dando come valori noti:

$$i(t) = A ; i(0) = 0 \Rightarrow \text{perché per continuità, l'energia accumulata}$$

61 deve essere la stessa sia a 0^+ che a 0^- quindi basta fare il limite*

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$A = -\frac{E}{R}$$

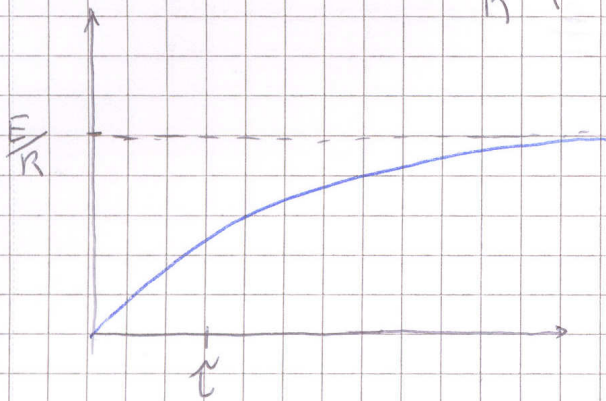
costante di Tempo

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

graficamente notiamo che dopo

4 o 5 volte il Tempo τ l'induttore

si può considerare a regime



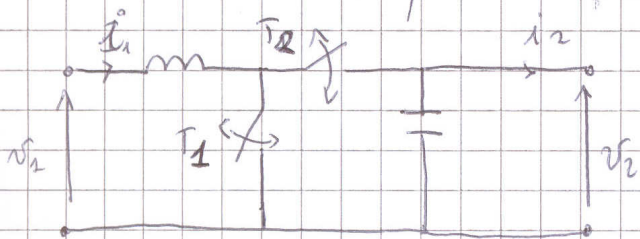
$$\epsilon = \frac{1}{2} L i^2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \epsilon = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon = 0$$

se l'induttore è serico

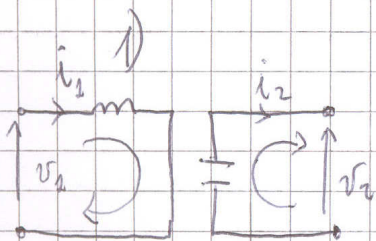
TRASFORMATORE CORRENTE CONTINUA

Il Trasformatore di corrente continua è una macchina elettrica che ci permette di variare i valori di tensione e corrente in ingresso e uscita, tramite l'utilizzo di soli componenti elettronici:

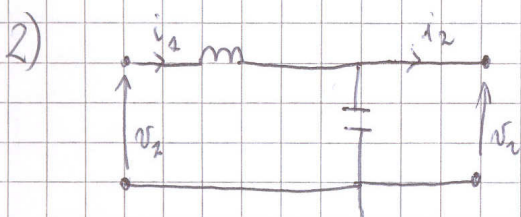


I Transistor T_1 e T_2 sono dei Transistor alimentati con una certa frequenza da una centralina, ovvero 2 configurazioni:

- 1) T_1 chiuso - T_2 aperto
- 2) T_1 aperto - T_2 chiuso



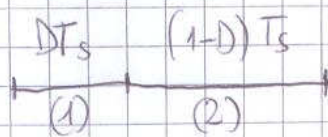
L'induttore non sta caricando mentre il condensatore si scarica.



L'induttore si scarica mentre il condensatore si carica.

chiameremo i Tempi di morte nella prima configurazione DT_1

e delle stesse $(1-D)T_1$ dove T_1 è la durata di Tutto il ciclo



$$1) V_L = V_1 - \bar{E} = L \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \rightarrow V_1 = L \frac{\Delta I_1}{DT_s}$$

$$\Delta I_1 + \Delta I_2 = 0$$

$$2) V_L = V_1 - V_2 = L \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \quad V_1 - V_2 = L \frac{\Delta I_2}{(1-D)T_s}$$

$$\underbrace{V_1 DT_s}_L + \underbrace{(V_1 - V_2)(1-D)T_s}_L = 0$$

$$V_1 + V_2 (1-D) = 0 \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{(1-D)}{D} = f(D)$$

Notiamo che i valori di V_1 e V_2 dipendono solo da quanto tempo è chiuso il Trans T_1 rispetto al Trans T_2 . Abbiamo ottenuto un funzionamento analogo al Trasformatore in corrente sinusoidale. $f(D) = 2$

